

Den Somawürfel interaktiv erfahren

Software für den Geometrieunterricht am Beispiel des Programms BAUWAS

Hildegard Kösch/ Hartmut Spiegel

Der Somawürfel ist ein faszinierender räumlicher Körper, der sehr vielfältige und vielschichtige Auseinandersetzungsmöglichkeiten bietet, und der - sobald man ihn in die Hand nimmt - zu einer eingehenden Beschäftigung damit geradezu herausfordert. Im Zusammenhang mit dieser Thematik ermöglicht das Softwareprodukt BAUWAS eine sinnvolle Integration des Computers in einen handlungsorientierten Unterricht.

Die Grundlage des Workshops „Software für den Geometrieunterricht am Beispiel des Programms BAUWAS“ des Paderborner Grundsultages bildet die im Folgenden beschriebene Unterrichtseinheit zum Somawürfel, die in einem 4. Schuljahr durchgeführt wurde.

Das Programm BAUWAS

Das Softwareprodukt BAUWAS erlaubt das Konstruieren von Körpern aus gleich großen Würfeln innerhalb eines dreidimensionalen Koordinatensystems bzw. eines virtuellen Raums per Mausklick. BAUWAS ist Teil eines Mediensystems, das mit der Software, Holzwürfeln und Karteikarten ein strukturiertes, didaktisches Materialangebot für den unterrichtlichen Einsatz darstellt. Zusätzlich erlaubt es der Lehrperson (und auch den Kindern) weiteres Material herzustellen. BAUWAS ist wie ein Werkzeug konzipiert, das den Benutzenden ermöglicht, eigenständig Würfelkonstellationen im Raum zu erzeugen, zu drehen und aus verschiedenen Perspektiven darzustellen sowie experimentierend damit umzugehen.

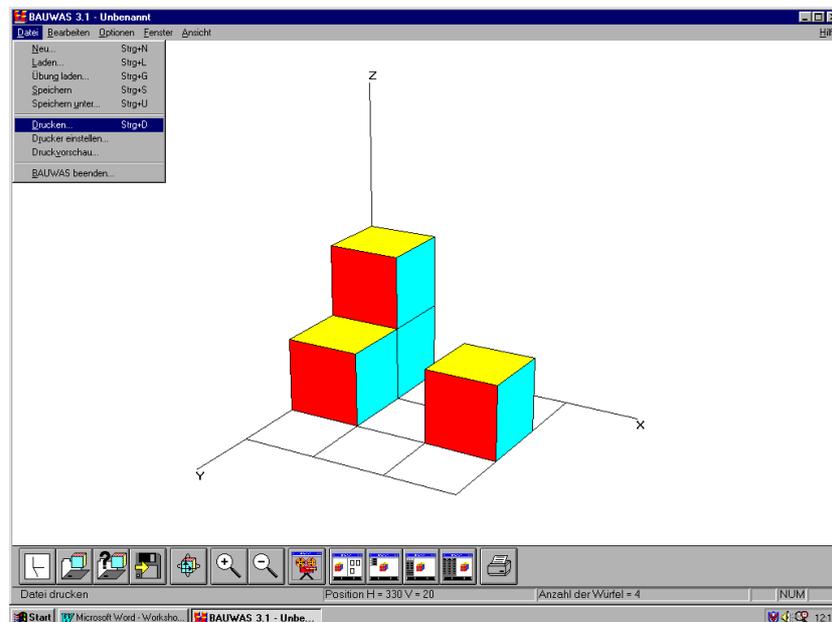


Abb. 1: Das Programm BAUWAS

Die Verbindung von realen (Holzmodell), virtuellen (mit BAUWAS dargestellten) und gezeichneten (ausgedruckten) Würfelkonstellationen ermöglicht vielfältige Transferaktivitäten, die das räumliche Vorstellungsvermögen der Kinder trainieren.

Ferner bietet das Programm noch eine Vielzahl weiterer Möglichkeiten, die an dieser Stelle nicht erläutert werden können.

