

**Lösung zu Aufgabe 29:
Berechnung der Jordanschen Normalform**

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 32 & 3 & 15 & -77 \\ 0 & 1 & -10 & 0 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{R}).$$

Sei $f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$, $x \mapsto Ax$ die zugehörige lineare Abbildung. Wir berechnen eine Basis B von $V = \mathbb{R}^6$ (bzw. ein $P \in GL_6(\mathbb{R})$), so dass $M_B(f)$ (bzw. $P^{-1}AP$) eine Jordansche Normalform ist.

Man berechnet das charakteristische Polynom:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^6 - 8\lambda^5 + 10\lambda^4 + 60\lambda^3 - 135\lambda^2 - 108\lambda + 324 = (\lambda + 2)^2(\lambda - 3)^4.$$

Damit zerfällt χ_A , also ist A ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform. $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 3$ sind die Eigenwerte von A .

Da hier 2 die algebraische Vielfachheit von λ_1 und 4 die algebraische Vielfachheit von λ_2 ist, berechnet man die Unterräume

$$H(-2) = \text{Kern}((f - \lambda_1 \text{id})^2)$$

und

$$H(3) = \text{Kern}((f - \lambda_2 \text{id})^4).$$

Es gilt $\mathbb{R}^6 = H(-2) \oplus H(3)$, und $H(-2)$ und $H(3)$ sind f -stabile Unterräume von \mathbb{R}^6 (Hauptraumzerlegung).

Seien $f_1 : H(-2) \rightarrow H(-2)$, $x \mapsto f(x)$ bzw. $f_2 : H(3) \rightarrow H(3)$, $x \mapsto f(x)$ die Einschränkungen von f auf die Haupträume.

Es ist

$$(A + 2E_6)^2 = \begin{pmatrix} 25 & 25 & -10 & 0 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 50 & 170 & 25 & 75 & -428 \\ 0 & 0 & -50 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

Die dazu gehörige Treppenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist somit

$$\begin{aligned}
 H(-2) &= \text{Kern}((f + 2\text{id})^2) \\
 &= \{x \in \mathbb{R}^6 \mid (f + 2\text{id})^2(x) = 0\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R}^6 \mid (A + 2E_n)^2 x = 0\} \\
 &= \left\{x \in \mathbb{R}^6 \mid x = r \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } r, s \in \mathbb{R}\right\}
 \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die beiden Vektoren jeweils mit -2 und erhalten

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $B_{12} := (v_1, v_2)$ eine geordnete Basis von $H(-2)$. Wegen

$$\begin{aligned}
 f_1(v_1) = f(v_1) &= Av_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \\
 f_1(v_2) = f(v_2) &= Av_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \\ 9 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{9}{2}v_1 - \frac{7}{2}v_2
 \end{aligned}$$

ist

$$A_1 = M_{B_{12}}(f_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Sei $g_1 = f_1 - \lambda_1 \text{id} : H(-2) \rightarrow H(-2)$. Offenbar ist 0 der einzige Eigenwert von g_1 , und daher ist g_1 nilpotent. Damit

$$C_1 := A_1 + 2E_2 = M_{B_{12}}(g_1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$C_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet $U_{1i} = \text{Kern}(g_1^i)$ und Basen davon:

$$\{0\} = U_{10} \subset U_{11} \subset U_{12} = H(-2).$$

Die Treppenmatrix zu C_1 ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten hieraus den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Hieraus erhält

man den Vektor $v := 3v_1 - 1v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Basis B_{11} von U_{11} .

