aus: Bräu,K.; Schwerdt, U.(Hg.): Heterogenität als Chance. Münster. Lit Verlag 2005
S.219-238

Hartmut Spiegel/ Meike Walter

Heterogenität im Mathematikunterricht der Grundschule

1. Vorbemerkung

Dieser Aufsatz erhebt nicht den Anspruch einer Synopse des gegenwärtigen Forschungs- und Diskussionsstandes in der Didaktik der Mathematik, sondern betont spezifische Aspekte der Wahrnehmung von und des Umgangs mit Heterogenität im Mathematikunterricht, die im Rahmen der Forschungsarbeiten der AutorInnen während der vergangenen Jahre eine besondere Rolle gespielt haben. Mit dem Begriffspaar: „vertikal-horizontal" greifen wir zwei Dimensionen von Heterogenität heraus. Dabei sind wir uns bewusst, dass wir damit andere Dimensionen von Heterogenität außer Acht lassen. Wenn es uns gelingt, Leserinnen und Leser für einige ihnen bisher nicht so vertraute Aspekte dieses Themas zu sensibilisieren und ihnen zusätzlich einen Zugang zu Quellen zu ermöglichen, mit Hilfe derer sie ihre „Heterogenitätskompetenz" weiterentwickeln können, dann hat der Text seinen Zweck erfüllt.

Vertikale Heterogenität

Zum einen unterscheiden sich Kinder hinsichtlich ihres Leistungsniveaus – angesiedelt innerhalb des Spektrums zwischen sehr leistungsschwach und sehr leistungsstark. Dafür scheint uns die Metapher „vertikale Heterogenität" passend: die Leistungen der Kinder sind verteilt zwischen „unten" und „oben". Dass das so ist, ist keine neue Erkenntnis.

Je nach vorherrschendem Trend wurde diese Dimension von Heterogenität in der Vergangenheit mal mehr und mal weniger in der Öffentlichkeit diskutiert. Derzeit scheint es die einzige Dimension von Heterogenität zu sein, die in der öffentlichen Diskussion um Bildung wahrgenommen wird – man denke an die Debatten um TIMMS, PISA und IGLU. Die so genannte „Dyskalkulie" hat ebenso Hochkonjunktur wie die Sorge um mangelnde Wahrnehmung von und den angemessenen Umgang mit„Hochbegabung". Die mathematikdidaktische Forschung und Entwicklung der letzten Jahrzehnte hat zum Thema Leistungsheterogenität viele Beiträge geliefert - angefangen mit dem Versuch, die Faktoren, die solche Unterschiede bedingen können, näher zu beschreiben, bis hin zu konkreten Vorschlägen, wie man adäquat damit umgeht.

Horizontale Heterogenität

Die Kinder unterscheiden sich aber auch – und das ist nicht unbedingt eine Frage des Leistungsniveaus – hinsichtlich ihrer Vorgehensweisen: Kinder denken anders als andere Kinder. (Erwachsene denken übrigens auch anders als andere Erwachsene und anders als Kinder). Und sie denken anders, als Erwachsene das vermuten oder möchten. Für dieses Phänomen verwenden wir die Bezeichnung: „horizontale Heterogenität“.

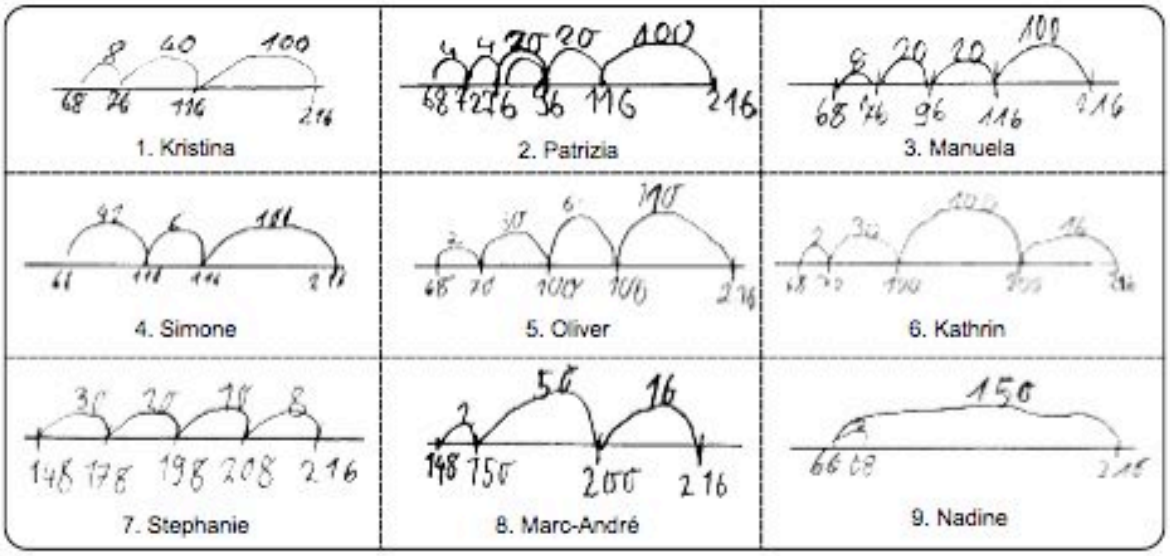
Zur detaillierten Beschreibung der horizontalen Heterogenität hat es im Laufe der letzten beiden Jahrzehnte zahlreiche Forschungsarbeiten gegeben, insbesondere auch an der Universität Paderborn unter ganz wesentlicher Beteiligung von Studierenden (vgl. SPIEGEL/SELTER 1997a). In der Unterrichtspraxis wird diese Heterogenität häufig nicht genügend berücksichtigt und sie bedeutet allerdings auch eine nicht zu unterschätzende Herausforderung an die Lehrpersonen. Letztlich kann unangemessener Umgang mit horizontaler Heterogenität auch Ursache für die Entstehung von Leistungsunterschieden im Sinne vertikaler Heterogenität werden. Aus diesem Grunde werden wir im Folgenden einige auch schon an anderer Stelle publizierte Beispiele darstellen.

2. Kinder denken anders als andere Kinder – Vom Umgang mit horizontaler Heterogenität

Die Kino-Aufgabe

Schüler eines dritten Schuljahres bearbeiteten die Aufgabe „Im Kino können 216 Personen sitzen. Es sind schon 148 Personen da. Wie viele Plätze sind noch frei?“ Sie sollten ihre Vorgehensweise mit Hilfe des sog. Rechenstrichs darstellen (vgl. SPIEGEL/SELTER 2003a). Dabei handelt es sich um einen von den Kindern zu zeichnenden Strich, auf dem sie ihre Rechenschritte festhalten können. Die folgende Abbildung gibt einige der Lösungen wieder.[1] Insgesamt ließen sich bei 27 Kindern nicht weniger als 22 verschiedene Herangehensweisen beobachten.