Der Somawürfel

Der Somawürfel (Ausmaße: $3 \times 3 \times 3$) ist aus 7 Teilen zusammengesetzt: Ein Würfeldrilling und 6 Würfelvierlinge. Erfunden hat ihn – nach einer Schilderung von Martin Gardner¹ - der Däne Piet Hein während einer Vorlesung über theoretische Physik von Werner Heisenberg. Er überlegte sich, dass es genau 7 nicht-konvexe Würfelmehrlinge gibt, die aus maximal 4 Einheitswürfeln bestehen: einer aus drei Würfeln und 6 weitere aus 4 Würfeln. Er bemerkte, dass das Gesamtvolumen 27 Einheitswürfel beträgt, sodass nicht auszuschließen war, dass sie sich zu einem $3 \times 3 \times 3$ Würfel zusammensetzen ließen. Davon überzeugte er sich anschließend, indem er sich die Mehrlinge herstellte und eine Möglichkeit zum Zusammensetzen fand. Es gibt fast 300 verschiedene Möglichkeiten.

Zur besseren Verständigung während der Unterrichtseinheit sind den Teilen zusätzlich Farben zugeordnet.

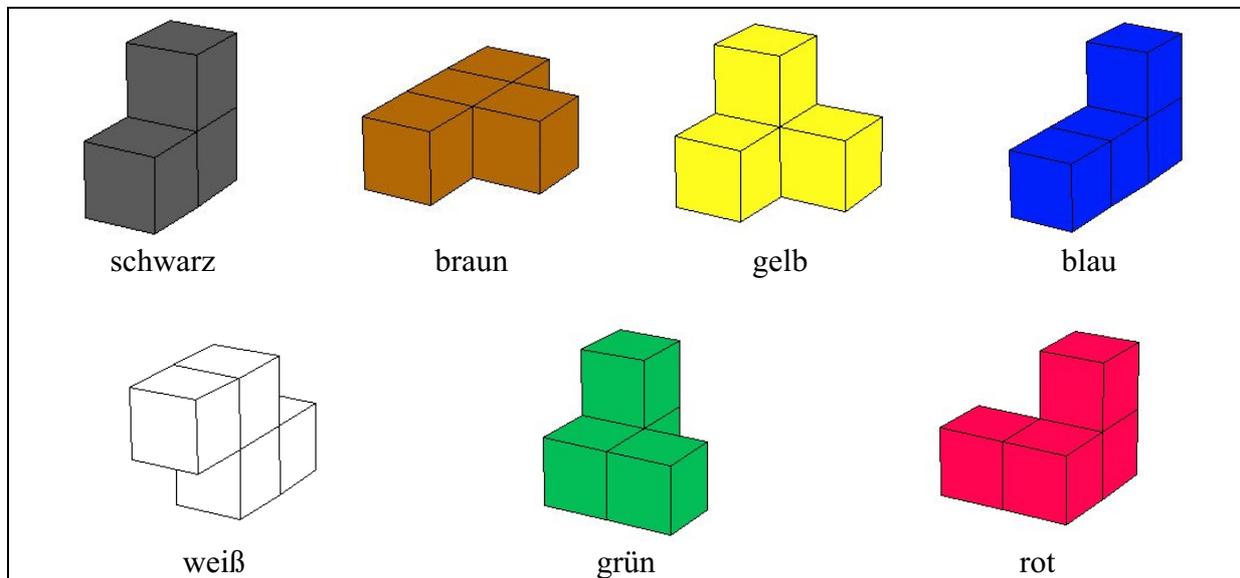


Abb. 2: Teile des Somawürfels mit farblicher Kennzeichnung

Die Unterrichtseinheit

Die Kinder stellen in dieser Unterrichtseinheit zunächst selbst die Somawürfel her. Dazu betrachten und untersuchen sie gemeinsam Würfel-Drillinge (räumliche Gebilde aus drei Würfeln, es gibt lediglich zwei unterscheidbare Exemplare), versuchen sie sämtliche Würfel-Vierlinge zu finden. Daraufhin stellen sie alle Drillinge und Vierlinge her, indem sie die Holzwürfel aneinanderkleben. Anschließend suchen sie die zum Somawürfel gehörenden Teile heraus und färben sie ein.

Die Kinder arbeiten sich selbständig in die Bedienung des Programms BAUWAS ein. Dazu nutzen sie ein speziell für diese Unterrichtseinheit entwickeltes Handbuch, das die wesentlichen Programmfunktionen kurz und leicht verständlich erläutert.

