Prof. Dr. Helmut Lenzing
Dr. Dirk Kussin, Markus Diekämper, Marc Jesse

Paderborn, den 20. April 2004
Abgabe bis Mi 28. April, 9:00 Uhr

# Übungen zur Vorlesung
# **Lineare Algebra II**
## Sommersemester 2004
## Blatt 1

**AUFGABE 1** (4 Punkte)**:**
Man berechne

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

(Lösungsweg muss nachvollziehbar sein!)

**AUFGABE 2** (4 Punkte)**:**
(a) Seien $A$, $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, wobei $P$ invertierbar ist. Man zeige

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A).$$

(b) Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$, sei $\varphi_B : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ der Isomorphismus mit $\varphi_B(e_i) = b_i$ ($i = 1, \ldots, n$) (wobei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ ist). Sei $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Sei $A = M_B(f) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ die Matrix mit $f \circ \varphi_B(x) = \varphi_B(Ax)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "x \mapsto Ax"] \arrow[d, "\varphi_B"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\varphi_B"] \\ V \arrow[r, "f"] & V \end{tikzcd}$$

Definiere die Determinante von $f$ durch $\det(f) \overset{def}{=} \det(A)$. Man zeige, dass $\det(f)$ unabhängig von der gewählten Basis $B$ ist.

**AUFGABE 3** (4 Punkte)**:**
Seien $A$, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Man zeige:

$$\begin{vmatrix} E_n & B \\ -B & A \end{vmatrix} = |A + B^2|.$$

(Hinweis: Man multipliziere $\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ B & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & B \\ -B & A \end{pmatrix}$.) Man zeige, dass $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - BC|$ ($A$, $B$, $C$, $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$) i. a. nicht gilt.

**AUFGABE 4** (4 Punkte)**:**
Sei $\langle x, y \rangle = |x||y| \cos \sphericalangle(x, y)$ das Skalarprodukt im Anschauungsraum. Sei $L = v + \mathbb{R}w$ ($w \neq 0$) eine Gerade und $x \notin L$ ein Punkt im Anschauungsraum. Man zeige: Es gibt einen eindeutig bestimmten Punkt $y \in L$ mit $|x - y| < |x - z|$ für alle $z \in L$ mit $z \neq y$; es gilt außerdem $\langle x - y, z_1 - z_2 \rangle = 0$ für alle $z_1$, $z_2 \in L$. (Hinweis: Zunächst für den Spezialfall $v = 0$.)

**Abgabeort:** Kasten wird noch bekanntgegeben.