[1] Wer alle von den Kindern produzierten Lösungen kennen lernen möchte, findet sie in SPIEGEL/SELTER (1997, S. 64).



Kristina zog zunächst die Hunderter, dann die Zehner und schließlich die Einer ab (216–100–40–8), während *Patrizia* (216–100–20–20–4–4) und *Manuela* (216–100–20–20–8) Zehner bzw. Einer weiter aufsplitteten. Eine andere Strategie bestand darin, die 148 so aufzuspalten, dass ‚glatte' Zahlen als Zwischenergebnisse dienten (*Simone*: 216–100–6–42; *Oliver*: 216–110–6–30–2; *Katrin*: 216–16–100–30–2). Andere Schüler ergänzten, so etwa *Ste*phanie, die zuerst die Zehner und dann die Einer auffüllte (148+30+20+10+8), oder auch *Marc-André*, der dabei ‚glatte' Zwischenergebnisse ausnutzte (148+2+50+16). Schließlich zog *Nadine* eine einfachere Aufgabe (216–150) heran, um die ursprüngliche Aufgabe zu lösen.

Eine solche Vielfalt von Denkwegen wird man nur in Klassen beobachten können, in denen die Lehrerin die Kinder ermutigt, von ihrem eigenen Denken Gebrauch zu machen und ihnen dafür genügend Werkzeuge und Spielräume zur Verfügung stellt. Ein passendes Werkzeug ist hier zweifelsohne der Rechenstrich, mit Hilfe dessen die Kinder unterschiedliche Wege leichter finden, gehen und darstellen können als mit Hilfe der konventionellen Notierung in Gleichungsform. Man kann auch davon ausgehen, dass die Kinder jeweils den Weg gewählt haben, der zu dem passt, was sie am besten können. Und das ist – gerade für weniger leistungsstarke Kinder – in der Regel erfolgreicher, als Vorschriften zu befolgen, die ihnen von der Lehrerin gemacht werden – oder von den Eltern. Das Beispiel gehört zum so genannten „halbschriftlichen Rechnen" - oder besser: zum schriftlich gestütztem Rechnen. Später werden die Kinder das Normalverfahren der schriftlichen Subtraktion erlernen, das ihnen keine Spielräume mehr lässt und nur ein rein mechanisches Befolgen der Regeln abverlangt. Es ist im Prinzip weniger anspruchsvoll als das Gehen eigener Wege, so dass sich häufig Eltern veranlasst fühlen, es den Kindern vorzeitig vorzumachen. Die damit verbundenen Gefahren – wiederum gerade für weniger leistungsstarke Kinder – bestehen darin, dass es zu Fehlern kommt, weil die Kinder die Regeln häufig nur teilweise umsetzen und dass sie das für das Kopfrechnen und das schriftlich gestützte Rechnen unverzichtbare Gefühl für die Größenordnung der Zahlen verlieren, da sie nur noch mit Ziffern zu rechnen brauchen.

Fazit: Lernschwierigkeiten in Mathematik können auch dadurch zustande kommen, dass Lehrpersonen zu früh und zu stark auf einheitliche Vorgehensweisen drängen. Dazu besteht kein Anlass, so lange die unterschiedlichen - jeweils der Vorliebe und den Fähigkeiten der einzelnen Kinder entsprechenden – Vorgehensweisen keine erhöhte Fehleranfälligkeit aufweisen. Das heißt nicht, dass man den Kindern nicht auch Standardverfahren anbieten sollte – aber erst, wenn sie genügend Verständnis und Sicherheit im Vorfeld dieser Verfahren erworben haben. Aus diesem Grund ist, z.B. in einigen Kantonen der Schweiz die Einführung der schriftlichen Standardverfahren der Addition und Subtraktion vom 3. auf das 4.Schuljahr verschoben worden.

Von der Normalität der horizontalen Heterogenität

Die meisten Erwachsenen gehen davon aus, dass andere so rechnen, wie sie selbst und dass es so am leichtesten für jedermann ist. Auch Lehrpersonen glauben zumeist, dass die von ihnen favorisierte Vorgehensweise die „natürliche" und die leichteste für die Kinder ist und drängen sie diesen dann nicht selten auf. Von dem Vorurteil, dass jeder so rechnet wie man selbst, kann man sich leicht befreien. Rechnen Sie zunächst selbst die Aufgabe 63 – □= 37 (63 minus wie viel gleich 37). Notieren Sie dann, wie Sie auf Ihr Ergebnis gekommen sind. Stellen Sie anschließend möglichst vielen anderen Personen diese Aufgabe und lassen sich sagen, wie diese gerechnet haben. Es wird ähnlich sein wie bei unseren Erkundungen: Wir haben mehrere Hundert Erwachsene gebeten, ihre Rechenwege zu dieser Aufgabe festzuhalten. Es ergaben sich nicht weniger als 19 unterschiedliche Vorgehensweisen. Sieben von ihnen haben wir aufgeführt. Ist Ihre Vorgehensweise auch dabei?

63-23=40 40-3=37 23+3=**26**	63-6=57 57-20=37 20+6=**26**	63-30=33 33+4=37 30-4=**26**	37+3=40 40+20=60 60+3=63 3+20+3=**26**	37+20=57 57+6=63 20+6=**26**	63-30=33 33-7=**26**	63-40=23 23+3=**26**

Auch Kindern haben wir diese Aufgabe gestellt. Im Folgenden sind Transkriptausschnitte aus Interviews mit 5 Drittklässlern wiedergegeben, denen diese Aufgabe entweder aufgeschrieben auf einem Blatt oder als Textaufgabe gestellt wurde. Überzeugen Sie sich selbst von der Unterschiedlichkeit der Vorgehensweisen und davon, wie schwer es sein kann, einen Rechenweg zu verstehen, wenn es nicht der eigene ist.

Moritz (63–□=37)

M: (*flüstert: 60 minus 30, das sind 30, 33 minus 7 sind ...nach insgesamt 33 Sekunden dann*) 26

...

I.: Mhm. Was hast du da gedacht?

M.: Da hab ich erst 60 minus 30.

I.: Mhm.

M.: Da habe ich das irgendwie noch ... musste ich das irgendwie ... 30, da muss ich erst dreiss ... drei minus ... 33 minus 7. Da hab ich erst minus drei und dann hab ich die 4

I.: Mhm. Und was hast du mit der 4 dann am Ende gemacht?

M.: Ja, die waren abgezogen.

Björn (63–□=37)

B.: (*nach 22 Sekunden*) 26

I.: Sagst Du mir, wie Du es gemacht hast?

B.: Ich hab erst, ähm, minus 20 von den 63, das waren, ähm, 43, und dann, ähm, minus 6

I.: Schön. Toll machst Du das. Gut.

