Prof. Dr. Helmut Lenzing
Dr. Dirk Kussin, Markus Diekämper, Marc Jesse

Paderborn, den 30. Juni 2004
Abgabe bis Mi 7. Juli, 9:00 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Sommersemester 2004
Blatt 11

AUFGABE 41 (4 Punkte)**:**
Sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch. Sei $\langle -, - \rangle$ die symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$, die durch $\langle x, y \rangle = x^{tr} A y$ definiert ist. Man zeige, dass $\langle -, - \rangle$ positiv definit ist genau dann, wenn alle Eigenwerte von A größer als null sind.

AUFGABE 42 (4 Punkte)**:**
Sei $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $q(x, y) = \frac{13}{2}x^2 - 5xy + \frac{13}{2}y^2$. Man beschreibe die Menge

$$E = \{(x,\, y) \mid q(x,\, y) = 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

geometrisch. Welche Bedeutung haben dabei die Eigenvektoren und die Eigenwerte (bzw. die Werte $1/\sqrt{\lambda}$ für Eigenwerte λ)?

AUFGABE 43 (4 Punkte)**:**
Man untersuche, ob die folgenden Matrizen unitär sind und berechne jeweils eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren.

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 2/\sqrt(5) & i/\sqrt(5) & 0 \\ i/\sqrt(5) & 2/\sqrt(5) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (ii) \quad \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 44 (4 Punkte)**:**
(1) Sei $f : V \longrightarrow V$ ein unitärer Endomorphismus des unitären Vektorraums V, und es gelte, dass $\{0\}$ und V die einzigen f-stabilen Unterräume sind. Man zeige, dass $f = \lambda \cdot 1_V$ gilt für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.

(2) Sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ unitär, seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte von A. Man zeige, dass $(A - \lambda_1 E_n) \cdot \ldots \cdot (A - \lambda_r E_n) = 0$ gilt.

Abgabeort: Grüne Kästen 109 (Gruppen 1+2) und 111 (Gruppen 3+4)