Nun ergänzt man B_{11} z. B. mittels v_1 zu einer Basis von U_{12} . Desweiteren ist

$$g_1(v_1) = (f_1 + 2 \text{id})(v_1) = (f + 2 \text{id})(v_1) = (A + 2E_n)v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\{g_1(v_1)\}$ ist in U_{11} linear unabhängig und wegen $\dim U_{11} = 1$ eine Basis von U_{11} . Es ist also keine Ergänzung mehr notwendig. Insgesamt folgt also, dass $B_1 = (v_1, g_1(v_1))$ wieder eine Basis von $H(-2)$ ist. Bzgl. dieser wird g_1 (bzw. f_1) dargestellt durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (bzw. } \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{)}.$$

Wir haben noch $H(3)$ zu behandeln: Es ist

$$(A - 3E_6)^4 = \begin{pmatrix} 0 & -625 & 0 & 0 & 0 & 1250 \\ 0 & 625 & 0 & 0 & 0 & -1250 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & -3750 & 0 & -1875 & 7000 \\ 0 & -500 & 1250 & 0 & 625 & -1500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Treppenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Seien } w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } w_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist $B_{23} := (w_1, w_2, w_3, w_4)$ eine geordnete Basis von $H(3)$. Wegen

$$f_2(w_1) = f(w_1) = Aw_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3w_1 + 0w_2 + 0w_3 + 0w_4$$

$$f_2(w_2) = f(w_2) = Aw_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0w_1 + 3w_2 + 0w_3 + 0w_4$$

$$f_2(w_3) = f(w_3) = Aw_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}w_1 - 1w_2 + 3w_3 + 0w_4$$

$$f_2(w_4) = f(w_4) = Aw_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1w_1 + 1w_2 - 2w_3 + 3w_4$$

ist

$$A_2 = M_{B_{23}}(f_2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sei $g_2 = f_2 - \lambda_2 \text{id} : H(3) \rightarrow H(3)$. Offenbar ist 0 der einzige Eigenwert von g_2 , und daher ist g_2 nilpotent. Damit

$$C_2 := A_2 - 3E_4 = M_{B_{23}}(g_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$C_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$C_2^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet $U_{2i} = \text{Kern}(g_2^i)$ und Basen davon:

$$\{0\} = U_{20} \subset U_{21} \subset U_{22} \subset U_{23} = H(3).$$

Die Treppenmatrizen zu C_2 und C_2^2 sind

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher erhält man als Basen $B_{21} := \{w_1, w_2\}$ von U_{21} sowie $B_{22} := \{w_1, w_2, w_3\}$ von U_{22} .

Man ergänzt nun B_{22} z. B. mittels w_4 zu einer Basis von U_{23} .

Dann ist

$$g_2(w_4) = (f_2 - 3\text{id})(w_4) = (f - 3\text{id})(w_4) = (A - 3E_4)w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$B_{21} \cup \{g_2(w_4)\}$ ist dann ein linear unabhängiges System in U_{22} und wegen $\dim U_{22} = 3$ eine Basis von U_{22} .

Desweiteren ist

$$g_2^2(w_4) = (f_2 - 3\text{id})(w_4) = (f - 3\text{id})(w_4) = (A - 3E_4)^2 w_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $B_{20} \cup \{g_2^2(w_4)\} = \{g_2^2(w_4)\}$ ist linear unabhängig in U_{21} . Da $\dim U_{21} = 2$ ist, müssen wir $\{g_2^2(w_4)\}$ mittels eines hierzu linear unabhängigen Vektors aus U_{21} ergänzen. Z. B. ist dann $\{g_2^2(w_4), w_1\}$ eine Basis von U_{21} .

Insgesamt erhalten wir hieraus die geordnete Basis

$$B_2 := (w_4, g_2(w_4), g_2^2(w_4), w_1),$$

bezüglich welcher g_2 (bzw. f_2) dargestellt wird durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}).$$

Setzt man nun die gefundenen Basen B_1 von $H(-2)$ und B_2 von $H(3)$ zu einer Basis B zusammen, so erhält man: Bzgl. der Basis

$$B := (v_1, g_1(v_1), w_4, g_2(w_4), g_2^2(w_4), w_1)$$

wird f dargestellt durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ 1 & -2 & & & & \\ & & 3 & & & \\ & & 1 & 3 & & \\ & & & 1 & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}.$$

Setzt man die Basisvektoren als Spalten zu einer (invertierbaren) Matrix P zusammen, so erhält man

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

damit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -7 \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -7 \end{pmatrix}$$

und

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ 1 & -2 & & & & \\ & & 3 & & & \\ & & 1 & 3 & & \\ & & & 1 & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}.$$