¹ Gardner, Martin: Mathematische Rätsel und Probleme. Braunschweig, Vieweg, 1975

Der selbst hergestellte Somawüfel, das Programm BAUWAS und eine Sammlung zusätzlicher bereitgestellter Materialien bieten für die Kinder nun viele Möglichkeiten einer handlungsorientierten Auseinandersetzung mit räumlichen Strukturen.

Organisiert ist dies in einem Stationenlauf, der aus 7 Stationen besteht. An jeder Station arbeiten die Kinder mit unterschiedlichem Material zu einer bestimmten Aufgabe und unter Zuhilfenahme ihrer Somawüfel. In den Stationen 1-3 steht jeweils ein Computer mit dem Programm BAUWAS zu Verfügung.

Eine wichtige Grundlage für die Arbeit an mehreren Stationen bietet die von Rickmeyer entwickelte Soma-Kartei. Hierin finden die Kinder Abbildungen von Gebilden, welche die Kinder mit ihren eigenen Somateilen nachbauen sollen.

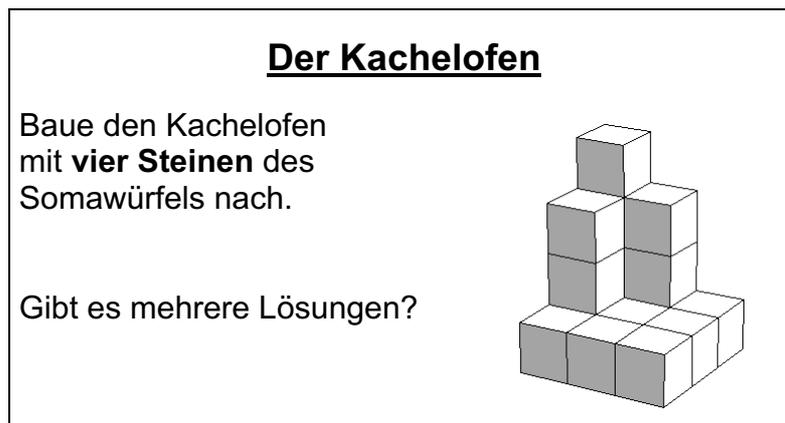


Abb. 3: Karte aus der Somakartei (Quelle: K. Rickmeyer)

Eine weitere Grundlage ist die Möglichkeit mit Hilfe von BAUWAS Bauanleitungen herzustellen. Dabei handelt es sich um eine Schritt-für-Schritt-Anleitung, bei der auf jeder Abbildung ein weiteres Somateil hinzugefügt ist. Die mit BAUWAS hergestellten Einzelbilder zeigen zunächst nur ungefärbte Würfel. Das Einfärben ist mit BAUWAS in der gewünschten Weise nicht möglich. Allerdings fordert das nachträgliche Einfärben mit Buntstiften von den Kindern nochmals ein genaues Hinsehen und Nachvollziehen des räumlichen Gebildes und stellt somit eine zusätzliche Anforderung an das räumliche Vorstellungsvermögen dar. Die einzelnen Abbildungen werden von den Kindern ausgeschnitten und in der richtigen Reihenfolge auf einen Tonpapierstreifen geklebt. Das Bestimmen der richtigen Reihenfolge fordert wiederum das Raumvorstellungsvermögen heraus.

