SCHRIFTENREIHE DIDAKTIK DER MATHEMATIK, Band 23
Trends und Perspektiven
Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1996

Hartmut Spiegel, Andrea Fromm

EIGENE WEGE BEIM DIVIDIEREN – BERICHT ÜBER EINE UNTERSUCHUNG ZU BEGINN DES 3. SCHULJAHRES

1. Einleitung

Wir möchten in diesem ersten von zwei Berichten die Konzeption und einige allgemeine Ergebnisse einer Untersuchung vorstellen, die wir als Teil Projektes: "Längsschnittuntersuchung mathematik-spezifischer Fähigkeiten" an der Universität Paderborn durchgeführt haben. In diesem Projekt wurden u.a. Stücke arithmetischen Denkens immer derselben Kinder vom Beginn des ersten Schuljahres im Herbst 1990 bis zum Ende des 4. Schuljahres im Sommer 1994 untersucht. Im Laufe dieser Jahre haben insgesamt 8 Studierende des Lehramtes Primarstufe am Projekt mitgewirkt und dabei einen wichtigen Teil der Arbeit geleistet. Zeitpunkt der Untersuchung war November 1992 bis Februar 1993, also das zweite Viertel des 3. Schuljahres. Ihr Gegenstand war das Lösungsverhalten der Kinder bei unterschiedlichen Divisionsaufgaben ohne Rest - und zwar bis auf zwei Ausnahmen bei solchen Aufgaben, die bisher im Unterricht noch nicht behandelt worden waren.

Daß wir uns für die Division besonders interessiert haben, hat folgenden Grund: Bei der Division treten didaktische Fragen und Probleme auf (vgl. [1]), die unseres Erachtens in der Standardliteratur für Grundschullehrer weder hinreichend differenziert dargestellt geschweige denn beantwortet werden. Außer kurzen Erklärungen des Unterschiedes zwischen "Aufteilen" und "Verteilen" ist nicht viel zu finden. Wir wollten uns um Einblicke in kindliches Denken zur Division bemühen, die zukünftigen und tätigen Lehrern bei der Arbeit mit den Kindern helfen können.

2. "Aufteilen" und "Verteilen" als Aufgabentypen und Rechenwege bei der Division

Worin die Besonderheit der Division besteht, ist hinreichend bekannt, soll hier dennoch in aller Kürze dargestellt werden: Die Aufgabe 52 : 4 = [ ] läßt sich auf zwei Arten interpretieren:

(1)	"Wie oft paßt die 4 in die 52?"
also.:	4 + 4 + ... + 4 = 52 (Wieviel Vieren?)
bzw.:	[ ] $*$ 4 = 52

ODER

(2) "Welches ist der vierte Teil von 52?"

also: [ ] + [ ] + [ ] + [ ] = 52

bzw.: 4 * [ ] = 52

Rechnen, das sich auf der ersten Interpretation basiert, nennen wir aufteilnahes Rechnen, Rechnen, das auf der zweiten Interpretation basiert, nennen wir verteilnahes Rechnen. Diese Terminologie lehnt sich an die bekannte Unterscheidung bei Sachaufgaben an: Aufgaben, deren zugrundeliegende multiplikative Strukur durch [ ] * b = c beschrieben werden kann, heißen Aufteilaufgaben (measurement division), die zur Gleichung a * [ ] = c gehörenden heißen Verteilaufgaben (partitive division).

Der Typus der Aufgabe bestimmt nicht notwendigerweise das rechnerische Verhalten, eine Beobachtung, die auch jeder bei sich selbst machen kann: Die Aufteilaufgabe: "100 Flaschen werden in Kartons zu je 4 Flaschen verpackt. Wieviele Kartons?" kann ich verteilnah rechnen, indem ich 100 halbiere und 50 nochmal halbiere. Die Verteilaufgabe: "200 Personen sollen gleichmäßig auf 40 Ruderboote verteilt werden. Wieviel Personen kommen in jedes Boot?" kann ich aufteilnah rechnen: 40 + 40 + 40 + 40 +40 = 200, also <u>5</u> * 40 = 200.

