Andrea Fromm, Hartmut Spiegel

Eigene Wege beim Dividieren - Annika: Eine Fallstudie [1]

1. Einleitung

In dem vorangegangenen Beitrag haben wir über Konzeption und ausgewählte Ergebnisse unserer Untersuchung zum Lösungsverhalten von Drittklässlern bei unterschiedlichen Arten von Divisionsaufgaben berichtet.
Das Material, das die Untersuchung in Form der dokumentierten Interviews lieferte, ist aber nicht nur deshalb interessant, weil es Hinweise zu Antworten auf die dort genannten inhaltlichen Fragen gibt: Einige Interviews enthalten Dialoge, aus denen man viel über spezielle Schwierigkeiten der Verständigung mit lernenden Kindern erfahren kann und die daher für alle, die mit Grundschulkindern - oder deren zukünftigen Lehrern - arbeiten, von Interesse sind. Die Interviewausschnitte, die ich im Folgenden vorstelle, analysiere und kommentiere, liefern unseres Erachtens einen Beleg dafür

- wieviel richtiges Denken in einem auf den ersten Blick chaotisch und undurchsichtig erscheinenden Verhalten entdeckt werden kann
- wie schwierig es sein kann, Gedankengängen von Grundschulkindern zu folgen
- welches hohe Maß an Konstruktivität in den Lösungswegen der Kinder steckt

Besonders ergiebig in dieser Hinsicht waren die Interviews mit Annika, aus denen wir hier zwei Beispiele vorstellen. Die spezielle Art und Weise, wie Annika Teile ihres Denkens und ihre z.T. ausgefallenen Strategien versprachlicht, macht es besonders schwierig, ihre Gedanken nachzuvollziehen. Höchste Konzentration ist erforderlich, um sich schon beim ersten Ansehen einen Reim auf das Geschehene machen zu können.

[1] In: Dörfler, W. u. a.: 20 Jahre Mathematikdidaktik. Trends und Perspektiven. Wien-Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsky-Teubner 1996, S.107-114

2. Annika rechnet die Verteilaufgabe 200:40

Transkript:

I: Dann machen wir mal noch eine - Auf einem See sind 200 Leute mit dem Ruderboot unterwegs.
A: Wieder ´ne Zweieraufgabe ...
I: 200. Insgesamt sind 40 Ruderboote auf dem See, in jedem sind gleich viele Personen.
Wie viele sind in jedem Boot?
A: Also, 200 Leute (A. schreibt eine 200.) und wie viele Ruderboote?
I: 40.
A: 40 Leute ...
(A. schreibt neben die 200 ": 4 =".)
I: Also vierzig , ne - Du hast jetzt da 4 stehen.
A: Ja - (A. korrigiert.) 40 Leute - und dann müßte man sagen, daß das eigentlich - 60 Leute auf jedem wären.
I: Hm, wieso? Wie bist Du darauf gekommen?
A: Da hab´ ich jetzt einfach ganz normal 200 durch 40 gerechnet. Wegen mit den Fünfzigern da sind immer, ich meine - 3 Boote, äh, ich meine, Dingsdabums Leute. - Wie viele Boote? 40 Boote? Dann sind auf jedem Schiff - 200 durch 4 - also was ist jetzt - nochmal - was ist es, ah, jetzt bin ich voll durcheinander. 200 durch 40 - 3. 3 Leu - nicht 30
(nach 10 Sekunden) gleich 3 - 3 dingsdabums.
I: Hm? 3?
A: 30.
I: 30.
A: Nein, 3. (Beide lachen.)
I: Woher weißt Du das?
A: Hab´ einfach 50 gerechnet, ähm, in 100 sind ja immer 2 mal 50 drin (A. schreibt eine 50.) - kann man auch ein Fahrrad draus machen (A. malt aus der 50 ein Fahrrad, lacht.)
... aus ´ner 50 ein Fahrrad - und dann hab´ ich 50 und - 50 - äh, durch 200 sind 4 und durch 40 sind - warte mal, durch 200 - 500 meine ich.
I: Hm? Was 500?
A: 5 Schiffe sind´s, äh, 5 sind dann - dann kommt 5 ´raus, weil bei jedem bleiben ja, wenn´s 200 sind, bei 5 - wenn man durch vier-... - fünfzig rechnen würde, würden da immer vier ...
(I. nickt.) 40 rauskommen - äh, 4 meine ich, und dann, ähm, bei - und dann bleibt ja bei jedem bei 40 zwei über, und daraus macht man noch wieder 4.
Und dann hab´ ich - ist die ja fertig, die Aufgabe.
I: Dann sind´s 5. (A. nickt.) Oh, toll!