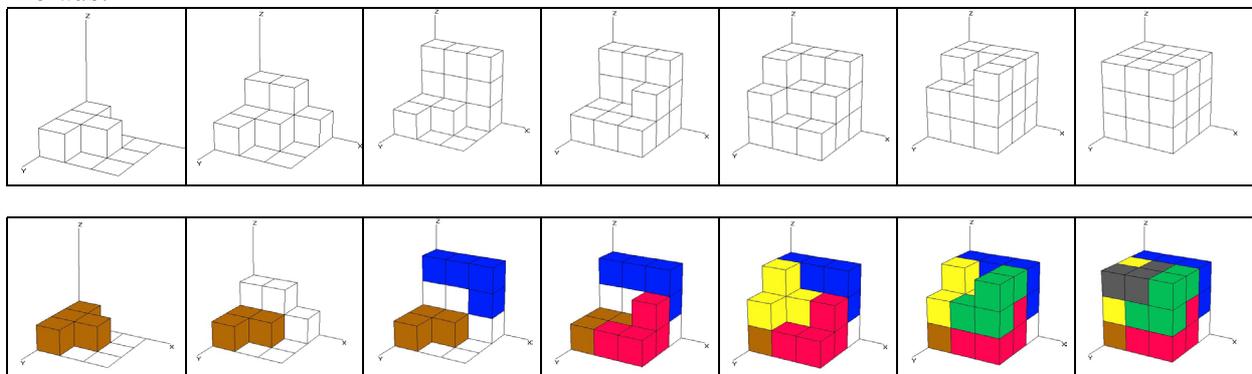


Abb. 4: Beispiel einer ungefärbten und anschließend eingefärbten Bauanleitung

Im Folgenden werden die Materialien, Aufgaben und Aktivitäten an den einzelnen Stationen beschrieben.

Station 1: Bauanleitungen zur Soma-Kartei

Aus der Soma-Kartei können die Kinder sich eine Karte auswählen und dazu mit Hilfe von BAUWAS eine Bauanleitung wie oben beschrieben herstellen.

Station 2: Bauanleitungen zum Somawürfel

siehe Abb. 4

Station 3: Karten für die Somakartei

Die Kinder wählen aus ihren eigenen Somasteinen einige aus und setzen sie zu einem Körper zusammen, den es in dieser Form noch nicht in der Soma-Kartei gibt. Mit Hilfe von BAUWAS stellen sie eine Abbildung her, die den Körper mit ungefärbten Würfeln zeigt.

Diese Abbildung kleben sie auf eine vorbereitete Karte, die entsprechend den Karten aus der Soma-Kartei gestaltet ist. Dort tragen sie noch eine Bezeichnung für ihren Körper ein und geben an, mit wie vielen Steinen des Somawürfels dieser Körper gebaut wird.

Diese Karte steht anschließend anderen Kindern für die Bearbeitung zur Verfügung. Auf diese Weise stellen die Kinder für sich selbst Arbeitsmaterial her.

Station 4: Soma-Kartei

Die Kinder sollen möglichst viele Karten aus der Soma-Kartei lösen.

Station 5: Ordnet die Bauanleitungen!

Es stehen vier Kartensätze mit ungefärbten Bauanleitungen zur Verfügung. Zunächst sollen die Karten von jeder Bauanleitung in die richtige Reihenfolge gebracht werden. Anschließend ist auf einem Zettel die Farbe desjenigen Steines zu notieren, der auf dem jeweiligen Bild in der Bauanleitung hinzugefügt wurde.

Station 6: Welche Ansichten gehören zum selben Somawürfel?

Es stehen acht Karten zu Verfügung, die zu vier Paaren geordnet werden müssen. Ein Kartenpaar zeigt jeweils denselben Somawürfel, aber auf den Karten sind jeweils andere Seiten des Würfels sichtbar. Und zwar zeigt die eine Karte genau die drei Seiten des Würfels, die die andere nicht zeigt. Um von der Ansicht der einen Karte zu der der anderen zu gelangen, muss der Somawürfel genau auf den Kopf gestellt werden.

