Dienstag, 27. April 04

Satz 2.8 *V sei ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum. Für jeden Unterraum U von V gilt dann*
(a) $U + U^\perp = V$, $U \cap U^\perp = \{0\}$, $\langle U, U^\perp \rangle = 0$.
(b) $(U^\perp)^\perp = U$.

Wir sagen in der Situation (a), dass V die **orthogonale Summe** von U und $U^\perp$ ist und schreiben dafür $V = U \perp U^\perp$.

Beweis. Zu (a): Es ist U ebenfalls endlichdimensional. Nach Satz 2.6 hat U dann eine Orthonormalbasis, so dass wir auf U das Projektionslemma anwenden können. Dasselbe zeigt $U + U^\perp = V$; die übrigen Eigenschaften von (a) sind offensichtlich.

Zu (b): Nach Definition ist $U \subseteq (U^\perp)^\perp$. Sei $v \in (U^\perp)^\perp$, so lässt sich v wegen $V = U + U^\perp$ in der Form $v = u + x$ mit $u \in U$ und $x \in U^\perp$ schreiben. Bilden des Skalarprodukts mit x führt zu $0 = \langle v, x \rangle = \langle u, x \rangle + \langle x, x \rangle = \langle x, x \rangle$, woraus $x = 0$ und damit $v = u \in U$ folgt. □

Orthonormalbasen lassen sich im Zusammenhang mit Koordinatendarstellungen sehr gut handhaben.

Satz 2.9 *Sei $e_1, e_2, \ldots, e_n$ eine Orthonormalbasis des euklidischen Vektorraums V. Dann gilt:*

(1) *Für jedes $v \in V$ gilt $v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i$.*

(2) $|| \sum_{i=1}^n x_i e_i || = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

(3) $\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Beweis. Die Beweise ergeben sich durch direktes Ausrechnen. □

5.3 Orthogonale Abbildungen

Definition 3.1 *V und W seien euklidische Vektorräume. Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt* ***orthogonal****, wenn*

$$\langle f(v_1), f(v_2)\rangle_W = \langle v_1, v_2\rangle_V$$

für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt.

Eine orthogonale Abbildung bewahrt insbesondere die Norm, ist daher stets injektiv. Von besonderem Interesse sind die orthogonalen Selbstabbildungen $f : V \to V$. Dieselben sind für einen endlichdimensionalen Vektorraum V stets Isomorphismen. Die folgenden Eigenschaften sind leicht zu überprüfen:

(1) Die identische Abbildung 1_V ist orthogonal.

(2) Die Komposition von orthogonalen Abbildungen ist orthogonal.

(3) Ist $f : V \to W$ eine bijektive orthogonale Abbildung, so ist auch $f^{-1} : W \to V$ orthogonal.

Insbesondere gilt:

Satz 3.2 *Die orthogonalen Selbstabbildungen eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums bilden bezüglich der Verknüpfung von Abbildungen eine Gruppe $\mathbf{O}(V)$, die* ***orthogonale Gruppe*** *von V.* □

Dabei heißt ein Paar $(G, \circ)$, bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x \circ y$ — nachfolgend oft Multiplikation genannt — eine **Gruppe**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(G 1) Die Verknüpfung ist assoziativ: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

(G 2) Es gibt ein neutrales Element e mit $a \circ e = a = e \circ a$.

(G 3) Zu jedem $x \in G$ gibt es ein Inverses y mit $x \circ y = e = y \circ x$.

Freitag, 30. April 04

Durch die Anforderungen sind neutrales Element und Inverses eindeutig bestimmt:

Nehmen wir an, dass e und e' neutrale Elemente von $(G, \circ)$ sind, so folgt $e = e \circ e' = e'$. Fortan sprechen wir also von *dem* neutralen Element der Gruppe $(G, \circ)$.