Zunächst sieht diese Szene nach einem heillosen Chaos aus. Annika formuliert kaum einen vollständigen Satz, und in ihrer Erklärung wirft sie offenbar mehrere verschiedene Zahlen durcheinander - insgesamt nennt sie fünf unterschiedliche Ergebnisse. Dieses Kind scheint zu keinem vernünftigen Gedanken fähig zu sein; so war auch unser erster Eindruck nach dem ersten Interview, das fast durchgängig in dieser Art und Weise verlief.
Bei genauerer Betrachtung stellt man aber fest, daß Annika nicht so durcheinander gewesen sein kann, wie es zunächst schien, denn am Ende nennt sie das richtige Ergebnis - und das hat sie vollkommen selbständig ermittelt.
Wenn man das, was sie sagt und vermutlich denkt, übersetzt in das, was wir verstehen, dann liest sich das so:

200 ist viermal 50. Wenn ich aber aus der 50 eine 40 mache, dann bleiben bei zwei Fünfzigern (=100) zwei Zehner übrig. Bei 200 bleiben also 4 Zehner übrig, und daraus macht man wieder 40. Also sind es zusammen fünfmal 40.

oder formal:

$$\begin{aligned} 200 &= 4 \cdot 50 \\ &= 2 \cdot (40 + 10 + 40 + 10) \\ &= 40 + 40 + 40 + 40 + 10 + 10 + 10 + 10 \\ &= 5 \cdot 40 \end{aligned}$$

Diese Bündelungs- bzw. Umbündelungsstrategie findet man häufig bei Annika.

<u>3. Annika rechnet die formale Aufgabe 60:4</u>

Der nächste Ausschnitt stammt aus dem ersten Interview mit Annika.
In dieser Szene rechnet sie die Aufgabe 60:4:

Transkript:

I: Weißt Du, wieviel 60 durch 4 ist?
A: 60 durch 4...
(A. überlegt, murmelt unverständlich vor sich hin.Dann schreibt sie eine 12 auf das Papier.)
A: (nach 1 Minute) 13.
I: 13? Wie bist Du denn darauf gekommen?
A: Ich hab´ erst 8 durch 4 gerechnet, das waren 12, und dann hab´ ich die Reste davon, das war bei jedem 2, und dann hab´ - und das waren dann wieder 12, und dann hab´ ich...
I: Also, ich muß jetzt gleich mal Dich unterbrechen. Du hast nämlich gesagt, 8 durch 4 ist 12. (A. überlegt kurz.)
A: Äh, ich meine 8 durch 60.
I: 8 durch 60 - geht das?
A: ...2 mal 4 sind 8, (I. nickt.) und das hab´ ich immer, hab´ ich auf jeden Fall 6mal die 8 da ´rein, und dann bleiben nur - und dann muß ich das doppelt rechnen, die 4 - dann sind´s bei 8 - halt sozusagen
(A. schreibt eine 4.) -
nee, 2...
(A. streicht die 4 wieder durch und schreibt:) 2*4=8
(...)

