Kapitel 5

Vektorräume mit Skalarprodukt

5.1 Elementare Eigenschaften des Skalarprodukts

Dienstag, 20. April 04

Wollen wir in einem Vektorraum — wie in der anschaulichen Vektorrechnung — auch **Längen und Winkel messen**, benötigen wir einen reellen Vektorraum mit Skalarprodukt. Das resultierende Konzept eines euklidischen Vektorraums vereinigt diejenigen Anforderungen, die wir zusätzlich an einen reellen Vektorraum stellen müssen, um erfolgreich Längen- und Winkelmessung betreiben zu können.

Definition 1.1 *Sei V ein reeller Vektorraum. Ein* ***Skalarprodukt*** *auf V ist eine Abbildung*

$$\langle -,- \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \langle x,y \rangle,$$

welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

(S 1) *$\langle -,- \rangle$ ist* ***bilinear****, d.h. in jeder der beiden Variablen linear.*

(S 2) *$\langle -,- \rangle$ ist* ***symmetrisch****, d.h. es gilt $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$ für alle $x, y \in V$.*

(S 3) *$\langle -,- \rangle$ ist* ***positiv definit****, d.h. es gilt $\langle x,x \rangle > 0$ für alle $0 \neq x \in V$.*

Ein Paar $(V, \langle -,- \rangle)$ bestehend aus einem reellen Vektorraum V und einem Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$ auf V heißt ***euklidischer Vektorraum****.*

Beispiele 1.2 *(a) Im Anschauungsraum ist durch $\langle x,y \rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos \sphericalangle(x,y)$ ein Skalarprodukt gegeben.*

(b) Auf dem $\mathbb{R}^n$ ist durch $\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ ein Skalarprodukt gegeben.

(c) Ist V der Vektorraum der auf $[0,1]$ stetigen Funktionen, so wird auf V durch*

$$\langle f,g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

ein Skalarprodukt erklärt[1]*.*

Definition 1.3 *Ist $(V, \langle -,- \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $x \in V$, so heißt*

$$||x|| = \sqrt[+]{\langle x,x \rangle}$$

die ***Norm*** *von x.*

[1]Der Nachweis von **(S 3)** erfordert etwas Aufwand: Sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$ und $b := g(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in [0,1]$. Wegen der Stetigkeit von g gibt dann eine Umgebung $[x_0 - a, x_0 + a]$, $a > 0$, von x_0, in der $g(x) > b/2$ ist. Es folgt dann $\int_0^1 g(x)dx \geq ab > 0$.

Wir wollen nun den Winkel $\sphericalangle(x,y)$ zwischen zwei Vektoren $x, y \neq 0$ durch einen durch die anschauliche Vektorrechnung nahegelegten Ansatz

$$\langle x, y\rangle = ||x|| \cdot ||y|| \cdot \cos \sphericalangle(x,y)$$

erklären, wobei $\sphericalangle(x,y)$ durch den resultierenden Cosinus-Wert

$$\cos \sphericalangle(x,y) = \frac{\langle x, y\rangle}{||x|| \cdot ||y||}$$

dann im Intervallbereich $0 \leq \sphericalangle(x,y) \leq \pi$ eindeutig bestimmt ist.

Allerdings kann dieser Ansatz nur funktionieren, wenn (weiterhin unter der Annahme $x, y \neq 0$) stets

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{||x|| \cdot ||y||} \leq 1$$

gilt. Dass diese Ungleichung tatsächlich immer erfüllt ist, ist die Aussage der folgenden Cauchy-Schwarzschen Ungleichung.

Satz 1.4 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) *In jedem euklidischen Vektorraum V*[2] *gilt*

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

für alle x, y aus V.

Beweis. Für $y = 0$ verschwinden beide Seiten der Ungleichung und wir sind fertig. Wir nehmen daher $y \neq 0$ an. Für jedes reelle λ ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle \\ &= ||x||^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2||y||^2. \end{aligned}$$

Es folgt nach Teilen durch $||y||^2$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda^2 + 2\lambda\frac{\langle x, y\rangle}{||y||^2} + \frac{||x||^2}{||y||^2} \\ &= \left(\lambda + \frac{\langle x, y\rangle}{||y||^2}\right)^2 + \frac{||x||^2}{||y||^2} - \frac{\langle x, y\rangle^2}{||y||^4}. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung wird für $\lambda = -\frac{\langle x,y\rangle}{||y||^2}$ am besten ausgenutzt. Es folgt dann

$$\frac{\langle x, y\rangle^2}{||y||^4} \leq \frac{||x||^2}{||y||^2}, \text{ somit } \langle x, y\rangle^2 \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2$$

und dann durch Bilden der (positiven) Quadratwurzel die Behauptung. □

Freitag, 23. April 04

[2]Von nun an unterdrücken wir die explizite Angabe des Skalarprodukts.