Erwachsene bzw. geübte Rechner sind sich in der Regel des Sachverhaltes nicht bewußt, daß es unterschiedliche Arten von Divisionsaufgaben gibt und unterschiedliche Arten, sie zu berechnen: Daher rührt auch die bekannte Schwierigkeit, Studierenden die Unterscheidung zwischen Aufteilaufgaben und Verteilaufgaben verständlich zu machen. Wenn es dann gelungen ist, verstehen sie nicht, warum man das thematisiert. Einen Erfolg in dieser Richtung konnten wir aber verbuchen, als wir Studierenden vorführten, wie Jana die folgenden drei Aufgaben auf ganz unterschiedliche Art und mit deutlich unterschiedlichem Zeitaufwand löste:

<u>Formale Aufgabe 60:12</u>:

1*12=12, 2*12=24; bis <u>5</u>*12=60 ("aufteilnah") (1:30)

<u>Verteilaufgabe:</u> In der Schule werden 12 Tische für eine Weihnachtsfeier gedeckt. Thomas verteilt 60 Kerzen auf die 12 Tische, so daß auf jedem Tisch gleich viele stehen. Wieviele Kerzen stellt er auf jeden Tisch?

12*2=24; 12*4=48; 12*4 + 12*1 = 12*<u>5</u> = 60 ("verteilnah") (6:10)

<u>Aufteilaufgabe:</u> In einem Restaurant werden Tische gedeckt. Der Kellner verteilt 60 Teller, auf jeden Tisch stellt er 12 Teller. Wie viele Tische sind es?

5*10 + 5*2 = 5*12 = 60 ("aufteilnah"; schätzend) (0:50)

Janas Vorgehen bei der Verteilaufgabe ist auch ein schönes Beispiel für das, was wir später "kontextbeeinflußt" nennen. Noch deutlicher kann man das auf dem Video sehen, wo sie die Kerzen durch Hingucken auf die Tische im Raum verteilt.

Aus dem bis hierher Dargestellten ergeben sich fast zwangsläufig die Fragestellungen, denen wir in unserer Untersuchung nachgegangen sind.

3. Die Fragestellungen der Untersuchung

Zwischen dem "Anfangszustand des streng kontextbeeinflußten Vorgehens vor der "Einführung" der Division und dem "Endzustand" des "geübten Rechners" gibt es eine Entwicklung, die bei den Kindern einer Schulklasse ganz unterschiedlich verläuft. Durch die Untersuchung wollten wir einen Einblick gewinnen in das Spektrum möglicher Verhaltensweisen gegenüber solchen Aufgaben bei 11 Kindern aus einer Schulklasse. Darüber hinaus interessierten uns noch die folgenden Fragen:

- Wie fällt die Wahl der Kinder zwischen aufteilnahem Rechnen, verteilnahem Rechnen und anderen Strategien bei den formalen Aufgaben aus ?

- Welchen Einfluß hat der Aufgabentypus auf das Lösungsverhalten?

- Welchen Einfluß haben die in der Aufgabe vorkommenden Zahlen auf die Rechenstrategie?

Folgendes Untersuchungsdesign haben wir gewählt: Mit jedem Kind wurden 3 (mit manchen 4) klinische Interviews von je ca. 35 Minuten durchgeführt. Die Abstände zwischen den einzelnen Interviews betrugen jeweils etwa 4 Wochen. Kernbestand aller Interviews waren die folgenden 11 Aufgaben:
30:5; 40:2; 60:3; 52:4; 60:4; 100:4; 400:5; 140:7; 60:12; 1000:20; 200:40.

Bei jeder Aufgabe wurde so verfahren wie bei dem schon erwähnten Beispiel 60:12:
Im ersten Interview erhielten die Kinder die formale Divisionsaufgabe auf einer Aufgabenkarte und begleitet von der Frage: "Wieviel ist 60 geteilt durch 12?".

Im zweiten und dritten Interview wurden die Aufgaben mit denselben Zahlen und demselben Sachverhalt jeweils als Aufteil- bzw. Verteilaufgabe gestellt. Den Sachverhalt haben wir deswegen beibehalten, um eine möglichst hohe Vergleichbarkeit zu gewährleisten.

