Prof. Dr. Helmut Lenzing
Dr. Dirk Kussin, Markus Diekämper, Marc Jesse

Paderborn, den 27. April 2004
Abgabe bis Mi 5. Mai, 9:00 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Sommersemester 2004
Blatt 2

AUFGABE 5 (4 Punkte)**:**
(1) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basen $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \dots, b'_n)$, seien φ_B, $\varphi_{B'} : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ die Isomorphismen wie in Aufgabe 2. Sei $P = T_{B,B'}$ die Basiswechselmatrix, also mit $\varphi_B(x) = \varphi_{B'}(Px)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "x \mapsto Px"] \arrow[d, "\varphi_B"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\varphi_{B'}"] \\ V \arrow[r, "1_V"] & V \end{tikzcd}$$

Man zeige, dass P invertierbar ist und $P^{-1} = T_{B',B}$.
(2) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und B die Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ von $V = \mathbb{R}^3$. Sei $f : V \longrightarrow V$, $x \mapsto Ax$. Man bestimme die Darstellungsmatrix $M_{B,B}(f)$.

AUFGABE 6 (4 Punkte)**:**
Im euklidischen Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ seien $a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben. Man finde eine Orthonormalbasis von $U = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. Man ergänze die gefundene Orthonormalbasis von U zu einer Orthonormalbasis von V; auf wieviele Weisen kann man das tun?

AUFGABE 7 (4 Punkte)**:**
(1) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Man zeige: A ist orthogonal genau dann, wenn $a^2 + b^2 = 1$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ oder $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ gilt.
(2) Man zeige, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

orthogonal ist. Was ist die geometrische Interpretation von $D(\alpha)$? Man zeige $D(\alpha+\beta) = D(\alpha)D(\beta)$ für alle α, $\beta \in \mathbb{R}$. Man gebe eine orthogonale Matrix in $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ an, die nicht von der Form $D(\alpha)$ ist.
(3) Man zeige, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

orthogonal ist.

AUFGABE 8 (4 Punkte)**:**
Sei V ein euklidischer Vektorraum und $q_1, \ldots, q_m$ ein Orthonormalsystem. Man zeige, dass für jedes $x \in V$ gilt

$$\sum_{i=1}^{m} |\langle x, q_i \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle,$$

und hierin steht das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $x \in \langle q_1, \ldots, q_m \rangle$ ist.

Abgabeort: Grüne Kästen 109 (Gruppen 1+2) und 111 (Gruppen 3+4)