Lennart (63–□=37; Sachaufgabe)

L.: Luftballonwettbewerb: Von 63 Kindern schickt jedes Kind einen ... einen Luftballon weg. 37 Kinder bekommen ... bekommen Antwort. Wie viele Kinder bekommen keine Antwort?

Hä? ... Ach so. (nach 34 Sekunden) 26

I.: Mhm. Sagst du mir, wie du es gemacht hast?

L.: Ich hab erst mal 30 dazugetan, dann waren es 67 und dann hab ich ... 4 noch weggetan, dann waren es 63

I.: Mhm. Schön.

Johannes (63–□=37)

J.: (*nach 2 Minuten, 5 Sekunden*) Sechsundzwan ... zig.

I.: Mhm. Wie hast du das gemacht?

J.: Äh, erst hab ich gedacht ... erst hab ich gar nichts gedacht, also da wusste ich selber nicht, wie ich das mache. Dann hab ich ... erst mal ... ich mach das so ... dann mach ich erst mal 63 minus 20, dann hatte ich erst mal 43 und das war zu

wenig,- zu viel, doch. Zuviel. Dann hab ich minus 3 gemacht,- das war immer noch ... zu ... viel, dann hab ich noch mal minus 3 gemacht.
I.: Mhm.
J.: Dann hatte ich jedenfalls 26 heraus.
I.: Gut, ist richtig.

Patrick (63–□=37; Sachaufgabe)

P.: Luftballonwettbewerb: Von 63 Kindern schickt jedes Kind einen Luftballon weg. 37 Kinder bekommen Antwort. Wie viele Kinder bekommen keine Antwort?
(*nach 1 Minute, 3 Sekunden*) 26 Kinder.
I.: Mhm. Richtig.
P.: Das habe ich ganz einfach gemacht: Ich habe erst ... ähm ... 63 minus 20 gerechnet, das waren ... das waren 53, nee ... oh ... ja, nee ... 43
I.: Mhm.
P.: 43, und dann habe ich ... äh, ja plus ... erst plus 5 gerechnet, das waren 38, noch plus 1 waren 37 [...]

Das, was Patrick sagt, wirkt beim ersten Hinsehen befremdlich, um nicht zu sagen: falsch. Ist es aber nicht: Patrick meint nicht: 43 + 5 = 38, sondern überlegt sich (natürlich nicht in dieser Formulierung) folgendes: Wenn ich zu der 20, die ich schon abgezogen habe, plus 5 rechne, also noch 5 mehr abziehe, bin ich bei 38. Und wenn ich dann noch mal einen mehr abziehe, bin ich bei 37. Also muss ich 20 + 5 +1 = 26 abziehen.

Vom Umgang mit horizontaler Heterogenität

Was sich im Sprachunterricht schon lange eingebürgert hat, nämlich: den kreativen Umgang der Kinder mit Sprache zuzulassen, das beginnt in analoger Weise erst ganz langsam auch im Mathematikunterricht der Grundschule Fuß zu fassen. Einer der Gründe dafür könnte sein, dass Mathematik nach Auffassung vieler Lehrpersonen ein System aus fest vorgegebenen und unveränderbaren Konventionen und Regeln ist, die gelernt und angewendet werden müssen. Wo ist da noch Spielraum für eigenes Denken und Kreativität? – so wie z.B. bei der Gestaltung von Texten.

Dass und wie man auch im Fach Mathematik angemessen mit horizontaler Heterogenität umgehen kann, ist in den folgenden beiden Zitaten genauer ausgeführt. Das erste stammt von Hans Brügelmann, dessen Verdienste um die diesbezügliche Weiterentwicklung des Sprachunterrichts unumstritten sind. Er äußert sich in seinem Text: „Macht Unterricht die Kinder dumm?“ wie folgt:

> „Unsere Schule macht einen doppelten Fehler: Sie unterfordert Kinder vom inhaltlichen Niveau der Aufgaben her, sei es der Inhalt von Fibeltexten oder

der Problemgehalt mathematischer Aufgaben. Zugleich überfordert sie die Kinder mit den formalen Anforderungen an die Lösung: Normalverfahren beim Addieren oder Dividieren, Orthografie beim Rechtschreiben, Fachbegriffe im Sachunterricht, die lateinische Ausgangsschrift beim Schreiben mit der Hand. Die Norm wird eingefordert, ehe die Kinder Zeit hatten, ihre persönlichen Vorstellungen zu entwickeln und auszutesten.
Das Gegenprogramm: von der Invention zur Konvention. Statt künstlicher Vereinfachung der Aufgaben „von oben" sollten wir Kinder ermutigen, sich der Komplexität ihrer Erfahrung zu stellen. Allerdings müssen wir ihnen dann Raum geben für die Vielfalt und das unterschiedliche Niveau der Lösungen, zu denen sie individuell fähig sind. Das bedeutet Vereinfachung „von unten", z. B. in Form von Fehlern beim lautorientierten Schreiben oder in Form umständlicher halbschriftlicher Lösungen beim Rechnen. Damit verändert sich die Rolle der Lehrerin erheblich: Sie räumt nicht vorweg Hindernisse aus dem Weg (‚Vereinfachung der Aufgabe'), sondern sie folgt den Kindern auf ihren Wegen und gibt ihnen Hilfe bei der Überwindung der Hindernisse" (BRÜGELMANN 1994, S. 5).

Wie das im Einzelnen geschehen kann, kann man in dem Aufsatz von Elmar HENGARTNER (1992) „Für ein Recht der Kinder auf ein eigenes Denken" nachlesen, indem er u.a. zum Thema „Lernen auf eigenen Wegen" schreibt:

„Die Leitidee ‚individuelles Lernen' meint, dass die Lehrerin die persönlichen Lernwege und individuellen Lösungsversuche der Kinder nicht nur wahrnimmt und zulässt, sondern sie bewusst unterstützt, zu ihrer Darstellung ermutigt und ihren Austausch unter den Kindern anregt. ‚Wie kommst du darauf?' ‚Wie hast du gerechnet?' ‚Was hast du dir überlegt?' Dies müssten im Unterricht unsere häufigsten Fragen an die Kinder sein. Die Amerikanerin Constance Kamii hat nach ihren Fallstudien in Unterstufenklassen zum aktiv entdeckenden Lernen (im Sinne von Piaget) die folgenden vier Prinzipien für das Lehren formuliert:

- Ermutige die Kinder, ihr eigenes Vorgehen (ihren eigenen Weg) zu (er)finden, statt ihnen zu zeigen, wie man Probleme löst.
- Ermutige die Kinder, viele verschiedene Lösungswege für dasselbe Problem zu finden.
- Verzichte auf Verstärkung richtiger Lösungen und auf Korrektur falscher Lösungen – stattdessen ermuntere die Kinder, ihre Versuche und Ansichten auszutauschen.
- Verlange von den Kindern nicht, dass sie alles aufschreiben. Schreibe für sie ihre Gedanken an die Tafel" (ebd.1992, S. 22).