4. Ausgewählte Ergebnisse der Untersuchung

Das gewonnene Material umfaßt 45 Interviews mit 346 Aufgaben und einer Gesamtdauer von ca. 21 Stunden. Wir haben viel daraus gelernt und stehen nun vor der schwierigen Aufgabe, andere daran teilhaben zu lassen. In diesem Beitrag werden wir einige Ergebnisse globaler Art darstellen, während wir in unserem 2. Beitrag auf Beobachtungen eingehen, die wir bei den Interviews mit einem ganz speziellen Kind gemacht haben. Ausgeklammert bleibt hier z.B. eine detaillierte Klassifikation der Vielfalt der verwendeten Einzelstrategien.

4.1 Wie erfolgreich sind die Kinder ?

Nicht nur zu Schulbeginn ist es so, daß viele Kinder schon erhebliche Vorkenntnisse zu Themen besitzen , die erst der Gegenstand zukünftiger Unterweisung sind. Die vorliegende Untersuchung bestätigt das: 69% aller Aufgaben wurden von den Kindern eigenständig gelöst. 4,9 % wurden nicht gelöst und nur bei 4,6% wurden stärkere Hinweise in Form einer Lösungsidee gegeben. Es zeigt sich also, daß es sich lohnt, den Kindern Gelegenheit zu geben, sich mit Problemen auseinanderzusetzen, die noch nicht offiziell im Unterricht behandelt wurden. Die Fähigkeiten der Kinder sollten nicht unterschätzt werden und vor allem auch nicht der Nutzen, den sie aus einer solchen Arbeit ziehen.

4. 2 Bevorzugen die Kinder eine bestimmte Strategie bei den formalen Aufgaben ?

Bei den formalen Aufgaben haben wir drei Strategietypen unterschieden:
Aufteilnahes Rechnen, wie z.B. bei Andrea bei 52:4: "10 mal 4 sind 40, und 3 mal 4 sind 12, und 40 und 12 sind 52."
Verteilnahes Rechnen, wie z.B. Jana bei derselben Aufgabe, die 52 zweimal halbiert und auf die Frage nach einer passenden Rechengeschichte eine Verteilaufgabe angibt, und
Rechnen mit Hilfe von Stützaufgaben und operativen Beziehungen, bei dem es uns nicht sinnvoll erscheint, davon zu sprechen, daß eine Aufteil- oder eine Verteilvorstellung beteiligt ist (auch wenn das nicht auszuschließen ist), wie z.B.
bei Annika, die 60:12=5 so begründet: "wußte ich, daß ja 2 mal 6 12 ist und dann hab ich - und 10 mal 6 ist 60, und dann hab ich - weils ja das Doppelte ist, ist es nur 5."

Das Diagramm zeigt, wie die Verwendung dieser drei Strategietypen bei den einzelnen Kindern verteilt ist:

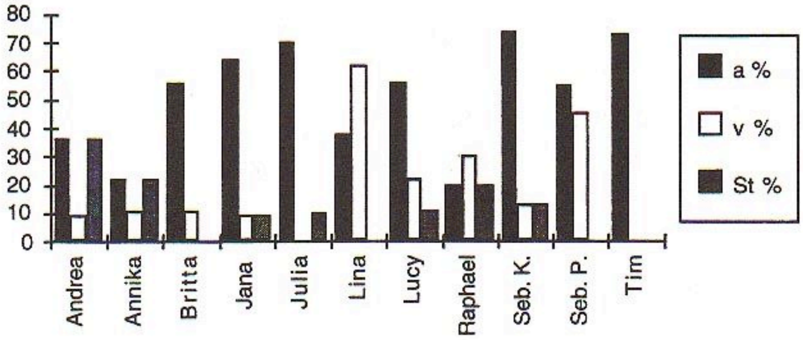

Abb. 1: Verteilung der Strategien bei den formalen Aufgaben

Hier kann man einerseits erkennen, daß bei fast allen Kindern die Aufteilstrategie die vorherrschende ist, andererseits gibt es deutliche Unterschiede in den "Strategieprofilen" - und das, obwohl alle Kinder den gleichen Unterricht genossen haben. Diese Vielfalt legt Zeugnis ab, in welch hohem Ausmaß die Kinder ihr mathematisches Wissen selbst konstruieren, sofern der Unterricht ihnen auch den erforderlichen Spielraum gibt.