Bevor Sie weiterlesen, denken Sie bitte einmal kurz über diese ersten Erklärungsansätze nach, um sich evtl. ein Bild davon machen zu können, wie Annika zu ihrem Ergebnis gekommen ist. Diese Szene ist noch weitaus undurchsichtiger als die vorherige. Es lohnt sich aber, den Dialog einmal genauer zu betrachten:

"Ich hab´ erst 8 durch 4 gerechnet, das waren 12, und dann hab´ ich die Reste davon, das war bei jedem 2, und dann hab´ - und das waren dann wieder 12, und dann hab´ ich..."

Dieser zunächst unverständliche erste Erklärungsversuch enthält bereits wichtige Informationen über Annikas Lösungsweg. Er ist deswegen so schwer zu verstehen, weil sie einige wichtige Überlegungen ausläßt, was sich im Verlauf des Interviews und bei der anschließenden Analyse zeigt.

Zunächst einmal sind zu dem Satz "Ich hab´ erst 8 durch 4 gerechnet, das waren 12" noch einige Gedanken zu ergänzen. So etwa könnten Annikas Überlegungen ausgesehen haben:

60, das sind 6 Zehner. In jedem Zehner steckt eine 8, also steckt in der 60 schon mal 6mal die 8. Dann hat man 12mal die 4, denn zweimal 4 sind 8. Also hat man 12mal 4 und einen Rest.

oder formal: $60 = 6 \cdot 10$

$10 = \mathbf{8}+2$

$6 \cdot 10 = 6 \cdot 8 + \text{Rest}$ $\qquad 8 = 2 \cdot 4$

$6 \cdot 10 = 12 \cdot 4 + \text{Rest}$

Weiter sagt Annika: "*...und dann hab´ ich die Reste davon, das war bei jedem 2, und dann hab´ - und das waren dann wieder 12...*"

formal: $60=6 \cdot 10$

$10=8+\mathbf{2}$

$6 \cdot 2=12$

$60=12 \cdot 4+12$

Dazu könnte sie überlegt haben: 60 sind 6 Zehner. (Das ist auch hier wieder die Voraussetzung!) Wenn ich von jedem Zehner 8 wegnehme, bleiben noch 2 übrig. Bei 6 Zehnern hat man also 6 Zweier übrig, und das sind zusammen 12.

All diese Überlegungen sind implizit im ersten Erklärungsansatz enthalten, und damit ist Annika schon fast am Ende ihrer Beschreibung des Lösungsweges.

Leider wird sie dann von mir unterbrochen, da ich mit "8 durch 4...das waren 12" nichts anfangen konnte. Schade, denn als nächstes (und letztes) wollte Annika erklären, was sie mit dem Rest 12 gemacht hat bzw. wie sie zu ihrem Ergebnis gekommen ist und hätte dabei vielleichtt ihren Fehler entdeckt.

Möglicherweise kam sie auf 13, indem sie gedacht hat: 12mal 4 und dann nochmal 12, also 13mal 4. Im Verlauf des Interviews ergibt sich, wie wir gleich sehen werden, noch eine andere Möglichkeit.

Annika hat hier also den gesamten Lösungsweg bis 12mal 4 plus 12 gleich 60 in eine kurze Wendung gepackt! Auf Anhieb war das jedoch für mich nicht zu erkennen, da noch einige Überlegungen dazu gehören, die Annika nicht erwähnt hat, insbesondere den Grundgedanken $6 \cdot 10 = 60$.

In Zeile 12 verwendet sie nicht die korrekte Divisionssprechweise, was in den weiteren Interviews noch oft passierte und auch in der vorherigen Szene (50 durch 200...) zu sehen war: Statt 60 durch 8 sagt sie 8 durch 60, ohne es aber selbst zu bemerken, d.h. für sie ist dennoch völlig klar, was sie meint, und die falsche Sprechweise führt daher zu keinerlei Irritationen. Dieses Phänomen konnten wir übrigens nicht nur bei Annika, sondern auch bei anderen Kindern beobachten. Später verzichtete ich auf diese Nachfragen, da sie das Kind letztlich nur irritierten, weil es doch das Richtige meinte und oft gar nicht wußte, was ich eigentlich wollte.