Folgerung 1.5 *Im Spezialfall des mit dem Standard-Skalarprodukt versehenen $\mathbb{R}^n$ ergibt sich:*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

□

Folgerung 1.6 *Wir können für $x, y \in V$, $x, y \neq 0$, durch*

$$\cos\alpha = \frac{\langle x, y\rangle}{||x|| \cdot ||y||}$$

den im Intervallbereich $0 \leq \alpha \leq \pi$ liegenden ***Winkel*** $\alpha = \sphericalangle(x, y)$ *zwischen x und y erklären.* □

Wir nehmen weiterhin $x \neq 0 \neq y$ an. Es ist $\sphericalangle(x, y) = \frac{\pi}{2}$ genau wenn $\langle x, y\rangle = 0$ gilt. Auf dieses Konzept von Orthogonalität werden wir im kommenden Abschnitt näher eingehen.

Satz 1.7 (Norm) *Sei V ein euklidischer Vektorraum. Dann hat die Norm(funktion)*

$$||-|| : V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto ||x||$$

die folgenden Eigenschaften:

(N 1) *Es ist $||x|| \geq 0$ für alle $x \in V$.*
(N 2) *Es ist $||x|| = 0$ genau wenn $x = 0$.*
(N 3) *Es gilt $||\lambda\, x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ for alle $x \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.*
(N 4) *Es gilt die Dreiecksungleichung $||x+y|| \leq ||x|| + ||x||$ für alle $x, y \in V$.*

Beweis. Nur **(N 4)** bedarf eines Beweises. Es ist

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2 \\ &\leq ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 \text{ (Cauchy-Schwarz)} \\ &= (||x|| + ||y||)^2. \end{aligned}$$

□

5.2 Orthogonalität

Definition 2.1 *Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Wir nennen $x, y \in V$ zueinander* ***orthogonal****, wenn $\langle x, y\rangle = 0$ gilt.*

Der Nullvektor ist damit orthogonal zu jedem Vektor. Falls x und y beide nicht Null sind, bedeutet Orthogonalität nach unserer Winkelerklärung, dass der Winkel zwischen x und y gerade $\pi/2$ oder gleichbedeutend $90°$ ist.

Definition 2.2 *Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Ein System $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von Vektoren aus V nennen wir* ***Orthogonalsystem*** *(bzw.* ***Orthonormalsystem****), falls*

(1) $$v_i \neq 0 \text{ (bzw. } ||v_i|| = 1\text{) für jedes } i = 1, \ldots, r.$$

(2) $$\langle v_i, v_k\rangle = 0 \text{ für alle } i \neq k.$$

Mit Hilfe des Kronecker-Symbols können wir die Anforderung an ein Orthonormalsystem zu

$$\langle v_i, v_k\rangle = \delta_{ik} \quad i, k = 1, \ldots, r$$

zusammenfassen.

Satz 2.3 *Jedes Orthogonalsystem $v_1, v_2, \ldots, v_r$ eines euklidischen Vektorraums ist linear unabhängig.*

Gilt zusätzlich $r = \dim V$, so ist $v_1, v_2, \ldots, v_r$ eine Basis von V. Wir sprechen dann von einer **Orthonormalbasis** von V.

Beweis. Es sei

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_i v_i + \cdots + \lambda_r v_r = 0.$$

Wir bilden das Skalarprodukt mit v_i und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v_i, \sum_{j=0}^{n} \lambda_j v_j\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{r} \lambda_j \langle v_i, v_j\rangle \\ &= \lambda_i \langle v_i, v_i\rangle. \end{aligned}$$ □

Falls U ein Unterraum von V und $v \in V$ ist, schreiben wir $U^\perp$ für die Menge aller $v \in V$ für die $\langle v, U\rangle = 0$ gilt, also $\langle v, u\rangle = 0$ für alle $u \in U$ gilt. Wir nennen $U^\perp$ das **orthogonale Komplement** zu U in V. Immer gilt:

Lemma 2.4 *Sei U ein Unterraum eines euklidischen Vektorraums V. Dann ist $U^\perp$ ein Unterraum von V mit $U \cap U^\perp = \{0\}$.*

Beweis. Es ist klar, dass $0 \in U^\perp$ gilt. Sind ferner x und y in U gelegen, so gilt $\langle x - y, u\rangle = \langle x, u\rangle - \langle y, u\rangle = 0$ für jedes $u \in U$. Damit ist $x - y$ ebenfalls in $U^\perp$ gelegen und $U^\perp$ damit ein Unterraum von V.