Der interessanteste Fall ist Lina, deren Tendenz zum verteilenden Rechnen unter den Kindern einzig ist und von uns so nicht erwartet wurde. So etwas kann zu Mißverständnissen führen, wie folgendes Beispiel aus einem Interview mit Lina zeigt:. Der Transkriptausschnitt beginnt etwa 5 Minuten nach dem Moment , wo Lina die formale Aufgabe 60:4 vorgelegt wurde. Aus dem, was in den ersten fünf Minuten passiert, läßt sich im Nachhinein ganz gut erschließen, daß Lina eine Zahl sucht, deren Vierfaches 60 ergibt. Dabei beginnt sie mit 20 und geht vermutlich in Einerschritten rückwärts. Jetzt ist sie bei 16 angelangt.

<u>Lina (60:4) (Transkriptausschnitt *mit eingefügtem Kommentar*)</u>

"Ähm, 16 mal - äh, 16 mal 4 ist - 4 Zehner sind erstmal wieder 40, dann 46 und plus 4 - 50 - 52 plus 6 sind 58 - paßt auch nicht."

Lina beginnt damit, das Vierfachenv on 16 als vier Zehner plus viermal die 6 zu berechnen. Nachdem sie drei Sechsen zu 40 addiert hat und bei 58 angelangt ist, merk t sie , daß das nicht passen kann. Die nun folgende Dialog resultatiert daraus, daß die Interviewerin davon ausgeht, daß Lina festzustellen versucht, wie oft die Vier in die 60 paßt. Auf der Grundlage dieser Vorstellung versucht sie eine Hilfe zu geben , die am Kind vorbeigeht. Das Resultat ist, daß die richtige Antwort, die das Kind auch selbst gefunden hätte, wenn es gelassen worden wäre, nur dadurch zustande kommt, daß sie dem Kind quasi in den Mund gelegt wird.

"Wieso hast denn Du gerade plus 6 gesagt?" "Was, wo?" "Du hast gerade plus 6 gesagt. - 52 plus 6 sind 58." "Ja." "Wieso 6?" "Weil ich da noch einmal - ich hatte ja 16 mal 4 gerechnet. Da mußte ich noch eine 6 dazurechnen. Weil ich erst die ganzen vier Zehner gemacht habe und dann die Sechser." "Aber wenn Du 16 mal 4 rechnest, sind es ja nicht 4 Sechser, sondern 6 Vierer, ne, die Du dazurechnen mußt. - Aber Du weißt ja, daß 10 mal 4 40 ist, hast Du eben gesagt, ne?" "Ja." "Und wievielmal 4 sind 20? *(L. überlegt, lacht)* Hilft Dir das vielleicht?" "Wievielmal 4 Zehner oder - ?" "10 mal 4 sind 40." "Ja." "Und wieviel fehlen dann noch bis 60?" "20." "Und wievielmal 4 sind 20?" "Was? Wievielmal 4 sind 20?

(L. leise) 8 - 12 - 16 - 20 *(laut)* Ah, jetzt hab ich nicht mitgezählt, ich Doofi, ähm, mal eben zählen. Also 4, 8, 12, 16, 20 *(L. zählt mit den Fingern die einzelnen Vierer mit.)* - 5." "Hm, und wenn Du jetzt weißt, daß 10 mal 4 40 sind und 5 mal 4 20 ist?"
(nach 24 Sekunden, L. unsicher) "5? Nee- oder doch ..." *(nach 25 Sekunden)* "Die 4 paßt 10 mal in die 40 und 5 mal in die 20 - 10 mal in die 40 und 5 mal in die 20. Und 40 und 20 ist ja 60. Wie oft paßt sie dann in die 60?" "Die 4 ..."
"Wenn sie 10 mal in die 40 paßt und dann noch 5 mal dazu ..."
"15." "15, ne." "Hm."

Lina war übrigens auch eines der beiden Kinder, die später für die Aufteilaufgaben mehr Zeit benötigten als für die Verteilaufgaben.