Seien ferner y und z zu x inverse Elemente, so folgt

$$y = y \circ e = y \circ (x \circ z) = (y \circ x) \circ z = e \circ z = z,$$

so dass wir künftig von *dem* zu x inversen Element x^{-1} aus G sprechen können. Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$e^{-1} = e, \quad (x^{-1})^{-1} = x, \quad (x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}.$$

Die erste Behauptung folgt aus $e \circ e = e$, die zweite folgt aus $x \circ x^{-1} = e = x^{-1} \circ x$. Für die dritte sehen die Gleichung $(x \circ y) \circ (y^{-1} \circ x^{-1}) = x \circ (y \circ y^{-1}) \circ x^{-1} = x \circ x^{-1} = e$ und die entsprechend nachzuweisende Gleichung $(y^{-1} \circ x^{-1}) \circ (x \circ y) = e$ an, aus denen auch hier die Behauptung folgt.

Die Gruppenaxiome **(G 1)—(G 3)** sind offensichtlich im Fall $\mathbf{O}(V)$ bzgl. der üblichen Verknüpfung von Abbildungen erfüllt. Insbesondere ist die Assoziativität erfüllt, weil das Nacheinanderausführen von Abbildungen dem Assoziativgesetz genügt. Ferner übernimmt 1_V die Rolle des neutralen Elements und die zu u inverse Abbildung u^{-1} die Rolle des zu u in $\mathbf{O}(V)$ inversen Elements.

Weitere Beispiele von Gruppen sind uns, ohne das wir sie als solche bezeichnet hätten, schon früher begegnet:

(1) Die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ bezüglich der Addition.

(2) Sei K ein Körper. Dann ist $(K, +)$ eine Gruppe, aber auch $(K \setminus \{0\}, \cdot)$. Insbesondere gilt dies für $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

In diesen Gruppen gilt stets $x \circ y = y \circ x$. Sie sind **kommutativ** oder auch **abelsch**[3].

Ein weiteres Beispiel einer Gruppe wird durch die Gruppe $\mathbf{GL}(V)$ der K-Automorphismen $f : V \to V$ eines K-Vektorraums gebildet. Diese Gruppe heißt die **allgemeine lineare Gruppe** oder auch **volle lineare Gruppe** von V[4].

Ist zusätzlich V ein euklidischer Vektorraum, so ist $\mathbf{O}(V)$ in $\mathbf{GL}(V)$ gelegen; ferner stimmen beide Gruppenmultiplikationen für Elemente aus $\mathbf{O}(V)$ überein: es ist $\mathbf{O}(V)$ eine Untergruppe von $\mathbf{GL}(V)$.

Sei generell $(G, \circ)$ eine Gruppe. Wir nennen eine Teilmenge U von G **Untergruppe** von G, falls U gegen die Verknüpfung von G abgeschlossen ist und bezüglich der resultierenden Verknüpfung $\circ_U : U \times U \to U$, $(x, y) \mapsto x \circ y$, selbst eine Gruppe ist.

Es ist nicht schwer nachzuweisen, dass U genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

(U 1) Für $x, y \in U$ gehört auch $x \circ y \in U$.

(U 2) Das neutrale Element e von G gehört zu U.

(U 3) Für jedes $x \in U$ gehört auch das in G gebildete x^{-1} zu U.

[3] Nach dem norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel (1802–1829)

[4] Dabei steht GL für general linear.

Definition 3.3 *Eine $n \times n$-Matrix A heißt* ***orthogonal****, wenn die lineare Abbildung*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto A \cdot x$$

orthogonal ist, d.h. wenn $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Aus den Eigenschaften von $\mathbf{O}(\mathbb{R}^n)$ folgt sofort, dass die Einheitsmatrix zu den orthogonalen $n \times n$-Matrizen gehört, dass dieselben ferner gegen Produktbildung abgeschlossen sind und schließlich die zu einer orthogonalen Matrix inverse Matrix wieder orthogonal ist. Kurz: die orthogonalen $n \times n$-Matrizen bilden bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe $\mathbf{O}(n)$, die **orthogonale Gruppe** des Grades n.