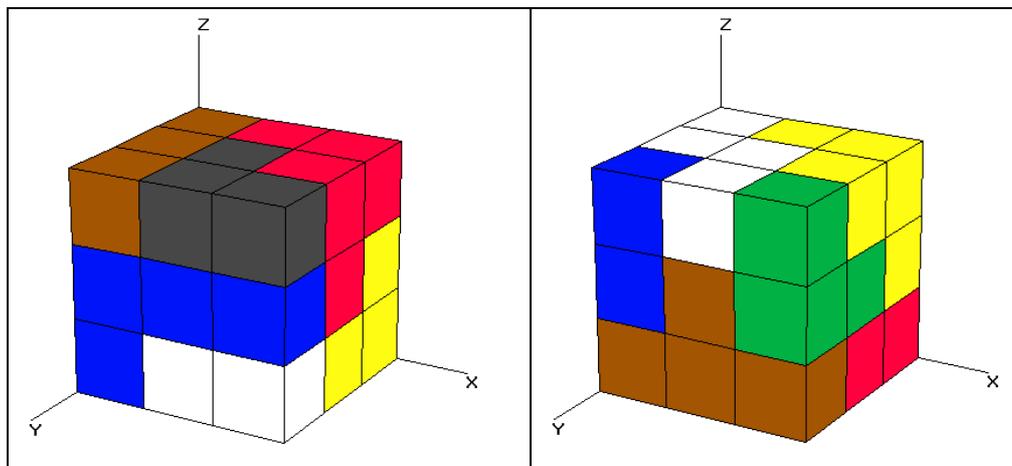


Abb. 5: Beispielkarten aus der Station 6. Die Abbildungen zeigen denselben Somawürfel, der zwischen der ersten und zweiten Abbildung umgedreht wurde.

Station 7: Zeichnen wie BAUWAS

Mit Hilfe von Dreiecksgitterpapier zeichnen die Kinder selbständig ihre eigenen Somasteine ab.

Die Kinder bearbeiteten die Stationen jeweils zu zweit im Team. Die Bezeichnung „Team“ ist hier eher angebracht als der Begriff Partnerarbeit, weil es sich bei den einzelnen Aufgaben nicht um eine „echte“ Partnerarbeit handelt. Darunter ist mehr zu verstehen, dass zwei Kinder sich bei der Bearbeitung derselben Aufgabe gegenseitig ergänzen (z.B. gegenseitiges Abfragen von Aufgaben aus einer Kartei). Dennoch ist im Zusammenhang mit diesem Thema die Arbeit zu zweit sinnvoll, da sich die Kinder so gegenseitig unterstützen, Probleme verbalisieren und sich argumentativ austauschen können.

Jedes Team kann für sich selbst entscheiden, mit welcher Station es beginnen möchte und auch die Reihenfolge festlegen, in der es die Stationen bearbeiten möchte. Mit Hilfe einer Übersichtstabelle für alle Teams können die Kinder festhalten, welche Stationen sie bereits besucht haben. Von den sieben Stationen sollen mindestens fünf bearbeitet werden.

Voraussetzungen und Ziele

Die Auseinandersetzung mit räumlichen Verhältnissen und Formen wird im Lehrplan Mathematik und in der Geometriedidaktik für die Grundschule als besonders wichtiges Ziel angesehen. Einerseits wird dadurch versucht, einen Beitrag zur Orientierung in der Lebenswirklichkeit zu leisten, andererseits bedienen sich andere Disziplinen – in erster Linie die Arithmetik – vielfach geometrischer Strukturen zur Veranschaulichung von Sachverhalten. Um diese Strukturen zu verstehen und richtig anwenden zu können, benötigen die Kinder ihr räumliches Vorstellungsvermögen. Der Somawürfel an sich ist zwar kein Arbeitsmittel, das in anderem Unterricht der Grundschule häufig zur Veranschaulichung verwendet wird, aber in seiner Beschaffenheit bietet er sehr viele Möglichkeiten, das räumliche Vorstellungsvermögen zu trainieren. Diese Unterrichtseinheit leistet also mehr einen Beitrag zur allgemeinen Denkerziehung und ist nicht speziell auf eine bestimmte Anwendungssituation zugeschnitten.

Voraussetzungen für den Ausbau des räumlichen Vorstellungsvermögens sind visuelle Wahrnehmungsfähigkeiten, die etwa im Alter von 3 bis 7 Jahren entwickelt werden, und die Fähigkeit des visuellen Speicherns im Gedächtnis.²

Welche visuelle Wahrnehmungsfähigkeiten unterschieden werden und inwiefern sie bei der Arbeit mit dem Somawürfel in dieser Unterrichtseinheit beansprucht werden, wird im Folgenden kurz erläutert:

- **Visuomotorische Koordination:** Fähigkeit, Auge und Körperbewegung miteinander zu koordinieren, z.B. das exakte Platzieren eines Somasteins.
- **Figur-Grund-Diskrimination:** Fähigkeit, aus einem Formengefüge eine Teilfigur auszusondern, z.B. bei der Analyse von ungefärbten Bauanleitungen.
- **Wahrnehmungskonstanz:** Fähigkeit, Figuren in verschiedenen Größen, Anordnungen, räumlichen Lagen oder Färbungen wiederzuerkennen, z.B. beim Nachvollziehen einer gefärbten Bauanleitung.
- **Wahrnehmung räumlicher Beziehungen:** Fähigkeit, Muster und Formen zu analysieren, z.B. die Zuordnung eines Somateils zu einer Schrägbilddarstellung.
- **Wahrnehmung der Raumlage:** Fähigkeit, Raum-Lage-Beziehungen zu erkennen, z.B. beim Setzen der Würfel mit BAUWAS zum Anfertigen von Bauanleitungen.

