Eine Lernumgebung rund um die Spielidee von „Twenty-Four“

Hartmut Spiegel & Daniela Götze **„Twenty Four“ ist ein vom Amerikaner Robert Sun entwickeltes und bei Suntex erschienendes Kopfrechenspiel. Uns hat dieses Spiel bereits vor Jahren gefesselt, und auch die Erfahrungen aus dem Unterricht haben uns immer wieder gezeigt, dass diese simple Spielidee nicht nur reichhaltige Lernchancen für Kinder unterschiedlichen Leistungsniveaus bietet, sondern Kinder und Erwachsene zum „spielerischen Knobeln“ nachhaltig motivieren kann. Im Folgenden wird gezeigt, wie dieses Spiel sinnvoll im Mathematikunterricht eingesetzt werden kann.**

Worum geht es?

Nehmen Sie vier Ziffern, z. B. 1,2,3,8. Bilden Sie daraus Aufgaben oder Ketten von Aufgaben, bei denen jede dieser Ziffern genau einmal vorkommt. Als Rechenoperationen sind die vier Grundrechenarten zugelassen, egal in welcher Anzahl und Reihenfolge. Ein Beispiel ist das folgende:
2·8=16,16+**3**=19; 19-**1**=18.
Das ist eine Folge von Aufgaben, bei denen die Ziffern 1,2,3,8 genau einmal benutzt werden – zusätzlich natürlich die entstandenen Zwischenergebnisse. Man kann dieselbe Rechnung (ohne das Ergebnis) auch durch einen Rechenausdruck beschreiben: 2·8+3-1. Die Beschreibung in einem „Term“ hat den Vorteil, dass dabei wirklich nur die gegebenen Ziffern auftauchen und diese jeweils genau einmal.

Probieren Sie selbst

Nun sind Sie dran: Gesucht sind Rechenausdrücke mit den Ziffern 1,2,3,8 (jede Ziffer genau einmal) und den Grundrechenarten (egal in welcher Anzahl und Reihenfolge), deren Ergebnis **24** ist. Wir kennen drei, die sich deutlich voneinander unterscheiden. Für die Ziffern 1,6,8,9 kennen wir zwei verschiedene Rechenausdrücke mit dem Ergebnis 24, genauso wie für 1,3,9,9, wobei hier beide Möglichkeiten nicht so einfach zu finden sind.

Die Spielregeln

Mit Obigem ist die mathematische Grundidee, die unserer Lernumgebung und damit dem Spiel 24 zugrunde liegt, schon abgesteckt. Die Spielregeln selbst sind simpel: Es werden immer vier Ziffern auf einer Spielkarte abgedruckt, die sich gemäß der obigen Bedingung zur Zielzahl 24 verknüpfen lassen. Ein Kartenstapel mit z. B. insgesamt 48 Spielkarten wird mit der Rückseite der Karten nach oben auf den Tisch gelegt. Eine Karte wird aufgedeckt. Wer als erstes eine passende Aufgabe mit dem Ergebnis 24 sagt, bekommt die Karte. Dann geht es mit der nächsten Karte weiter. Wer am Ende die meisten Karten hat, ist der Gewinner.

Und noch ein paar Übungen zur Reflexion des Spiels

Damit Sie sich zunächst ein Bild davon machen können, welche Fähigkeiten beim Spielen von „24“ gefördert und gefordert werden, sollten Sie es mit so vielen weiteren Zahlenkombinationen versuchen, wie sie mögen. Wir stellen Ihnen mal einige Kombinationen als Übungsmaterial zur Verfügung.