So reagiert Annika auf meine durch die falsche Sprechweise provozierte Frage (Zeile 14) nicht etwa, indem sie sich korrigiert. Sie faßt meine Frage "8 durch 60 - geht das?" wahrscheinlich als inhaltlichen Einwand auf - vielleicht als Frage, wieso sie gerade 60:8 gerechnet habe, wenn doch die Aufgabe 60:4 ist.

Lesen Sie nun, wie es weitergeht:

A: Dann 8, das hab´ ich dann öfter gerechnet...
I: Hm, und wie weit bist Du da gekommen?
A: Da hab´ ich gerechnet ... (A. schreibt und sagt) 6*8=6
I: 6 mal 8 gleich 6?
A: Nein, aber - eher gesagt... da hab' ich (A. streicht 6*8=6 durch.) ... geht schwer... da hab' ich eher gesagt so gemacht, hab' ich 6mal die 8 gerechnet, und dann hab' ich davon die 4, da waren 12 übrig, daraus hab' ich dann nochmal 8 gemacht, und 2 waren dann übrig, dann hab' ich 13mal 4 gehabt.
I: Hm, aber, ähm - 6 mal 8, wieviel ist denn 6 mal 8... wo bist Du denn dann, wenn Du 6 mal 8 hast? (A. überlegt.) Das mußt Du ja schon wissen, wenn Du so rechnest - oder das mußt Du 'rauskriegen können...
A: Hab' ich aber dabei nicht - gleich weitergerechnet.
I: Hast Du gar nicht? Aber dann weißt Du ja gar nicht, wieviel noch fehlt bis 60.
A: Da hab' ich - das war mir klar eigentlich, aber - das hab' ich eigentlich nicht gemacht...
I: Also, wenn Du 6 - Du hast gerechnet 6 mal 8, und dann weißt Du ja auch, wievielmal 4 Du hast, ne, so hab' ich das verstanden (I. zeigt auf das Geschriebene.), daß Du erst 2 mal 4 ist 8, und dann hast Du immer gleich die 8 - mit 8 weitergerechnet, ne.
A: Dann hab' ich 6mal, also die 8 so oft es geht in die 60 'reingetan. (I. stimmt zu.).
Und dann hab' ich aus den Resten das nochmal gemacht.
I: Hm, aber Du solltest das vielleicht nochmal machen, denn irgendwo hast Du welche vergessen.
A: In Durch bin ich ja auch nicht ganz grad die Beste...
I: Nicht? Aber Du hast das ja auch jetzt schon gar nicht mit Durch gemacht. Du hast das ja mit Mal gemacht. (nach 20 Sekunden) Was überlegst Du jetzt?
A: Also, ich rechne jetzt weiter ... sozusagen...ich rechne jetzt mit - 6 mal 10 sind 60 - das weiß ich ja...(A. schreibt und sagt dazu:) 6 mal 10 sind 60.
Und dann noch - und bei 8, da fehlen ja immer 2, und dann mußte ich - dann hab' ich das abgezogen, also die 2 von jedem Zehner...
I: Hm, und das sind zusammen...?
A: Dann hab' ich 'rausgekriegt, daß es - 12...und dann waren´s 12, ja, dann 12...
(A. sagt und schreibt:) 12 - 8 =

I: Wieso 12 minus 8?
A: Weil in der 12 stecken dann ja nochmal die 8 drin.
I: Ah, ja.
A: Und das wären 4 (A. schreibt eine 4.) - nee ... (A. überlegt.)
I: 12 minus 8...
A: 4 natürlich. Hab' ich eben durchgestrichen. - (A. schreibt wieder eine 4 hin.) Und dann hatte ich noch eine 4 übrig und - 4 übrig hatte ich - und natürlich waren's dann 14 mal die 8, also 14 mal 4, weil ja die 2 - weil 2 mal 8 4 sind und dann sozusagen (A. schreibt und sagt dazu:) 8 - 4 = 4. Und dann hab' ich das so auseinandergerechnet, und dann waren's 14.