² Radatz, Hendrik/ Rickmeyer, Knut: 1991, S. 15ff

In der Psychologie betrachtet man die Raumvorstellung als einen von sieben Primärfaktoren der Intelligenz, der sich im Alter von 7 bis 13 Jahren besonders stark entwickelt. Das konkrete Handeln mit Material ist für die Förderung der Raumvorstellung eine ganz wesentliche Grundlage. Mit der Zeit werden die Kinder immer weniger auf die Handlungen mit dem Material angewiesen sein und die Operationen mehr und mehr in der Vorstellung ausführen können. Im Zusammenhang mit der Raumvorstellung werden nach Thurstone drei Faktoren unterschieden, die allerdings nicht streng voneinander getrennt werden können. Im folgenden sollen diese mit Beispielen zum Somawürfel erläutert werden³:

- **Räumliche Orientierung:** Fähigkeit, sich selbst im Raum zu orientieren. Beim Somawürfel ist darunter (im weitesten Sinne) die eigene Position gegenüber dem Würfel zu verstehen (Wie viele und welche Flächen sind für mich sichtbar? Welche Somasteine sind für mich sichtbar? etc.).
- **Räumliche Beziehungen:** Fähigkeit, Beziehungen zwischen Figuren und Teilfiguren zu erfassen und sich vorzustellen. Beim Somawürfel ist darunter die Lage der Würfel innerhalb der Vierlinge, die Lage der Steine im realen Somawürfel zueinander verglichen mit denen auf dem Computerbildschirm, die Darstellungsweise eines Würfels als Strichzeichnung auf dem Monitor oder der Bleistiftzeichnung, etc. zu verstehen.
- **Veranschaulichungen (räumliches Denken):** Fähigkeit, mit Figuren oder Teilfiguren gedanklich zu operieren. Beim Somawürfel ist darunter das vorausdenkende Zusammensetzen der Somasteine zum Würfel oder anderen Figuren, das Analysieren von ungefärbten Bauanleitungen, etc. zu verstehen.

Durch den Stationenlauf sollen die Kinder in der vorliegenden Unterrichtseinheit vielfältige Gelegenheiten bekommen, diese Fähigkeiten zu trainieren. Dabei sollten die Stationen nicht getrennt nach den verschiedenen Aspekten der Raumvorstellung organisiert werden, da die einzelnen Fähigkeiten sehr stark miteinander verknüpft sind und sich gegenseitig durchdringen. Einige Stationen weisen in ihrer Material- und Aufgabenwahl deswegen deutliche Verwandtschaften auf (die Stationen 1, 2 und 5 befassen sich mit Bauanleitungen, die Stationen 1, 3 und 4 mit der Soma-Kartei, die Stationen 2, 5 und 6 mit dem eigentlichen Somawürfel, sämtliche Stationen befassen sich mit der zweidimensionalen Darstellung von Würfeln bis hin zur eigenen Produktion dieser Darstellungsform in Station 7). Dies ermöglicht den Kindern, gesammelte Erfahrungen an einer anderen Station erneut zu erfahren, auf diese zu übertragen und zu vertiefen, was mit inhaltlich voneinander „isolierten“ Stationen nicht so leicht möglich wäre. Das wiederholte Behandeln ähnlicher Aufgaben mit demselben Material, aber unter unterschiedlichen Blickwinkeln (eigenes Anfertigen einer Bauanleitung in Station 2 – Ordnen einer vorhandenen Bauanleitung in Station 5), gibt den Kindern die Gelegenheit ihre Handlungen mehr und mehr zu verinnerlichen und damit ihr Raumvorstellungsvermögen zu festigen.