1245 , 2348 , 4458 , 1258 , 2446 , 4577 , 1348 , 3477 , 6666 , 1367 , 3479 , 6668 , 1789 , 3666

Jede der hier aufgeführten Kombinationen lassen sich auf mehr als eine wesentlich verschiedene Art zur Zielzahl 24 zusammensetzen. Was meinen wir mit „wesentlich verschieden“? Das ist eine Sache der Festlegung. Es ist nicht günstig, den Begriff zu weit zu fassen, denn dann gäbe es z. B. schon 120 verschiedene Lösungen zu 4,5,6,9, die sich nur dadurch unterscheiden, wie ich die beteiligten Zahlen beim Addieren zusammenfasse und in welcher Reihenfolge ich das erledige. Schwerer ist es vielleicht schon damit, (4+4):2·6 nicht als verschieden von (4+4)·6:2 zu betrachten, aber auch in diesem Fall sehen wir es als ökonomisch an, nicht von verschiedenen Lösungen zu sprechen. Da es aber eine Frage der Übereinkunft ist, was man als verschieden betrachtet und was nicht, kann es jeder machen, wie er möchte. Für den Unterricht hat es sich als sinnvoll erwiesen, den engen Verschiedenheitsbegriff zu benutzen, d. h. dass eine lediglich unterschiedliche Reihenfolge beim Rechnen nicht als „verschieden“ gezählt wird.

Nützliches Vorwissen für diese Lernumgebung im Unterricht

Alle, die viele Versuche mit der Spielidee von „24“ hinter sich haben, werden Ähnliches entdecken: Es macht wenig Sinn, alle überhaupt möglichen Rechnungen so lange durchzuprobieren, bis man durch Zufall auf eine stößt, die als Ergebnis 24 hat. Ebenso wird man feststellen, dass das Ganze nur Spaß macht, wenn man das kleine 1x1 automatisiert zur Verfügung hat, unterschiedliche multiplikative und additive Zerlegungen der 24 kennt und schnell in einen Zusammenhang mit den vorliegenden Ziffern bringen kann. Man braucht beides: Wissensbausteine und eine Strategie.
Nehmen wir das Beispiel 2,3,7,8. Hier bietet es sich an, zu überlegen, ob ich zu 2,3,7 eine Aufgabe mit Ergebnis 3 finde, zu 2,7,8 eine mit Ergebnis 8 oder zu 3,7,8 eine Aufgabe mit Ergebnis 12. Im ersten und letzten Fall kann man Erfolg haben: (7+2):3=3 bzw. 7+8-3=12; Als Lösungen ergeben sich: (7+2):3·8=24 bzw. (7+8-3)·2=24 Im zweiten Fall klappt es nicht. Aber es gibt noch eine dritte Lösung zu 2,3,7,8: (7-3)·(8-2)=24. Hier sind die beiden Faktoren 4 und 6 durch jeweils 2 der vorhandenen Ziffern dargestellt werden.

Dieses Beispiel liefert schon drei unterschiedliche Arten von Rechnungen. Je mehr Arten man im Blick hat, desto schneller bzw. leichter wird man Lösungen finden können. Eine grobe, aber hilfreiche Unterscheidung besteht darin, dass 24 eine Summe, Differenz, Produkt oder Quotient zweier Zahlen sein kann. Diese können dann selbst wiederum unterschiedlich zerlegt werden. Jeweils ein Beispiel ist in der nebenstehenden Tabelle abgedruckt.

Zum Schwierigkeitsgrad

Noch eine Bemerkung zum Schwierigkeitsgrad einer Kombination: Er hängt nicht nur von der Anzahl möglicher Lösungen und deren Komplexität, sondern auch von den persönlich bevorzugten Strategien ab. Jemand der es z. B. vorzugsweise über eine Kombination von multiplikativen und additiven Zerlegungen probiert, wird es mit 2,4,9,9 oder 5,5,7,7 vielleicht schwerer als andere haben. Dennoch haben unsere Erfahrungen gezeigt, dass Kombinationen, bei denen sowohl Division als auch Subtraktion vorkommen oder bei denen Zwischenergebnisse benutzt werden, die größer als 24 sind, von der Mehrheit (der Kinder) als *schwer* angesehen werden. Daher ist es ein Muss für den Unterricht an dieser Stelle mit Kindern darüber zu reflektieren, bei welchen Kombinationen sie lange nach einer Lösung gesucht und woran das vielleicht gelegen haben mag.