3. Vom Umgang mit vertikaler Heterogenität

Das Projekt „Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte: Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht“

Vertikale Heterogenität ist kein neues Phänomen. Neu ist das öffentliche Interesse an diesem Thema, die Wahrnehmung von Defiziten im Umgang damit. Gezielte Bemühungen seitens der Fachdidaktik, Angebote für den Unterricht zu entwickeln, die Lehrpersonen helfen können, mit dieser Herausforderung adäquat umzugehen, gibt es schon länger. Hierzu gibt's es mittlerweile eine Fülle von Publikationen, die sich der besonderen Probleme der Kinder an beiden Enden des Leistungsspektrums annehmen und speziell auf diese zugeschnittene Förderungsangebote beinhalten.[2] Auch nicht ganz neu, aber in der jüngeren Vergangenheit wieder stärker ins Blickfeld geraten sind Konzepte, die auf „natürliche Differenzierung“ setzen. Hervorzuheben sind in diesem Zusammenhang das Projekt „mathe 2000“, das das Konzept der „natürlichen Differenzierung“ in das aus diesem Projekt hervorgegangenen Schulbuchwerk „Das Zahlenbuch“ einbringt, sowie das Projekt „Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte: Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht“[3] des Schweizer Mathematikdidaktikers Elmar Hengartner.

Ziel dieses von der Fachhochschule Pädagogik Aargau und der Stabsstelle Bildung des Kantons Basel-Landschaft 1999/2000 initiierten Projekts ist eine Entwicklung und Erprobung von Lernumgebungen, d.h. Aufgaben, die eine niedere Eingangsschwelle für langsamer lernende Kinder anbieten, die auch für Kinder mit Lernschwächen zugänglich sein sollen. Zugleich halten die gleichen Aufgaben dank ihrer Reichhaltigkeit aber auch Forderungen für schnell lernende und für mathematisch hochbegabte Kinder bereit. Mit Hilfe dieser Lernumgebungen soll eine natürliche Differenzierung durch die Kinder ermöglicht und damit dem Problem der Heterogenität besser Rechnung getragen werden.

Es werden zentrale Themenkreise des Mathematikunterrichts angegangen und integrativ innerhalb des Klassenunterrichts gelöst. Ausgangspunkt ist, dass auch die schwächeren Schüler einen Zugang zu einer Lernumgebung finden, jedoch für stärkere Schüler eine Bearbeitung der Problemstellung auf höherem Niveau möglich ist. Dabei dürfen die Kinder – im Sinne natürlicher Differenzierung – individuell das Aktivitätsniveau, die Lösungswege und Darstellungsweisen wählen und sollen diese auch untereinander austauschen.

[2] Näheres dazu findet man in den Kap. 8 und 9 von SPIEGEL/SELTER (2003).

[3] Vgl. http://www.mathe-projekt.ch (07.08.2003).

Lernumgebungen dieser Art werden dem breiten Leistungsspektrum innerhalb einer Klasse eher gerecht als streng durchgeplanter, kleinschrittiger Mathematikunterricht, der zudem noch für so genannte „Frührechner" keine Motivation bietet, sich mit dem Lernstoff auseinander zu setzen. Die entwickelten Lernumgebungen sollen auch der Lehrperson genügend Zeit für Beobachtung und individuelle Betreuung bieten.

Um einerseits das Anliegen der schon entwickelten bzw. noch zu entwickelnden Lernumgebungen detaillierter zu beschreiben, andererseits auch ein Werkzeug zur Verfügung zu stellen, Lernumgebungen daraufhin zu überprüfen, inwieweit sie den formulierten Ansprüchen gerecht werden, wurde folgender Fragenkatalog entwickelt (vgl. POLLMEIER 2004, S. 17).

Fragenkatalog zur natürlichen Differenzierung

1. Arbeiten die Kinder gemeinsam als eine Lerngruppe am gleichen Stoff, lediglich auf unterschiedlichen Stufen ihres Lernprozesses?
2. Setzen sich die Kinder eigenständig mit mathematischen Inhalten auseinander und haben sie die Gelegenheit neue Sachverhalte aktiv- entdeckend zu erwerben?
3. Ist die Lernumgebung komplex, d.h. bietet das Thema verschiedene Ansatzpunkte, die der Unterschiedlichkeit der Lernvoraussetzungen gerecht werden und wird somit allen Kindern ein Einstieg in das Aufgabenformat gewährt?
4. Liegt in der Konzeption des Aufgabenformates eine Herausforderung für besonders begabte Kinder?
5. Gibt es für die Kinder die Möglichkeit, eigene Lösungswege zu gehen und somit die Aufgabe nach den persönlichen Fähigkeiten zu bearbeiten?
6. Können die Schülerinnen und Schüler über die Wahl der Hilfsmittel selbst entscheiden?
7. Findet ein Austausch über die Vielfalt der entstandenen Lern- und Lösungswege statt, so dass die Kinder voneinander profitieren können

Vom Umgang mit vertikaler Heterogenität: Beispiel für eine Lernumgebung zum multiplikativen Rechnen im 2. Schuljahr

Nachfolgend skizzieren wir eine im Rahmen einer Staatsarbeit an der Universität Paderborn entwickelte und erprobte Lernumgebung zum multiplikativen Rechnen im 2. Schuljahr (vgl. POLLMEIER 2004). Bei den Erprobungen hat sich gezeigt, dass sie allen oben genannten Kriterien entspricht.

Die Grundidee der Lernumgebung: Ausschnitte aus der Einmaleins- Ergebnis- Tafel

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Das kleine Einmaleins ist einer der zentralen Inhalte der zweiten Klasse. Es gibt viele Wege, die innere Struktur des Einmaleins und somit die Beziehungen der einzelnen Aufgaben zueinander durch produktive Übungsformate und verschiedene Darstellungsweisen für die Kinder zugänglich zu machen. Grundsätzlich ist es für alle Kinder schwierig, Rechenvorteile zur Ergebnisfindung zu nutzen, wenn sie durch unstrukturiertes formales Üben nicht die Möglichkeit haben, die Beziehungen der einzelnen Aufgaben zueinander zu durchschauen. Eine Übersicht über die Aufgaben des Einmaleins und den Zusammenhang der einzelnen Aufgaben zueinander bietet die Einmaleins-Ergebnis-Tafel, auf deren Grundlage viele Aufgabenformen gefunden werden können, um Einsichten in die beziehungsreichen Strukturen des Einmaleins zu gewinnen sowie das Argumentieren und anschauliche Begründen in diesem Rahmen zu üben (vgl. KRAUTHAUSEN/SCHERER 2001, S. 31).