Gleichzeitig ergeben sich dadurch Chancen zur Differenzierung, da die Stationen sich von ihrem Schwierigkeitsgrad bzw. der Anforderung an das räumliche Vorstellungsvermögen der Kinder unterscheiden, worüber die Kinder vorher bei der gemeinsamen Besprechung der Stationen informiert wurden. Beispielsweise ist die Bauanleitung für eine Figur aus der Soma-Kartei, die nur aus drei Steinen besteht, leichter herzustellen als die für einen Somawürfel. Die Stationen 1, 3 und 4 (Soma-Kartei) enthalten sogar eine Differenzierung innerhalb der Station bezüglich der Komplexität der zu bearbeitenden Karteikarten. Die Stationen 6 (Ansichten) und 7 (Zeichnen) sind am anspruchsvollsten.

³ ebd. S. 17, S. 144f

Die Funktion des Computers

Die Stationsarbeit ermöglicht also auf der einen Seite eine differenzierende und aspektreiche Auseinandersetzung mit den räumlichen Gegebenheiten im Zusammenhang mit dem Somawürfel, auf der anderen Seite erlaubt sie eine sinnvolle Integration des Computers in das Unterrichtsgeschehen. Es ist durch seine programmtechnische Konzeption ein adäquates Gegenstück zum konkreten Bauen mit Holzwürfeln auf einer ikonischen Ebene. Es kann auch als Übergang zwischen einer konkreten und einer abstrakten Handlungs- bzw. Darstellungsebene gesehen werden.

Das Computerprogramm BAUWAS wird von den Kindern im Zusammenhang mit dem Somawürfel als Werkzeug zum Erstellen von Zeichnungen zu komplexen Würfelgebilden verwendet. Den Kindern ermöglicht das Programm, Anschauungs- und Arbeitsmaterial selbständig und akkurat herzustellen. BAUWAS liefert den Kindern dabei viele Beispiele für die zeichnerische Darstellung von Würfelkomplexen. In Station 7 wird dieser Aspekt wieder aufgegriffen, indem die Kinder zu eigenem Zeichnen aufgefordert werden. Das Nachbauen von Würfelkonstellationen realer Würfel im virtuellen Raum schafft Voraussetzungen für genaues Hinsehen und das Herstellen von Beziehungen zwischen den beiden Handlungs- und Darstellungsebenen (dies wird an allen Stationen realisiert). Das selbständige Einfärben der ausgedruckten Zeichnungen verstärkt diesen Aspekt zusätzlich (Stationen 1 und 2).

Im Zusammenhang mit dem Einsatz des neuen Mediums Computer im Unterricht ist es wichtig, sich mit den folgenden Fragen auseinanderzusetzen:

- Ist die Behandlung dieses Themas auch ohne Computer in ähnlicher Weise durchführbar?
- Eignet sich gerade dieses Softwareprodukt für dieses Thema?⁴

Beim Anfertigen von Bauanleitungen ist das Computerprogramm BAUWAS eine enorme Hilfe. Ohne dieses Programm würde die zeichnerische Gestaltung der einzelnen Bilder sehr zeitaufwendig sein und sicherlich auch einige Kinder überfordern. Das Anfertigen von Bauanleitungen mit BAUWAS verlangt von den Kindern bereits ebenfalls räumliches Vorstellungsvermögen (s.o.). Die Möglichkeit selbst zu zeichnen ist mit der Station 7 gegeben. BAUWAS eignet sich besonders gut bei diesem Thema, weil es inhaltlich auf die Behandlung von Würfelgebilden ausgerichtet ist.

Somit ist für diese Thematisierung des Somawürfels das Programm BAUWAS als eine Bereicherung anzusehen.

Fazit

Während der Unterrichtseinheit gehen die Kinder sehr selbständig mit den Materialien und Aufgaben um. Das wiederholte Behandeln ähnlicher Aufgaben unter verschiedenen Blickwinkeln gibt den Kindern Gelegenheit, ihre Handlungen zu verinnerlichen und ihr Raumvorstellungsvermögen dadurch zu festigen. Der Umgang mit den Materialien und der stetige Vergleich zwischen realen (Holzmodell), virtuellen (mit BAUWAS dargestellten) und gezeichneten (Handzeichnung oder Ausdruck) Würfelgebilden unterstützt bei den Kindern die Durchdringung deren räumlicher Bezüge.

