Prof. Dr. Helmut Lenzing
Dr. Dirk Kussin, Markus Diekämper, Marc Jesse

Paderborn, den 26. Mai 2004
Abgabe bis Mi 2. Juni, 9:00 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Sommersemester 2004
Blatt 6

AUFGABE 21 (4 Punkte)**:**
Sei $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ der Endomorphismus, der bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Man bestimme für alle natürlichen Zahlen i Basen und die Dimensionen von $\mathrm{Kern}(f^i)$ und $\mathrm{Bild}(f^i)$. Für welche i gilt $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Kern}(f^i) \oplus \mathrm{Bild}(f^i)$?

AUFGABE 22 (4 Punkte)**:**
Sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -4 & -12 \\ 10 & -4 & -12 \\ 5 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bzgl. welcher f dargestellt wird durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Man begründe seine Vorgehensweise. Vgl. auch Aufg. 14.)

AUFGABE 23 (4 Punkte)**:**
Sei $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $x \mapsto Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 17 & 16 \\ 16 & 8 & 27 & 24 \\ 16 & 6 & 29 & 23 \\ -29 & -11 & -49 & -41 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bzgl. welcher f dargestellt wird durch $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

AUFGABE 24 (4 Punkte)**:**
Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und f ein Endomorphismus.

1. Es habe f mindestens zwei verschiedene Eigenwerte. Ist f zerlegbar?

2. Sei f zerlegbar. Besitzt f dann mindestens zwei Eigenwerte?

3. Es gelte $\dim_{\mathbb{C}} V \geq 2$, und f habe genau einen Eigenwert λ. Ist f zerlegbar, falls die geometrische Vielfachheit von λ strikt größer als 1 ist?

4. Unter der Voraussetzung von 3., ist f unzerlegbar, falls die geometrische Vielfachheit von λ gleich 1 ist?

(Alle Antworten sind zu begründen.)

Abgabeort: Grüne Kästen 109 (Gruppen 1+2) und 111 (Gruppen 3+4)