Ausschnitte aus der Einmaleins–Ergebnis–Tafel unterstützen Kinder die strukturellen Beziehungen des Einmaleins zur Ergebnisfindung zu nutzen. Im Folgenden möchten wir die fünf entwickelten Grundformate vorstellen, die im Rahmen der Staatsarbeit entwickelt wurden.

Format mit Einmaleinsaufgaben

	2·9	

Für den Einstieg in das Übungsformat bietet es sich an, dass zunächst statt des Ergebnisses, eine Aufgabe in einem Feld steht. Dies gibt den Kindern eine Orientierungshilfe und erleichtert ihnen, einen Zusammenhang zwischen den Aufgaben zu erkennen. Die Kinder setzen sich auf diese Weise mit dem quadratischen Aufbau der Tabelle auseinander, bevor sie das Ergebnis einer Aufgabe zunächst multiplikativ zerlegen müssen. Bei dieser Aufgabenstellung wird die logische Abfolge der Aufgaben geübt. Im Vordergrund steht vor allem, dass die Kinder Nachbaraufgaben erkennen und nicht, wie bei den meisten Übungsformen, die Ermittlung des Ergebnisses. Dieses Format soll zunächst allen Kindern im Sinne natürlicher Differenzierung den Einstieg ermöglichen, um sich bei den späteren Formen, in denen nur die Ergebnisse stehen, auf diese Grundlage stützen zu können.

Format mit mehreren Ergebniszahlen

	15	
12	18	24
14		28

In diesen Ausschnitten liegen den Kindern mehrere Ergebniszahlen vor, von denen sie auf die fehlenden Ergebnisse schließen können. Durch die Vielzahl der vorgegebenen Zahlen können die Kinder an verschiedenen Stellen zur Lösungsermittlung ansetzen.

Format mit einer Ergebniszahl

	36	

Die Übungsformen eigen Ausschnitte aus der Tabelle, in denen ein Ergebnis der Malaufgaben angegeben ist. Es hängt jeweils von der gewählten Ergebniszahl ab, wie viele Lösungsmöglichkeiten sich ergeben. Hier ist ein Beispiel zu sehen, in dem die Zahl 36 gegeben ist. Die Zahl 36 ist das Ergebnis von drei verschiedenen Malaufgaben des kleinen Einmaleins. Je nach ihren individuellen Kenntnissen, können die Kinder unterschiedliche Lösungsansätze finden. Rechenstarke Kinder erkennen hier eventuell die Aufgabe $3 \cdot 12$. Somit kann dieses Format auch eine Überleitung in die Reihen des großen Einmaleins sein. Es gibt eine Reihe weiterer Zahlen, die eine derartige Vielfalt von Lösungsmöglichkeiten bieten wie beispielsweise die 12, die 18, die 24. Neben Ergebniszahlen mit mehr als zwei Lösungsmöglichkeiten können auch Aufgabenstellungen konstruiert werden mit keiner Lösung im kleinen Einmaleins (Ergebniszahl 17), mit genau einer Lösung (Ergebniszahl 9; $3 \cdot 3$) oder mit genau zwei Lösungsmöglichkeiten (Ergebniszahl 27; $3 \cdot 9$; $9 \cdot 3$).

Gerade dieses Format bietet zahlreiche Anlässe, um in der Klasse über die einzelnen Lösungswege zu diskutieren. Aufgrund der verschiedenen Lösungsmöglichkeiten haben die Kinder bei der Ergebniskontrolle Einwände, wenn ein Kind eine Lösung gefunden hat, die von der eigenen völlig abweicht. An diesem Punkt ist das Kind gefordert, seine Ergebnisse für den Zuhörer schlüssig zu erklären. Denn durch die Auseinandersetzung mit Aufgaben, zu denen es mehrere mögliche Lösungen gibt, werden Kinder herausgefordert, auf eigenen Wegen Mathematik zu begreifen und miteinander und voneinander zu lernen (vgl. PETER-KOOP 2002).

Formate mit zwei Ergebniszahlen

	27	
	36	

Eine weitere Variante ist die Vorgabe von zwei Ergebniszahlen in den Feldern. Hierbei sind die Zahlen für die freien Zellen genau vorgegeben und es gibt meist nur eine richtige Lösung. Die Kinder müssen die Beziehung der beiden Zahlen zueinander entdecken und nutzen, um auf die fehlenden Ergebnisse zu kommen. Diese Variante ist für die Kinder schwieriger, weil sie im ersten Schritt überlegen müssen, welche Aufgaben zu den gegebenen Ergebnissen gehören, um dann zu entscheiden, ob die Aufgaben, die sie gefunden haben auch in der Kombination der beiden Zahlen möglich sind. Gerade, wenn die Zahlen aus den schwierigen Reihen stammen, ist die Ergebnisfindung für die Kinder eine Herausforderung.

Das leere Aufgabenformat

Bei diesem Übungsformat haben die Kinder die Möglichkeit, individuell zu entscheiden, welchen Ausschnitt sie aus der Einmaleinstabelle wählen. Vorteil dieser offenen Aufgabenstellung ist, dass dieses Lern- und Übungsangebot allen Kindern eine sinnvolle und adäquate Bearbeitung ermöglicht. Nicht zu vergessen ist, dass eben diese offenen Formate den Kindern die Möglichkeit geben, den nächsten Schritt ihrer Entwicklung zu gehen, da hier der genaue Rahmen nicht abgesteckt ist. Offene Aufgaben geben den Lernenden so viel Spielraum, dass sie ihre Vorstellungen und ihre Kreativität einbringen können (vgl. GEERING/KUNATH 2001).

Mit Hilfe der entwickelten Lernumgebung soll dazu beigetragen werden, dass die Kinder ökonomische Strategien anwenden, die darauf basieren, dass sie die strukturellen Beziehungen des Einmaleins ausnutzen. Denn nach Scherer erleichtert die Einsicht in die vielfältigen Beziehungen das Erlernen, Verinnerlichen und Behalten und trägt somit zu einer erfolgreichen Automatisierung bei (vgl. SCHERER 2002). Dies setzt natürlich wiederum ein Erkennen der komplexen Zusammenhänge der einzelnen Aufgaben zueinander voraus. Entscheidend ist, dass die Lernumgebung eine Bearbeitung auf jedem Leistungsniveau zulässt – also der vertikalen Heterogenität gerecht wird. Es wird der Anspruch erhoben, dass auch rechenschwache Kinder Lösungsstrategien entwickeln, die auf den inneren Zusammenhängen des Einmaleins basieren. Ebenso sollen rechenstarke Kinder mit einigen Übungsformaten besonders gefordert werden und es soll ihnen somit ermöglicht werden, die nächste Zone der Entwicklung betreten zu können.

