Prof. Dr. Helmut Lenzing
Dr. Dirk Kussin, Markus Diekämper, Marc Jesse

Paderborn, den 14. Juli 2004
Abgabe bis Mi 21. Juli, 9:00 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Sommersemester 2004
Blatt 13

AUFGABE 49 (4 Punkte)**:**
Sei V ein unitärer Vektorraum und f ein Endomorphismus. f heißt *partiell unitär*, falls es einen Unterraum U von V gibt, so dass $||f(x)|| = ||x||$ gilt für alle $x \in U$ und $f(y) = 0$ für alle $y \in U^\perp$. Man zeige:

(1) Ist f partiell unitär und λ ein Eigenwert, so gilt $|\lambda| \leq 1$.

(2) Man gebe ein Beispiel an ($\dim V = 2$ genügt) für einen partiell unitären Endomorphismus, welcher $1/2$ als Eigenwert besitzt. (Mit Erläuterung!)

AUFGABE 50 (4 Punkte)**:**
Seien X, Y und Z endlichdimensionale K-Vektorräume und $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ lineare Abbildungen mit $g \circ f = 0$. (Es folgt $\mathrm{Bild}(f) \subset \mathrm{Kern}(g)$.) Man zeige

$$\dim X - \dim Y + \dim Z = \dim \mathrm{Kern}(f) - \dim\big(\mathrm{Kern}(g)/\,\mathrm{Bild}(f)\big) + \dim\big(Z/\,\mathrm{Bild}(g)\big).$$

AUFGABE 51 (4 Punkte)**:**
Für K-Vektorräume V und W sei $\mathrm{Hom}(V,W)$ der K-Vektorraum der linearen Abbildungen $f : V \longrightarrow W$. Sei V endlichdimensional und $U \subset V$ ein Unterraum, sowie $i : U \longrightarrow V$, $i(x) = x$ für alle $x \in U$ die Inklusionsabbildung. Sei $\rho : \mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U,W)$, $f \mapsto f \circ i$. Es ist $F = \{f \in \mathrm{Hom}(V,W) \mid f \circ i = 0\}$ ein Unterraum von $\mathrm{Hom}(V,W)$.

Man zeige: Die Vektorräume $\mathrm{Hom}(V,W)/F$ und $\mathrm{Hom}(U,W)$ sind isomorph.

AUFGABE 52 (4 Punkte)**:**
Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$. Sei $x \in [0, 1]$ und U_x der Unterraum, der aus den $f \in V$ mit $f(x) = 0$ besteht. Man bestimme V/U_x.

(HINWEIS: Man wende den Homomorphiesatz an.)

Klausur: Die Klausur findet statt am Fr, 30. Juli 2004, von 8:00 bis 10:00 Uhr im Hörsaal C1.

Abgabeort: Grüne Kästen 109 (Gruppen 1+2) und 111 (Gruppen 3+4)