Summen	1·3·9-3	1·6·8:2
1+5+9+9	6·9:2-3	(9:3+9)·2
9+9+7-1	3·9-1·3	(8:2-1)·8
(1+1)·9+6	3·9-6:2	(1+2)·(1+7)
(4-1)·5+9		(1+2)·(9-1)
3·7+1+2	**Produkte**	(4-1)·(7-1)
1·2·9+6	(1+2+3)·4	(9-(2·3))·8
8·5:2+4	(3+5-2)·4	(8-(6:3))·4
2·9+1·6	(1+1)·2·6	
3·7+6:2	(1+5)·8:2	**Quotienten**
	(5-1-1)·8	(6·7+6):2
Differenzen	(3-1)·3·4	(7·7-1):2
(1+4)·5-1	(7-1)·8:2	(6·8):(1+2)
(4-1)·9-3	(1·1+3)·6	(6·8):(5-3)
4·6+1-1	(2·2-1)·8	
3·9-1-2	2·2·2·3	

Wie man vorgehen kann

Die oben zusammengestellte Vielfalt der möglichen Rechenwege zeigt, dass das Aufgabenformat ein sehr breites Spektrum für unterschiedlich anspruchsvolle Probleme bietet. Bevor man Kinder das Spiel miteinander so spielen lässt, dass das schnellere Kind gewinnt, kann man ihnen interessante Angebote machen, die ihnen den spielerischen Umgang mit den Zahlen nahe bringen und so ihre Flexibilität im Umgang mit Zahlen entwickeln helfen. Grundsätzlich ist es bei dieser Lernumgebung immer wieder wichtig, die Kommunikation der Kinder untereinander über unterschiedliche Lösungen, Strategien oder auch Problemen anzuregen. Ein Austausch unter den Kindern führt gemäß unserer Erfahrungen zu mathematisch reichhaltigen Gesprächen, aus denen jedes Kind etwas lernen kann (vgl. Spiegel & Götze 2007). In welcher Reihenfolge die nun folgenden Lernangebote im Unterricht angeboten werden sollten, kann nach eigenem Interesse entschieden werden.

Spielen mit Zahlen und Rechenoperationen (Vorgabe der Startzahlen)

Es werden vier Zahlen vorgegeben und die Kinder bekommen die Aufgabe, verschiedene Folgen von Rechenaufgaben zu finden, bei denen jede Zahl nur einmal benutzt wird – es sei denn, sie tritt auch als Zwischenergebnis auf. Es können dabei noch zusätzliche Zielvorgaben gemacht werden: Wer findet die Aufgabenfolge mit dem kleinsten Ergebnis? ... mit dem größten Ergebnis? Wer findet zwei verschiedene mit dem gleichen Ergebnis? Es können für leistungsstärkere Kinder auch Bedingungen vorgegeben werden: mindestens einmal malnehmen, mindestens einmal teilen, alle drei Rechenoperationen verschieden, etc.

Spielen mit Zahlen und Rechenoperationen (Vorgabe des Ergebnisses)

Hier geht es darum, zu der Zielzahl „24" verschiedene Sets von vier Zahlen zu finden, aus denen man diese Zielzahl errechnen kann. Auch hier können zusätzliche Randbedingungen eingeführt werden entweder hinsichtlich der Zahlen: zwei Zahlen sollen gleich sein, alle Zahlen sollen verschieden sein, es darf keine Eins dabei sein, es soll eine Eins dabei sein etc., hinsichtlich der Operationen (wie oben): mindestens einmal malnehmen, mindestens einmal teilen, alle drei Rechenoperationen verschieden, etc. und/oder hinsichtlich der Anzahl der Lösungen: findest du vier Zahlen, die auf mehr als eine Art miteinander verknüpfen werden können, so dass sie die gesuchte Zielzahl ergeben?

Eine neue Notationsform kennen lernen

Ausgehend von dem Problem, den eigenen Rechenweg bzw. die gefundene Aufgabe korrekt aufzuschreiben, ergibt sich ganz natürlich ein Anlass, sich über passende Notationsformen zu verständigen. Kinder schreiben nämlich gerne auch mal so: 2·7=14-6=8·3=24. Dann kann einerseits die Bedeutung des Gleichheitszeichens thematisiert werden und es können die Konventionen eingeführt werden, die eine unzweideutige Notation erlauben: die Verwendung von Klammern und die Regel, dass bei nicht vorhandenen Klammern „Punktrechnung" den Vorrang vor „Strichrechnung" hat. Die Kinder können also lernen, Ausdrücke wie diese zu verstehen und auszuwerten:

(2·7-6)·3, (6·8):(3-1), (1+2)·(9-1), (7·7-1):2 etc.