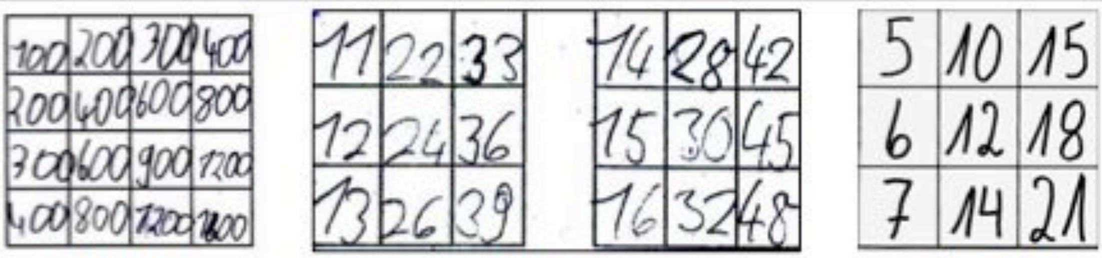
Ergebnisse der Erprobung der Lernumgebung

Die Erprobung der Lernumgebung in vier Grundschulklassen hat gezeigt, dass diese eine Vielfalt der Bearbeitungsniveaus anbietet. Bei der Bearbeitung des Formates mit der Ergebniszahl 36 im Zentrum des 3x3 Feldes ergaben sich folgende Schülerlösungen:

Leon **Bernd** **Rabea** **Aziz**

Die Zahl 36 ist das Ergebnis von drei verschiedenen Malaufgaben des kleinen Einmaleins. Je nach ihren individuellen Kenntnissen haben die Kinder unterschiedliche Lösungsansätze gefunden. Leon sieht in dem Ergebnis die Aufgabe 9 · 4 und sucht die weiteren Ergebnisse aus der 4er-, 3er- und 5er- Einmaleinsreihe. Bernd wiederum wählt die Aufgabe 4 · 9 und rechnet die Aufgaben aus der 9er-, 8er- und 10er -Reihe. Andere Kinder entdecken vielleicht die Aufgabe 6 · 6 und ergänzen die fehlenden Ergebnisse aus der 6er, 5er, und 7er Reihe. Rechenstarke Kinder wie Rabea erkennen hier die Aufgabe 3 · 12. Aziz rechnet ausgehend von der Aufgabe 12 · 3. Ihm unterlaufen jedoch bei den Aufgaben 11 · 4 und 11 · 5 Fehler; allerdings sollten diese nicht im Vordergrund der Betrachtung stehen.

Ähnlich vielfältige Ergebnisse sind bei der Bearbeitung der leeren Formate zustande gekommen. Auch hier haben sich die Kinder von rechenschwach bis rechenstark ihren Fähigkeiten entsprechend eingebracht, wie die folgenden Bearbeitungen verdeutlichen:



Daniel **Lukas** **Claudia**

Daniel berechnet die Reihen des 1 · 100, 1 · 200 etc. Gerade die Berechnungen, die über den Tausender gehen, stellen eine besondere Herausforderung für

Kinder im zweiten Schuljahr dar, die eigentlich erst den Hundertertraum erschließen.

Auch Lukas geht über die Grenzen des kleinen Einmaleins hinaus. Zum einen, ausgehend von der Aufgabe $1 \cdot 11$ bis zur Aufgabe $3 \cdot 13$ und im darauffolgenden Format von $1 \cdot 14$ bis $3 \cdot 16$.

Claudia, ein rechenschwaches Kind, wählt bei der Bearbeitung des leeren Formates eine ihr bekannte Kernaufgabe $1 \cdot 5$. Ausgehend von diesem Ergebnis ermittelt sie dann die Ergebnisse der übrigen Zellen.

Wie an diesen Beispielen erkennbar ist, bietet das leere Format für rechenstarke Kinder eine Vielzahl von Möglichkeiten, ihr Wissen zu zeigen. Die rechenschwachen Kinder hingegen haben die Möglichkeit, sich in einer sicheren Zone zu bewegen und so selbstbewusster in Bezug auf ihre eigene Rechenfähigkeit zu werden.

Die verschiedensten Lösungen der Kinder weisen darauf hin, dass Kinder anscheinend ein Gespür dafür haben, was sie können. Das gilt nicht nur für die Größe der Zahlen, mit denen sie rechnen, sondern auch für das Niveau des Umgangs mit den Zahlen.

Neben der Vielfalt der möglichen Bearbeitungsniveaus zeigten sich insbesondere in den klinischen Interviews, die wir mit den Kinder durchgeführt haben, dass die Kinder ihre Vorgehensweise sehr eindrucksvoll schildern können. In diesem Zusammenhang wurde dann auch deutlich, dass sich die Strategien der Kinder bei der Bearbeitung der gleichen Aufgabenstellung unterscheiden.

Bei der Berechnung dieses Formats mit den Ergebniszahlen 56 und 72

42	49	56
48	56	64
54	63	72

bekamen wir von den Kindern zur Berechnung der 48 folgende Erklärungen:

Fabian

F.: Ach, 6 mal 8 und ähm, ... da ich auch genau weiß, das $5 \cdot 8$ vierzig sind, hab ich einfach noch mal 8 dazu getan.
I.: Woher weißt du denn, das 5 mal 8 40 sind?
F.: Weil, ähm, wenn ich 10 mal rechne, dann ist das 80.
I.: Mhm.

F.: Und weil ja 5 mal die Hälfte von 10 ist, ist das 40, da nehme ich die Zahl nur 5 mal. Ähm, das kann ich nicht so recht erklären.
I.: Ich hab das schon verstanden.
F.: Mhm. Auf jeden Fall habe ich erst mal 5 mal gerechnet, das sind 40 und dann noch mal plus 8.
I.: Mhm.
F.: Das sind 48. Und 56 hab ich auch noch mal gerechnet. Also wieder ... das wusste ich ja schon.

Fabian ermittelt das richtige Ergebnis, indem er die entsprechende Nachbaraufgabe (6·8) zu 56 kennt und deren Ergebnis durch Zurückführen auf eine bekannt Kernaufgabe ermitteln kann.

Abraham hingegen berechnet das Ergebnis mit Hilfe einer anderen Strategie, wie dieser Transkriptausschnitt zeigt:

Abraham

A.: Dann muss man hier einfach plus 4 (zeigt auf die 56). Hier kommt 64 hin *(zeigt auf die Zelle rechts neben der 56)*.
I.: Mhm. Welche Aufgabe ist das dann? Schreib ruhig hin.
A.: Und dann kommt hier die 64, dann muss man hier minus, erst mal minus 6, das sind dann 50 und dann noch mal minus 2, das sind 48.
I.: Mmh.
A.: Hier 48. Wenn hier dann die 8er-Reihe ist, dann ist hier die 9er-Reihe *(zeigt auf die 3. Zeile).*

Abraham weiß, dass er sich in der 8er – Reihe befindet und dass sich die Ergebnisse dieser Reihe jeweils um den Faktor 8 unterscheiden. Dies veranlasst ihn vermutlich dazu, die weiteren Ergebnisse dieser Reihe durch Addition bzw. Subtraktion der 8 zu ermitteln.