4.3 Welchen Einfluß hat der Aufgabentypus auf die Strategie der Kinder?

Im Zentrum unserer Untersuchung stand die Frage, wie sich der Wechsel der Fragerichtung (Aufteilen vs. Verteilen) bei Beibehaltung der Zahlen auf das Rechnen der Kinder auswirkt. Diese Frage bestimmte den Aufbau der Interviews. Daß es einen solchen Einfluß geben würde, stand für uns außer Frage. Offen war nur, wie er sich zeigen würde.
Er zeigte sich bei den einzelnen Kindern unterschiedlich: Während einige Kinder sich bei der Wahl ihres Rechenweges noch stark vom Kontext beeinflußt zeigten, war dieser Einfluß bei anderen Kindern gering, wie man folgender Abbildung entnehmen kann:

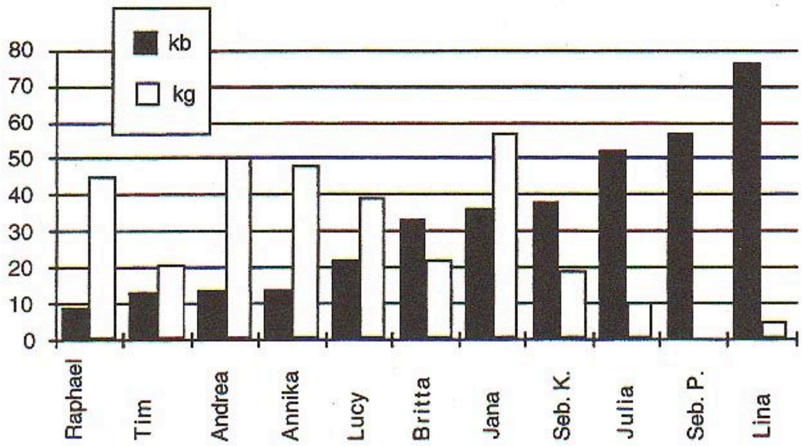

Abb. 2: Prozentsätze kontextbeeinflußten und kontextgelösten Rechnens bei den Kontextaufgaben

Jana, Andrea und Raphael haben die größten Anteile kontextgelösten Rechnens, entsprechen also in hohem Maße dem Bild des "geübten Rechners", während Lina, Sebastian P. und Julia die höchsten Anteile kontextbeeinflußten Rechnens aufweisen. Es wäre aber falsch zu glauben, daß kontextgelöstes Rechnen auch grundsätzlich schneller oder erfolgreicher im Hinblick auf die Anzahl eigenständiger Lösungen ist. Das kann man daran sehen, daß Julia und Sebastian P., die beide stark kontextbeeinflußt sind, neben Jana und Raphael zu den vier Kindern gehören, die die höchste Anzahl eigenständiger Lösungen, nämlich 82% produziert haben. Sebastian P. ist zusätzlich der drittschnellste Rechner. Annika dagegen, die auch wenig kontextbeeinflußt ist, hat den zweitschlechtesten Anteil eigenständiger Lösungen: 55%.

Der Einfluß der Fragerichtung auf das Lösungsverhalten der Kinder zeigt sich aber auch, wenn man die Sache von den Aufgaben her betrachtet: Abb.3 zeigt - bezogen auf 7 ausgewählte Aufgaben - die beobachteten Anteile aufteilnahen und verteilnahen Rechnens bei der Aufteil- und der Verteilvariante im Vergleich.