Ganz entsprechend bilden die *invertierbaren* $n \times n$-Matrizen über einem Körper K hinsichtlich Matrixmultiplikation eine Gruppe $\mathbf{GL}_n(K)$, die als allgemeine oder **volle lineare Gruppe** des Grades n bezeichnet wird.

> Sind G und H Gruppen, so heißt eine Abbildung $u : G \to H$ **Gruppenhomomorphismus**, wenn $u(x \circ y) = u(x) \circ u(y)$ für alle $x, y \in G$ gilt. Für Gruppen sind diese Abbildungen daher die strukturbewahrenden Abbildungen.
>
> Falls u zusätzlich bijektiv ist, sprechen wir von einem **Isomorphismus** $u : G \to H$ von Gruppen. Es ist nicht schwer zu sehen, dass in diesem Fall auch die Umkehrabbildung $u^{-1} : H \to G$ ein Gruppenhomomorphismus und dann ebenfalls ein Isomorphismus ist. Falls es einen Isomorphismus $u : G \to H$ gibt, nennen wir die Gruppen G und H isomorph, Schreibweise $G \cong H$. Wir verbinden mit diesem Begriff die Vorstellung, dass isomorphe Gruppen über "dieselben" mathematischen Eigenschaften verfügen.

Es sind $\mathbf{GL}_n(K)$ und $\mathbf{GL}(K^n)$ isomorphe (aber nicht gleiche) Gruppen. Es ist nämlich durch

$$\varphi : \mathbf{GL}_n(K) \to \mathbf{GL}(K^n), \quad A \mapsto (x \mapsto A \cdot x)$$

ein Isomorphismus definiert mit Umkehrabbildung

$$\psi : \mathbf{GL}(K^n) \to \mathbf{GL}_n(K), \quad f \mapsto [f(e_1), \ldots, f(e_n)].$$

Mit gleichlautenden Abbildungsvorschriften sind für den mit Standardskalarprodukt versehenen $\mathbb{R}^n$ die orthogonalen Gruppen $\mathbf{O}(n)$ und $\mathbf{O}(\mathbb{R}^n)$ ebenfalls isomorph.

Der nächste Satz gibt eine konkrete Beschreibung der orthogonalen Matrizen.

Satz 3.4 *Für eine reelle $n \times n$-Matrix A sind äquivalent:*

(1) *A ist orthogonal.*

(2) *$A^{tr} \cdot A = E_n$ (bzw. $A \cdot A^{tr} = E_n$).*

(3) *Die Spalten (bzw. Zeilen) von A bilden ein Orthonormalsystem.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto A \cdot x$. Für die folgenden Argumente merken wir zunächst an, dass $A^{tr} \cdot A = E_n$ zu $A^{-1} = A^{tr}$ und somit zu $A \cdot A^{tr} = E_n$ äquivalent ist. Wir können uns beim Nachweis der Äquivalenz von (2) und (3) daher anschließend auf die Spaltenversion von (3) beschränken.
(1) ⇒ (3): Es ist $A = [f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)]$, wenn $e_1, e_2, \ldots, e_n$ die Standardbasis von A bezeichnet. Da f als orthogonale Abbildung Skalarprodukte bewahrt, ist mit $e_1, e_2, \ldots, e_n$ auch $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ ein Orthonormalsystem.
(3) ⇔ (2): Ist $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, so ist $A^{tr} = \begin{bmatrix} {a_1}^{tr} \\ \vdots \\ {a_n}^{tr} \end{bmatrix}$ und daher

$$A^{tr} \cdot A = \begin{bmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \cdots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \cdots & \langle a_n, a_n \rangle \end{bmatrix}.$$

(3) ⇒ (1): Sei wieder $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Für $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ ist $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i a_i$ und $f(y) = \sum_{i=1}^n y_i a_i$. Da $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ein Orthonormalsystem ist, folgt die Orthogonalität von f aus

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle f(x), f(y) \rangle.$$

Zur letzten Gleichheit haben wir Satz 2.9 (3) benutzt. □

Es gibt somit eine natürliche Bijektion zwischen (geordneten) Orthonormalbasen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ des $\mathbb{R}^n$ einerseits und orthogonalen $n \times n$-Matrizen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ andererseits.

