Prof. Dr. Helmut Lenzing
Dr. Dirk Kussin, Markus Diekämper, Marc Jesse

Paderborn, den 16. Juni 2004
Abgabe bis Mi 23. Juni, 9:00 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Sommersemester 2004
Blatt 9

AUFGABE 33 (4 Punkte)**:**

$$A = \begin{pmatrix} 23/16 & 0 & 3\sqrt{3}/8 & -9\sqrt{3}/16 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3\sqrt{3}/8 & 0 & 5/4 & 9/8 \\ -9\sqrt{3}/16 & 0 & 9/8 & 5/16 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

Man bestimme eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A. (Relevante Rechnungen sind explizit auszuführen.)

AUFGABE 34 (4 Punkte)**:**
Sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch, und alle (reellen) Eigenwerte von A seien ≥ 0. Man zeige: Es gibt eine symmetrische Matrix $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ mit $A = B^2$. Gilt dies auch, wenn A einen negativen Eigenwert hat?

AUFGABE 35 (4 Punkte)**:**
Man bestimme alle symmetrischen Matrizen $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, die 2 als einzigen Eigenwert haben.

AUFGABE 36 (4 Punkte)**:**
Sei $A \in \mathrm{O}(3)$ mit zugehöriger orthogonaler Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

(1) Man zeige, dass jedes A zumindest 1 oder -1 als Eigenwert hat.

(2) Sei $x \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 bzw. -1. Sei $U = \langle x \rangle$. Man zeige, dass U und $U^\perp$ beide f-stabil sind.

(3) Sei $A \in \mathrm{SO}(3)$. Man zeige: Ist -1 ein Eigenwert von A, so gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^3$, bzgl. der f dargestellt wird durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & \\ & B \end{pmatrix}$$

mit $B \in \mathrm{O}(2)$ und die Spur von B (d. h. die Summe der Hauptdiagonalelemente) $= 0$ ist. Man folgere daraus: Es ist 1 ein Eigenwert von A.

Abgabeort: Grüne Kästen 109 (Gruppen 1+2) und 111 (Gruppen 3+4)