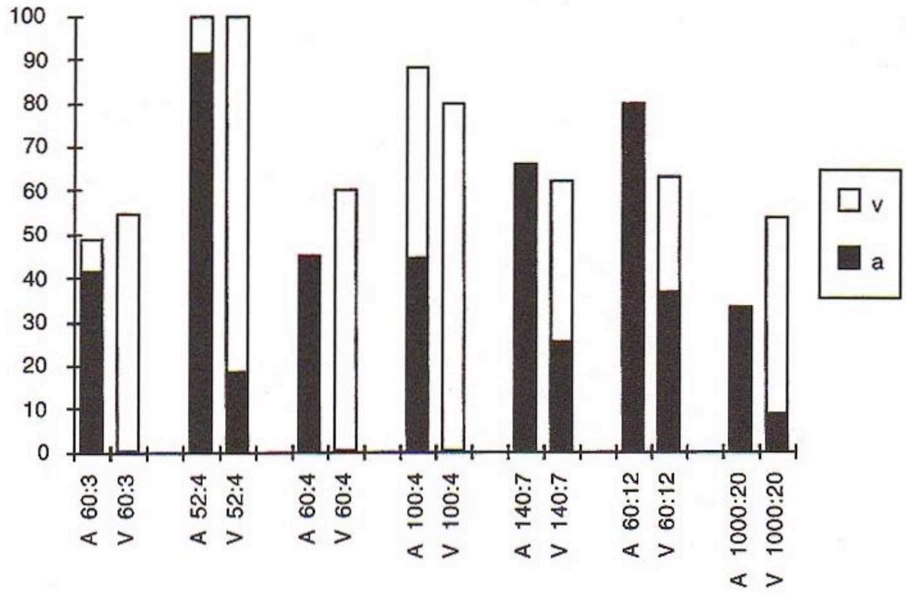

Abb.3: Anteile aufteil- bzw. verteilnahen Rechnens bei den Kontextaufgaben

Wie man leicht erkennen kann, gibt es bei jeder Aufgabe einen Einfluß der Fragerichtung auf das Lösungsverhalten. Sehr deutlich kann man das z.B. sehen bei der Aufgabe 52:4, die als Aufteilaufgabe zu 90% aufteilnah und als Verteilaufgabe zu 83% verteilnah gerechnet wird. Man kann aber auch sehen, daß es von den beteiligten Zahlen abhängt, wie stark der Einfluß des Kontextes ist: Die Aufteilaufgabe 100:4 und die Verteilaufgaben 60:12 und 140:7 sind diejenigen, bei denen die Kinder am häufigsten Strategien verwenden, die nicht dem Kontext entsprechen. Damit sind wir bei der Frage angelangt, auf die wir abschließend kurz eingehen möchten:

4.4 Welchen Einfluß haben die in der Aufgabe vorkommenden Zahlen auf die Rechenstrategie?

Die Vermutung liegt nahe, daß bei den kleinen Divisoren 3 und 4 und großen Dividenden verteilnahes Rechnen leichter ist, und daß bei den Divisoren 7,12 und 20 aufteilnahes Rechnen leichter ist. Dementsprechend müßten Aufgaben mit der gegenteiligen Fragerichtung schwerer sein. Nimmt man die benötigte Lösungszeit der Kinder als Indiz für die Aufgabenschwierigkeit, dann wird diese Annahme durch die folgende Tabelle gestützt:

60:3		52:4		100:4		60:4		140:7		60:12		1000:20	
A	V	A	V	A	V	A	V	A	V	A	V	A	V
1:52	0:12	2:27	3:09	4:41	2:31	1:54	0:56	0:38	1:41	1:26	2:02	1:33	3:53

Abb. 4: Durchschnittliche Lösungszeiten bei Aufteil- und Verteilaufgaben

Eine Ausnahme bildet die Aufgabe 52:4, an der man sehen kann, daß nicht nur der Divisor, sondern auch die Beziehung zwischen Divisor und Dividend eine Rolle spielt.

5. Schlußbemerkung

Abschließend möchten wir nochmal festhalten, worin wir die Bedeutung der vorgestellten Ergebnisse unserer Untersuchung sehen. Sie liegt nicht darin, daß wir jetzt etwa statistisch einwandfreie Erkenntnisse über das Lösungsverhalten bei Divisionsaufgaben erzeugt haben - das gibt das Material gar nicht her. Wir haben auch keinen Beitrag zu einer entwicklungspsychologischen Theorie der Entwicklung der Operation "Divison" leisten können und wollen. Aber das Material zeigt, daß verschiedene Einflußgrößen sich bei 11 verschiedenen Kindern ganz verschieden auf ihr Lösungsverhalten bei Divisionsaufgaben ausgewirkt haben. Es kann dabei helfen - und hat im Rahmen der Ausbildung auch schon zukünftigen Lehrerinnen geholfen -, die Dinge differenzierter zu sehen, als sie vom Standpunkt des geübten Rechners wahrgenommen werden. Es eröffnet einen Zugang zum besseren Verstehen auch anderer Kinder.

Literatur

[1] Hefendehl-Hebeker, L.: Zur Einteilung des Teilens in Aufteilen und Verteilen. Mathematische Unterrichtspraxis (1982) Heft 4 S. 37-39

Prof. Dr. Hartmut Spiegel, Andrea Fromm
FB 17, Universität-Gesamthochschule Paderborn, D 33095 Paderborn