Für $x \in U \cap U^\perp$ gilt $\langle x, x\rangle = 0$, also $x = 0$. □

Satz 2.5 (Projektionslemma) *Sei V ein euklidischer Vektorraum und U ein Unterraum von V mit der Orthonormalbasis $u_1, u_2, \ldots, u_r$. Dann lässt sich jedes v aus V eindeutig in der Form*

$$v = u + w \text{ mit } u \in U \text{ und } w \in U^\perp$$

schreiben. Es gilt dabei $u = \sum_{i=1}^r \langle v, u_i\rangle u_i$.

Beweis. *Existenz*: Wir setzen $u = \sum_{i=1}^r \langle v, u_i\rangle u_i$ und $w = v - u$. Es ist dann $u \in U$ und wegen der Orthogonalität $\langle u, u_j\rangle = \langle v, u_j\rangle$, somit $\langle w, u_j\rangle = 0$ für $j = 1, \ldots, n$, woraus $w \in U^\perp$ folgt.

Eindeutigkeit: Wir nehmen an, dass

$$u + w = u' + w' \text{ mit } u, u' \in U \text{ und } w, w' \in U^\perp$$

gilt. Es folgt, dass das Element $(u - u') = (w' - w)$ in $U \cap U^\perp$ liegt und damit gleich Null ist. □

Wir beantworten nun die Frage, wieweit Orthonormalbasen existieren. Das Projektionslemma spielt dabei die Rolle des Induktionsschritts.

Satz 2.6 *Jeder endlichdimensionale euklidische Vektorraum hat eine Orthonormalbasis.*

Beweis. Wir verfahren durch Induktion nach $n = \dim V$. Sei $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Basis von V.

$n = 1$: Wir normieren den Basisvektor v_1 und erhalten mit $e_1 = v_1/||v_1||$ eine Orthonormalbasis von V.

$n - 1 \to n$: Nach Induktionsvoraussetzung besitzt der von $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ aufgespannte Unterraum U eine Orthonormalbasis $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$. Mit Hilfe des Projektionslemmas können wir den Vektor v_n in der Form $v_n = u + w$ schreiben, wobei $w \in U^\perp$ und $u = \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, e_i\rangle$. Nach Voraussetzung gehört v_n nicht zu U, daher ist $w \neq 0$. Durch Normieren von w erhalten wir einen weiteren Einheitsvektor

$$e_n = \frac{v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, e_i\rangle}{||v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, e_i\rangle||},$$

der zusammen mit $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ eine Orthonormalsystem aus $n = \dim V$ Vektoren und damit eine Orthonormalbasis von V bildet. □

Bemerkung 2.7 *Explizite Durchformung des Induktionsarguments liefert das sogenannte* ***Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren****, welches konstruktiv aus einer Basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von V eine Orthonormalbasis von V macht.*

Dienstag, 27. April 04

Satz 2.8 *V sei ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum. Für jeden Unterraum U von V gilt dann*
(*a*) $U + U^\perp = V$, $U \cap U^\perp = \{0\}$, $\langle U, U^\perp \rangle = 0$.
(*b*) $(U^\perp)^\perp = U$.

Wir sagen in der Situation (a), dass V die **orthogonale direkte Summe** von U und $U^\perp$ ist und schreiben dafür $V = U \perp U^\perp$.

Beweis. Zu (a): Es ist U ebenfalls endlichdimensional. Nach Satz 2.6 hat U dann eine Orthonormalbasis, so dass wir auf U das Projektionslemma anwenden können. Dasselbe zeigt $U + U^\perp = V$; die übrigen Eigenschaften von (a) sind offensichtlich.

Zu (b): Nach Definition ist $U \subseteq (U^\perp)^\perp$. Sei $v \in (U^\perp)^\perp$, so lässt sich v wegen $V = U + U^\perp$ in der Form $v = u + x$ mit $u \in U$ und $x \in U^\perp$ schreiben. Bilden des Skalarprodukts mit x führt zu $0 = \langle v, x \rangle = \langle u, x \rangle + \langle x, x \rangle = \langle x, x \rangle$, woraus $x = 0$ und damit $v = u \in U$ folgt. □

Orthonormalbasen lassen sich im Zusammenhang mit Koordinatendarstellungen sehr gut handhaben.

Satz 2.9 *Sei $e_1, e_2, \ldots, e_n$ eine Orthonormalbasis des euklidischen Vektorraums V. Dann gilt:*

(1) *Für jedes $v \in V$ gilt $v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i$.*

(2) $|| \sum_{i=1}^n x_i e_i || = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

(3) $\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Beweis. Die Beweise ergeben sich durch direktes Ausrechnen. □