Prof. Dr. Helmut Lenzing
Dr. Dirk Kussin, Markus Diekämper, Marc Jesse

Paderborn, den 23. Juni 2004
Abgabe bis Mi 30. Juni, 9:00 Uhr

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra II

Sommersemester 2004

Blatt 10

AUFGABE 37 (4 Punkte)**:**
(1) Sei f ein Endomorphismus vom $\mathbb{R}^2$ (gegeben durch eine Matrix $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$) ohne reelle Eigenwerte. Man zeige, dass es eine Basis von $\mathbb{R}^2$ gibt bzgl. welcher f dargestellt wird durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

mit a, $b \in \mathbb{R}$, wobei $b \neq 0$.
(2) Man diskutiere, ob es ein ähnliches Ergebnis gibt, falls f reelle Eigenwerte hat.
(3) Man finde eine solche Basis für den Endomorphismus, der durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

AUFGABE 38 (4 Punkte)**:**
Man berechne jeweils für die orthogonalen Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, die durch die folgenden Matrizen gegeben sind, Orthonormalbasen, die die Normalform von f liefern, und gebe diese Normalformen an:

$$(i) \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (ii) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi/3 & \sin\pi/3 \\ 0 & \sin\pi/3 & -\cos\pi/3 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 39 (4 Punkte)**:**
Sei $K = \mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen. Sei $f : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^3$ der durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

gegebene Endomorphismus.

(1) Man zeige, dass es keine f-stabilen Unterräume der Dimension 1 und 2 gibt.

(2) Sei g ein Endomorphismus von $\mathbb{Q}^3$ mit $g \circ f = f \circ g$. Man zeige, dass g bijektiv ist und $g^{-1} \circ f = f \circ g^{-1}$ gilt. (Es folgt, dass die Gesamtheit dieser g einen Körper bildet.)

AUFGABE 40 (4 Punkte)**:**
Sei $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ die quadratische Form $q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 11z^2 + 6xz + 2yz$. Man untersuche, ob es x, y, $z \in \mathbb{R}$ gibt, die nicht alle $= 0$ sind, mit $q(x, y, z) \leq 0$.

Abgabeort: Grüne Kästen 109 (Gruppen 1+2) und 111 (Gruppen 3+4)