Beispiel zur Berechnung der Jordanschen Normalform

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_6(\mathbb{R}).$$

Sei $f : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$, $x \mapsto Ax$ die zugehörige lineare Abbildung. Wir berechnen eine Basis B von $V = \mathbb{R}^6$ (bzw. ein $P \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{R})$), so dass $M_B(f)$ (bzw. $P^{-1}AP$) eine Jordansche Normalform ist.

Man berechnet das charakteristische Polynom:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^6 - 9\lambda^5 + 33\lambda^4 - 63\lambda^3 + 66\lambda^2 - 36\lambda + 8 = (\lambda - 1)^3(\lambda - 2)^3.$$

Damit zerfällt χ_A, also ist A ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform. $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ sind die Eigenwerte von A.

Da hier 3 die algebraische Vielfachheit von λ_1 und λ_2 ist, berechnet man die Unterräume $H(1) = \mathrm{Kern}((f - \lambda_1 \,\mathrm{id})^3)$ und $H(2) = \mathrm{Kern}((f - \lambda_2 \,\mathrm{id})^3)$. Es gilt $\mathbb{R}^6 = H(1) \oplus H(2)$, und $H(1)$ und $H(2)$ sind f-stabile Unterräume von $\mathbb{R}^6$ (Hauptraumzerlegung).

Seien $f_1 : H(1) \longrightarrow H(1)$, $x \mapsto f(x)$ bzw. $f_2 : H(2) \longrightarrow H(2)$, $x \mapsto f(x)$ die Einschränkungen von f auf die Haupträume.

Es ist

$$(A - E_6)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die dazu gehörige Treppenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man erhält, dass $B_{13} : e_1, e_2, e_6$ eine Basis von $H(1)$ ist. (Hierbei bezeichnet $e_1, e_2, \ldots, e_6$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^6$.) Wegen

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & 2e_2 - e_6 \\ f(e_2) & = & e_2 \\ f(e_6) & = & e_1 - e_2 + 2e_6 \end{array}$$

ist

$$A_1 = M_{B_{13}}(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sei $g_1 = f_1 - \lambda_1 \operatorname{id} : H(1) \longrightarrow H(1)$. Offenbar ist 0 der einzige Eigenwert von g_1, und daher ist g_1 nilpotent. Damit

$$C_1 := A_1 - E_3 = M_{B_{13}}(g_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$C_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und $C_1^3 = 0$. Man berechnet $U_{1i} = \operatorname{Kern}(g_1^i)$ und Basen davon:

$$\{0\} = U_{10} \subset U_{11} \subset U_{12} \subset U_{13} = H(1).$$

Die Treppenmatrizen zu C_1 und C_1^2 sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher erhält man als Basis $B_{11} : e_2$ von U_{11} und $B_{12} : e_2, e_1 + e_6$ von U_{12}.

Nun ergänzt man B_{12} z. B. mittels e_1 zu einer Basis von U_{13}. Dann bildet $B_{11} \cup \{g_1(e_1)\}$ in U_{12} ein linear unabhängiges System und wegen $\dim U_{12} = 2$ eine Basis. Es ist also keine Ergänzung mehr notwendig. $g_1^2(e_1)$ bildet eine Basis von U_{11}. Es ist $g_1(e_1) = -e_1 + 2e_2 - e_6$ und $g_1^2(e_1) = -e_2$. Daher ist $B_1 : e_1, -e_1 + 2e_2 - e_6, -e_2$ eine Basis von $H(1)$, bzgl. derer g_1 (bzw. f_1) dargestellt wird durch

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (bzw. } \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{).}$$

Wir haben noch $H(2)$ zu behandeln: Es ist

$$(A-2E_6)^3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 9 & -1 & -1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Treppenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist $B_{22} : e_2 - e_3, e_4, e_5$ eine Basis von $H(2)$. Wegen

$$\begin{aligned} f(e_2-e_3) &= 2(e_2-e_3) \\ f(e_4) &= -(e_2-e_3)+2e_4 \\ f(e_5) &= 2e_5 \end{aligned}$$

ist

$$A_2 = M_{B_{22}}(f_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sei $g_2 = f_2 - \lambda_2 \,\mathrm{id} : H(2) \longrightarrow H(2)$. Offenbar ist 0 der einzige Eigenwert von g_2, und daher ist g_2 nilpotent. Damit

$$C_2 := A_2 - E_3 = M_{B_{22}}(g_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $C_2^2 = 0$. Man berechnet $U_{2i} = \mathrm{Kern}(g_2^i)$ und Basen davon:

$$\{0\} = U_{20} \subset U_{21} \subset U_{22} = H(2).$$

Die Treppenmatrizen zu C_2 ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher erhält man als Basis $B_{21} : e_2 - e_3, e_5$ von U_{21}.

Man ergänzt nun B_{21} z. B. mittels e_4 zu einer Basis von U_{22}. Dann ist $g_2(e_4) = -(e_2 - e_3)$ in U_{21} linear unabhängig und kann z. B. mittels e_5

zu einer Basis von U_{22} ergänzt werden. Man erhält also: Bzgl. der Basis $B_2 : e_4, -e_2 + e_3, e_5$ wird g_1 (bzw. f_1) dargestellt durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & \\ 1 & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \quad).$$

Setzt man nun die gefunden Basen B_1 von $H(1)$ und B_2 von $H(2)$ zu einer Basis B zusammen, so erhält man: Bzgl. der Basis

$$B : e_1, -e_1 + 2e_2 - e_6, -e_2, e_4, -e_2 + e_3, e_5$$

wird f dargestellt durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & 1 & 2 & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Setzt man die Basisvektoren als Spalten zu einer (invertierbaren) Matrix P zusammen, so erhält man

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

damit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & 1 & 2 & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$