Diese beiden Beispiele verdeutlichen, welche Vielfalt von möglichen Denk- und Rechenwegen bei der Bearbeitung der Aufgaben dieser Lernumgebung möglich sind.

Allgemeine Folgerung aus den Erprobungen

Aus den Erprobungen lassen sich für diese Lernumgebung speziell – aber auch allgemein auf den Mathematikunterricht übertragbar – diese Folgerungen ziehen:

1. **Komplexe Lernumgebungen, die verschiedene Schwierigkeitsstufen implizieren, bieten ausreichend Lernanlässe für alle Kinder.**

So können rechenschwache wie auch rechenstarke Kinder an einem Thema arbeiten. Sie arbeiten nur auf einem unterschiedlichen Niveau. Dies bietet einen entscheidenden Vorteil für den Unterricht, da Vorgehensweisen oft nicht vom Schwierigkeitsgrad der Aufgabe, sondern von der Konzeption der Formate abhängen.

2. Kinder fordern sich selbst, wenn ihnen entsprechende Spielräume zugestanden werden.

Die Bearbeitung der leeren Formate der Ausschnitte aus der Einmaleins-Ergebnis-Tafel verdeutlichen insbesondere, dass Kinder ihren Lernprozess durchaus selbst steuern können und sich im Zuge fortschreitender Übung auch mit schwierigeren Aufgaben konfrontieren, deren Lösungen eine intensive Auseinandersetzung fordern. Diese Erkenntnisse zeigen, dass offene Aufgabenstellungen für das gesamte Leistungsspektrum einer Klasse besonders geeignet sind. Die Kinder werden hierbei weder über- noch unterfordert. Sie bieten für alle Kinder die Chance, ihr Können zu zeigen (Bsp.: Aufgaben aus dem Großen Einmaleins zu berechnen).

3. Kinder können ihre Vorgehensweisen sprachlich eindrucksvoll schildern.

Die Verbalisierung der Arbeitsschritte und Denkprozesse beim Ausfüllen der Ausschnitte aus der Einmaleins-Ergebnis-Tafel wurde von vielen Kindern so differenziert vorgenommen, dass es für den Unterricht als bereichernd angesehen werden kann, wenn die Kinder ihre Wege zur Lösung den anderen Kindern schildern. Die Vielfalt der möglichen Lösungswege und Lösungen bei dieser Lernumgebung bietet ausreichend Anlass für konstruktive Gespräche und Diskussionen im Unterricht.

Einsatz der Lernumgebung im Mathematikunterricht

Für den Einsatz der Lernumgebung im Unterricht erweisen sich folgende Aspekte als bedeutsam:

- Nachdem die Tabelle im Unterricht gemeinsam eingeführt wird, können die Kinder die Tabelle selbst in ihrem Arbeitsheft erstellen. Dadurch setzen sie sich mit dem Aufbau sowie der Systematik der Tabelle intensiv auseinander.
- Als Einstieg in das Format sind Ausschnitte mit Einmaleinsaufgaben sinnvoll. Hierbei sehen die Kinder die einzelnen Nachbaraufgaben im Zusammenhang. Da die Nachbaraufgaben der zentrale Schlüssel zur Lösungsfindung in den Formaten mit Ergebniszahlen sind, sehen die Kinder in den Ausschnitten mit den Aufgaben die innermathematischen Beziehungen der Aufgaben zueinander.

- In Ausschnitten, in denen mehrere Ergebniszahlen zu sehen sind, können alle Kinder zunächst mit dem Format vertraut werden. Für rechenschwache Kinder bieten die zahlreichen Ansatzpunkte in diesen Formaten eine Hilfe.
- Schwieriger sind für die Kinder die Formate, in denen Ergebniszahlen aus den größeren Reihen (ab der 6er-Reihe) vorkommen. Für rechenstarke Kinder stellen diese Formate jedoch eine Herausforderung dar.
- Die leeren Formate bieten für alle eine Möglichkeit, vorhandenes Wissen zu zeigen und auf ihrem jeweiligen Leistungsniveau zu rechnen.
- Formate mit einer Ergebniszahl, zu denen es mehr als zwei Lösungsmöglichkeiten gibt, geben den Kindern des mittleren Leistungsspektrums, wie auch den rechenschwachen Kindern, die Chance eine Ausgangsaufgabe zu finden, die über den eigentlichen Lernstand der Klasse hinaus geht, von der aus sie dann den Rest des Formates lösen können.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Kinder auf der Grundlage dieses Formates Einsicht in die beziehungsreichen Strukturen des Einmaleins gewinnen und dass die Konzeption des Aufgabenformates der vertikalen Heterogenität in angemessener Weise begegnet.

4. Schlussbemerkung

Was Lehrpersonen heute mehr denn je brauchen, ist „Heterogenitätskompetenz". Sie ist Voraussetzung für die Gestaltung eines Unterrichts, der die individuellen Fähigkeiten der Schüler berücksichtigt und ihnen die Möglichkeit gibt, ihre eigenen Denk- und Lösungswege zu gehen. Von entscheidender Bedeutung ist dabei, dass beiden Dimensionen von Heterogenität - sowohl der vertikalen als auch der horizontalen - im schulischen Alltag angemessen begegnet wird. Auf welche Art und Weise dies erfolgen kann, verdeutlichen die vorgestellten Aufgabenstellungen, die bei den Kindern die verschiedensten Denk- und damit auch Lösungswege – auf zum Teil unterschiedlichem Niveau – hervorgerufen haben. Nicht nur die unterschiedlichen Vorgehensweisen bei der Bearbeitung der Kino-Aufgabe, sondern auch die Vielzahl der gefundenen Lösungen bei der Bearbeitung der Ausschnitte aus der Einmaleins-Ergebnis-Tafel unterstreichen die Notwendigkeit, den Kindern einen für sie geeigneten Raum des Denkens und Handels bereitzustellen.

Komplexe Lernumgebungen wie die Ausschnitte aus der Einmaleins-Ergebnis-Tafel, an der alle Kinder – auch gemeinsam – arbeiten können, bieten ausreichend Lernanlässe und Herausforderung für das gesamte Leistungsspektrum einer Klasse.

Das unterschiedliche Lernen, Denken, Verstehen, Lösen, Erklären und Diskutieren in einer Klasse sollte nicht als Problem aufgefasst werden, sondern als Quelle für die Bereicherung des Unterrichts genutzt werden.