Literatur

- **Gardner, Martin:** Mathematische Rätsel und Probleme. Braunschweig, Vieweg, 1975
- **Kösch, Hildegard:** Raum begreifen – Raumvorstellung entwickeln. Geometrieunterricht in der Primarstufe: Rund um das Thema „Bauen mit Würfeln“. In: Computer + Unterricht, 7. Jahrg., 1997, Heft 27, S. 14-17

⁴ **Krauthausen, Günter:** Zum Einsatz des Computers in der Grundschule. In: Grundschule. 27. Jahrg. 1995, Heft 10, S. 12

- **Krauthausen, Günter:** Zum Einsatz des Computers in der Grundschule. In: Grundschule. 27. Jahrg. 1995, Heft 10, S. 8-12
- **Kroll, Wolfgang:** Raumgeometrie in der Grundschule. Ein curriculares Konzept. In: Praxis Grundschule. 1994, Heft 4, S. 22-23
- **Kroll, Wolfgang:** Soma-Kisten. Raumgeometrie in der Grundschule (2. Teil). In: Praxis Grundschule. 1994, Heft 5, S. 36-37
- **Maier, Peter H.:** Räumliches Vorstellungsvermögen. Donauwörth, Auer, 1999
- **Meschenmoser, Helmut:** BAUWAS für Windows. Konstruktionsprogramm zur Entwicklung von Raumvorstellung. Handbuch. Berlin, MACHMIT e. V., 1995
- **Meschenmoser, Helmut:** Raumvorstellung entwickeln. Förderung einer grundlegenden Fähigkeit zur technischen Kommunikation. In: Arbeiten und Lernen/ Technik. 5. Jahrg. Heft 19, S. 7-11
- **Ministerium für Schule und Weiterbildung NRW:** Richtlinien und Lehrplan Mathematik. Grundschule. Frechen, Ritterbach, 1985
- **Neeb, Dieter:** Das Projekt Soma-Würfel. Körper konstruieren und Pläne selbst erstellen. In: Computer + Unterricht. 7. Jahrg., 1997, Heft 27, S. 26-29
- **Radatz, Hendrik/ Rickmeyer, Knut:** Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen. Hannover, Schroedel, 1991
- **Rickmeyer, Knut:** Übungen mit dem Somawürfel. Zur Entwicklung der Raumvorstellung. In: Praxis Grundschule. 1996, Heft 2, S. 4-9
- **Rickmeyer, Knut:** Zur Entwicklung der Raumvorstellung. Übungen mit Holzwürfeln. In: Grundschule. 1998, Heft 3, S. 12-14
- **Rickmeyer, Knut:** Übungen zu Kopfgeometrie. In: Grundschule. 1998, Heft 9, S. 48-55
- **Rickmeyer, Knut:** Würfelkörper bauen und zeichnen. Vorschläge für das 4. Schuljahr. In: Grundschule. 1991, Heft 2, S. 30-34

WWW-Adressen:

- www.learn-line.nrw.de/Themen/Medienbildung/Beispiele/bauwas.html
- www.bauwas.de

Die Autoren:

Hildegard Kösch,

geb. 1974; z.Zt. Lehrerin an der Norbetschule in Werl, führte diese Unterrichtseinheit während ihrer Ausbildung als Lehramtsanwärterin an der Karlschule in Paderborn durch, Mitarbeiterin des BIG-Projektes (Bildungswege in der Informationsgesellschaft) einem Gemeinschaftsprojekt der Heinz-Nixdorf-Stiftung und der Bertelsmann-Stiftung, Betreuung der am BIG-Projekt beteiligten Paderborner Grundschulen. Anschrift: Am Hilligenbusch 45, 33098 Paderborn

Prof. Dr. Hartmut Spiegel,

geb. 1944; seit 1972 Lehre und Forschung in Didaktik der Mathematik mit Schwerpunkt Primarstufe, seit 1979 als Professor für Mathematik und Ihre Didaktik an der Universität Paderborn. Anschrift: Arnold-Schlüter-Weg 33, 33100 Paderborn