Jede orthogonale Matrix $A \in \mathbf{O}(n)$ erfüllt wegen $A \cdot A^{tr} = E_n$ die Bedingung $|A|^2 = 1$, hat also die Determinante ± 1. Hier gehen ein der Determinantenproduktsatz und die Invarianz der Determinante unter Transponieren.

Die orthogonalen Matrizen mit Determinante 1 bilden — wegen des Determinantenproduktsatzes — eine Untergruppe

$$\mathbf{SO}(n) = \{A \in \mathbf{O}(n) \mid |A| = 1\},$$

von $\mathbf{O}(n)$, die **spezielle orthogonale Gruppe** des Grades n.

Beispiel 3.5 (Drehmatrizen) *Für jeden Winkel α liegt*

$$D(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

in $\mathbf{SO}(2)$. Es gelten die folgenden Eigenschaften:

(1) $D(\alpha + \beta) = D(\alpha) \cdot D(\beta)$.

(2) $D(0) = E_2$.

(3) $D(-\alpha) = D(\alpha)^{-1}$.

(4) $|D(\alpha)| = 1$.

Ferner ist $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *in* $\mathbf{O}(2) \setminus \mathbf{SO}(2)$ *gelegen. Allgemeiner sind alle Matrizen der Form*

$$A \cdot D(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

orthogonale Matrizen mit Determinante -1.

Es ist nicht schwer zu zeigen, siehe das Argument im nachfolgenden Beispiel, dass jede orthogonale 2×2-Matrix entweder eine Drehmatrix $D(\alpha)$ oder eine Matrix von der Form $A \cdot D(\alpha)$ ist. Mit anderen Worten

$$\mathbf{SO}(2) = \{D(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

und mit obiger Bedeutung von A gilt

$$\mathbf{O}(2) = \mathbf{SO}(2) \cup \{A \cdot X \mid X \in \mathbf{O}(2)\}.$$

Wie ihr Name sagt, bewirken die Matrizen $D(\alpha)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ eine Drehung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto D(\alpha) \cdot x$, um den Winkel α. Dagegen bewirken die Matrizen $A \cdot D(\alpha)$ eine Drehspiegelung, d.h. eine Drehung verknüpft mit einer Spiegelung.

Beispiel 3.6 *Die komplexen Zahlen* $\mathbf{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ *vom Betrag* 1 *bilden bezüglich der Multiplikation komplexer Zahlen eine Gruppe. Hierzu berücksichtigen wir, dass* $\mathbf{U}$ *ersichtlich gegen Multiplikation abgeschlossen ist, dass* 1 *in* $\mathbf{U}$ *liegt und dass schließlich für jede komplexe Zahl* z *vom Betrag* 1 *auch* $1/z$ *den Betrag* 1 *hat.*

Die Gruppen $\mathbf{U}$ *und* $\mathbf{SO}(2)$ *sind isomorph, denn die Abbildung*

$$\varphi : \mathbf{U} \to \mathbf{SO}(2), \quad a + b\,i \mapsto \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

ist ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung

$$\psi : \mathbf{SO}(2) \to \mathbf{U}, \quad \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \mapsto a + b\,i.$$

Zu zeigen ist hier nur, dass $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathbf{SO}(2)$ impliziert, dass $c = -b$ und $a = d$ ist. Den Nachweis lassen wir als Übungsaufgabe.