Literatur

BÖNING, D./SCHAFFRATH, S. (2002): Übungen an Einmaleinstafeln. In: Die Grundschulzeitschrift (2002) Heft 152, S. 28-32.

BRÜGELMANN, H. (1994): Macht Unterricht die Kinder dumm? In: Die neue Schulpraxis (1994) Heft 12, S. 5-9.

GEERING, P./KUNATH, M. (2001): Leistungsauffällige Kinder erkennen und fördern. In: Die Grundschulzeitschrift (2001) Heft 147, S. 14-16.

GRAUMANN, O. (2002): Gemeinsamer Unterricht in heterogenen Gruppen: von hochbegabt bis lernbehindert. Bad Heilbrunn.

HENGARTNER, E. (Hrsg.) (1999): Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht. Zug.

HENGARTNER, E. (1992): Für ein Recht der Kinder auf ein eigenes Denken. In: Die neue Schulpraxis (1992) Heft 7/8, S. 15-27.

KAMII, C.(1989): Young Children continue to reinvent arithmetic. 2nd Grade. Implications of Piaget´s theory. New York.

KRAUTHAUSEN, G./SCHERER, P. (2001): Einführung in die Mathematikdidaktik. Heidelberg.

LORENZ, J.-H./RADATZ, H. (1993): Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. Hannover.

MOSER-OPITZ, E.(2000): Heterogene numerische Kenntnisse von SchulanfängerInnen in Sonderklassen. In: Neubrand, M. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim, S. 454-457.

PETER-KOOP, A. (1998): Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule. Offenburg.

PETER-KOOP, A. (2002): Leistungsstarke Kinder im Mathematikunterricht - (k)ein Problem. In: Die Grundschulzeitschrift (2002) Heft 160, S. 6-7.

POLLMEIER, M. (2004): Lernumgebungen für rechenschwache und rechenstarke Kinder. Unveröffentlichte Staatsarbeit, Paderborn.

RAMSEGER, J. (1999): Lernprozesse differenziert beurteilen. Neue Anforderungen an die Grundschule. In: Böttcher u. a. (Hrsg.): Leistungsbewertung in der Grundschule. Weinheim, S. 39-44.

SCHERER, P. (1997): Substantielle Aufgabenformate – jahrgangsübergreifende Beispiele für den Mathematikunterricht, Teil I – III. In: Grundschulunterricht (1997) Heft 1, S. 34-38, Heft 4, S. 36-38, Heft 6, S. 54-56.

SCHERER, P. (2002): "10 plus 10 ist auch 5 mal 4" - Flexibles Multiplizieren von Anfang an. In: Grundschulunterricht 49 (2002) Heft 10, S. 37-39. Berlin.

SELTER, C. (1994): Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe: Grundsätzliche Überlegungen und Realisierungen in einem Unterrichtsversuch zum multiplikativen Rechnen im zweiten Schuljahr. Wiesbaden.

SPIEGEL, H. (1992): Was und wie Kinder zu Schulbeginn schon rechnen können - Ein Bericht über Interviews mit Schulanfängern. In: Grundschulunterricht 39 (1992) Heft 11, S. 21-23.

SPIEGEL, H. (1993): Rechnen auf eigenen Wegen - Addition dreistelliger Zahlen zu Beginn des 3. Schuljahres. In: Grundschulunterricht 40 (1993) Heft 10, S. 5-7.

SPIEGEL, H. (1996): Lernen, wie Kinder denken. In: Grundschulunterricht 43 (1996) Heft 6, S. 13-16.

SPIEGEL, H. (1997): Kinder auf dem Weg zum Dezimalsystem. In: Jahrbuch Grundschulforschung 1, Weinheim, S. 276-285.

SPIEGEL, H. (1997a): Kinder in der Welt der Zahlen. In: Grundschulzeitschrift 104 (1997) Materialteil S. 16-17.

SPIEGEL, H. (1999): Lernen, wie Kinder denken. In: Hengartner, E. (Hrsg.): Mit Kindern lernen. Zug, S. 124-132.

SPIEGEL, H. (2000): Über den Zusammenhang von Fachkompetenz, Beobachtungskompetenz und Lehrkompetenz - dargestellt anhand von Beispielen aus dem Mathematikunterricht. In: Sache-Wort-Zahl 28 (Juni 2000) Heft 31, S. 53-55.

SPIEGEL, H. (2000a): "Wieviel ist Sechzig durch Vier"? - Von der Schwierigkeit, im Mathematikunterricht einander zu verstehen. In: Grundschulunterricht 47 (2000) Heft 1, S. 29-30.

SPIEGEL, H./BECKER, C. (1995): Kinder auf dem Weg zum schriftlichen Addieren - Ein Brief an eine Lehrerin. In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe 23 (1995) Heft 5, S. 224-229.

SPIEGEL, H./FROMM, A (1996): Eigene Wege beim Dividieren - Annika: Eine Fallstudie. In: Dörfler, W. u. a. (1996): 20 Jahre Mathematikdidaktik. Trends und Perspektiven. Wien/Stuttgart, S. 107-114.

SPIEGEL, H./FROMM, A (1996): Eigene Wege beim Dividieren - Bericht über eine Untersuchung zu Beginn des 3. Schuljahres. In: Dörfler, W. u. a.: 20 Jahre Mathematikdidaktik. Trends und Perspektiven. Wien/Stuttgart, S. 353-360.

SPIEGEL, H./SCHOLZ, V. (2002): Von Kindern lernen wie Kinder rechnen - am Beispiel der mündlichen Subtraktion. In: Schubert, A. (Hrsg.): Mathematik lehren wie Kinder lernen., Braunschweig.

SPIEGEL, H./SELTER, C. (1997): Offenheit gegenüber dem Denken der Kinder. In: Grundschule 29 (1997) Heft 3, S. 12-15.

SPIEGEL, H./SELTER, C. (1997a): Wie Kinder rechnen., Stuttgart

SPIEGEL, H./SELTER, C. (2001): Der kompetenzorientierte Blick auf Leistungen. In: Grundschulzeitschrift 147 (2001), S. 20-21.

SPIEGEL, H./SELTER, C. (2003): Besser verstehen statt besser wissen. In: TPS 10 (2003), S. 9-12.

SPIEGEL, H./SELTER, C. (2003a): Kinder & Mathematik – Was Erwachsene wissen sollten. Seelze.

SPIEGEL, H./SELTER, C. (2003b): Wie Kinder Mathematik lernen. In: Baum, M./Weilpütz, H. (Hrsg.): Mathematik in der Grundschule. Das Arbeitsbuch. Seelze, S. 47-65.

SPIEGEL, H./SPIEGEL, J.(1997): Kinder. In: Grundschulzeitschrift 104 (1997) Materialteil, S. 18.

WITTMANN, E.-C./MÜLLER, G.-N. (1996): Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart u. a.