Durch das, was ich zuvor erläutert habe und was Sie lesen konnten, ist weitgehend aufgeklärt, wie Annika vorgegangen ist. Im folgenden möchten wir noch einige Punkte herausgreifen, die über das Spezifische von Annikas Vorgehen hinaus auch allgemeine Probleme der Kommunikation mit lernenden Kindern beleuchten.

Annika schreibt: $6{\cdot}8=6$. (Zeile 22)
Auf meine Nachfrage hin merkt sie auch, daß diese Gleichung so nicht stimmt und streicht sie durch. Ich nehme aber an, daß sie sich dabei etwas Richtiges gedacht hat.
Möglicherweise handelt es sich um eine Gedankenstütze, um auf meine Frage, wie weit sie gekommen sei, zu antworten. In ihrem Modell paßt die 8 zunächst 6mal in die 60 (wenn man von Annikas Bündelung der 60 in 6 Zehner ausgeht), das sind also schon mal 6. $6{\cdot}8$ alleine aufzuschreiben, das kommt ihr vielleicht unvollständig vor, da im Mathematikunterricht Zahlbeziehungen und Ergebnisse i.d.R. in Form von Gleichungen auftreten. So macht Annika aus $6{\cdot}8$ die (falsche) Gleichung $6{\cdot}8=6$, die als Protokoll ihres Denkprozesses aufgefaßt werden kann: 6mal 8, also schon mal 6 Achter.
Annikas Gedankengang ist so komplex, daß sie ihn mit ihren Mitteln gar nicht korrekt aufschreiben *kann* - und das gilt nicht nur für Annika. Wir halten es für wichtig, mit solchen Fehlern sensibel umzugehen. Natürlich sollen die Kinder lernen, mehr und mehr von korrekten Notationen Gebrauch zu machen, doch wenn sie in so einer Situation etwas aufschreiben, um ihren Rechenweg zu erklären oder wenn sie während des Rechnens etwas als Gedankenstütze festhalten, sollte man es nicht grundsätzlich sofort korrigieren wollen. Sonst läuft man Gefahr, daß dieses Werkzeug für sie zu einer Barriere wird. (Man verbietet Ihnen ja auch im Sprachunterricht nicht das Schreiben, solange es nicht ganz korrekt ist, und man korrigiert sie auch nicht immer!)

"...hab' ich 6mal die 8 gerechnet, und dann hab' ich davon die 4, da waren 12 übrig, daraus hab' ich dann nochmal 8 gemacht, und 2 waren dann übrig, dann hab' ich 13mal 4 gehabt."
Zeile 25 bis 27 stellt einen erneuten Erklärungsversuch dar, den dritten. Dieses Mal erklärt Annika auch noch, was sie mit dem Rest gemacht hat:

In der 12 ist noch einmal die 8 enthalten. Vermutlich hat sie die 8 nicht weiter aufgespalten in zweimal 4, sondern die 8 zu den 12mal 4 gerechnet und somit 13mal 4 erhalten.
Ob Annika durch *diese* Überlegung zu der Lösung 13 gekommen ist oder ob sie - wie eben erwähnt - $12 \cdot 4+12=13 \cdot 4$ gedacht hat, kann man nicht genau sagen. Diese letzte Überlegung hat sich möglicherweise erst während ihrer Erklärung entwickelt, so wie später auch das zweite Ergebnis, 14, entstanden ist.

Den Gedanken 6mal 8 gleich 12mal 4 (verkürzt) konnte ich zu diesem Zeitpunkt nachvollziehen, nicht aber, wie Annika von da aus zu dem Rest 12 kam. So kommt es zu meiner Unterstellung (Zeile 28 bis 30), wenn sie so rechne ($6 \cdot 8$), müsse sie ja wissen, wieviel $6 \cdot 8$ ist, um von dort aus weiterzurechnen.
Das Irritierende und zugleich Beeindruckende an Annikas Strategie ist, daß sie tatsächlich *ohne* das Berechnen dieses Zwischenergebnisses zur Lösung kommen konnte, was nicht zu meinem Bild von ihrem Lösungsweg paßte.Annikas Hinweis in Zeile 37 stützt mich eher noch in meinem (Irr-) Glauben, wie sie zur Lösung gekommen sei: "...die 8 so oft es geht in die 60 ´reingetan." Das sieht eher nach meiner Vermutung als nach ihrer Überlegung aus.
Auf die 6 kommt man allerdings nur unter der Voraussetzung der Bündelung der 60 in 6 Zehner. Nur in diesem Fall kann man sagen, daß die 8 nicht öfter als 6mal in die 60 paßt.

Am Schluß ihrer Ausführungen (Zeile 49ff.) zerlegt sie nochmal den Rest 12 in 8 plus 4, konzentriert sich dann auf die 8, die in zweimal 4 zerlegt werden kann. Vermutlich kommt sie auf 14, indem sie jene zweimal 4 zu den 12mal 4 addiert und die andere 4 von 8+4=12 vergißt. So hat sie jedenfalls über ihre Erklärung des Lösungsweges ihr erstes Ergebnis korrigiert.
Ich lasse das noch immer nicht ganz richtige Ergebnis stehen, weil ich Annika noch eine weitere Nachfrage ersparen will und weil es *nicht* darum geht, jede gestellte Aufgabe *unbedingt* mit dem richtigen Ergebnis abzuschließen. In diesem Fall ist jedenfalls klar, welche Gedanken Annika geleitet haben, und ich habe das Gefühl, dieses Ergebnis ruhigen Gewissens stehenlassen zu können.

4. Schlußwort

Abschließend möchten wir zwei Dinge hervorheben, die uns im Zusammenhang mit Annika und diesen beiden Beispielen besonders aufgefallen sind:

Erstens: An beiden gezeigten Beispielen wird deutlich, daß die Sichtweise "Richtiges Denken heißt richtiges Sprechen" nicht unbedingt zutreffend ist. Was wir eben im Zusammenhang mit Annikas Notiz "6*8=6" zu der Schwierigkeit, einen Rechenweg vollständig und korrekt aufzuschreiben, erwähnt haben, gilt im Grunde auch für die verbale Erklärung.

Annika hat Schwierigkeiten, ihren Lösungsweg zu erklären, was ja auch nicht verwunderlich ist, wenn man sich die vielen Beziehungen zwischen den Zahlen, die darin enthalten sind, einmal vor Augen führt. Doch obwohl es zeitweise gar nicht danach aussieht, steckt in ihrem Lösungsweg sehr viel Kreativität und richtiges Denken.

Zweitens: Bei solchen Situationen wie der eben vorgestellten, in denen die Lehrerin das Kind nicht versteht, besteht eine große Gefahr, daß das Kind zu Unrecht an sich und seinem Denken zu zweifeln beginnt. Wir sind uns im Klaren darüber, daß so etwas nicht grundsätzlich ausgeschlossen werden kann - insbesondere im Schulalltag, wo man nicht nur mit einem Kind zu tun hat. Wir meinen aber, daß die Gefahr geringer ist, wenn die Lehrerin mehr über mögliche Denkwege der Kinder weiß.

Andrea Fromm, Prof. Dr. Hartmut Spiegel
FB 17, Universität-Gesamthochschule Paderborn, D 33095 Paderborn