Spielen mit Zahlen und Rechenoperationen (Vorgabe der Rechenstruktur und des Ergebnisses)

Eine reizvolle Variante des vorhergehenden Aufgabenformates ist die zusätzliche Vorgabe einer „Rechenstruktur" (M1). Es wird genau vorgegeben, welche Operationen wie zusammengesetzt werden sollen.

Spielen mit Rechenoperationen (Vorgabe der Zahlen und des Ergebnisses 24)

Damit sind wir bei der Grundidee des Spieles angelangt, die sich aber noch in unterschiedlicher Weise realisieren lässt: Soll im Sinne der anfangs beschriebenen Idee mit Karten gespielt werden, dann kann die Lehrperson in Unterstützung durch die Kinder in die vorbereitete Kopiervorlage M2 solche Zahlenkombinationen selbst eintragen, von denen ihnen bekannt ist, dass es eine Lösung gibt. Diese können die Kinder arbeitsteilig vorher selbst ermitteln oder die Lehrperson kann selbst welche der im Anhang zu findenden 397 Kombinationen (M3) lösen und dann solche mit passendem Schwierigkeitsgrad auswählen.
Es kann aber auch die Klasse in zwei Mannschaften geteilt werden, die gegeneinander spielen: Aus einer Schachtel, in der es zu jeder Ziffer vier Zettel gibt, werden nacheinander vier Zettel zufällig gezogen und die gezogenen Ziffern an die Tafel geschrieben. Die Mannschaft, die als erster eine Lösung nennt, bekommt einen Punkt. Diese Spielidee verdanken wir einer 3. Klasse aus Boke (bei Delbrück im Kreis Paderborn). Wenn nach einer vorher festgelegten Zeit keine Lösung gefunden wurde, weil die Kombination zu schwer oder nicht lösbar ist, geht es weiter. Schließlich kann auch einzeln geknobelt werden. Hierzu kann die Kopiervorlage M4 mit den 4x4-Tabellen benutzt werden, von denen jede 20 lösbare Kombinationen enthält, die Kinder einzeln oder kooperativ bearbeiten können.

Spielen mit Bruchzahlen

Das Ganze kann je nach Leistungsstand der Kinder noch dahingehend ausgereizt werden, dass im Sinne der Zone der nächsten Entwicklung auf den Spielkarten auch Bruchzahlen benutzt werden dürfen. Die Erfahrungen in einer vierten Klasse zeigen, dass Kinder hierzu durchaus in der Lage sind.

Fazit

Die hier dargestellte Lernumgebung eignet sich dazu, mit einer einfachen Idee mathematisch reichhaltige Lernprozesse bei den Kindern anzuregen. Es werden automatisierte Rechensätze erneut angewendet, Beziehungen zwischen Aufgaben erkannt und genutzt, flexibel Zahlen und Rechenoperationen miteinander kombiniert, viel im Kopf gerechnet, der Zahlensinn geschult, Strategien entwickelt und reflektiert (…) und das gleichermaßen für leistungsstarke Kinder wie auch leistungsschwache Kinder.

Literatur

Spiegel, Hartmut; Götze, Daniela (2007): Rechenkonferenzen unter Kindern – Möglichkeiten, Chancen und methodische Umsetzung. In: Schipper, Wilhelm; Lorenz, Jens Holger (Hrsg.): Hendrik Radatz – Impulse für den Mathematikunterricht. Braunschweig: Schroedel, S. 28 – 36.

Autoren

Prof. Dr. Hartmut Spiegel
Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Warburgerstr. 98
33098 Paderborn

Dr. Daniela Götze
Technische Universität Dortmund
Fakultät Mathematik
Institut für Entwicklung und Erforschung
des Mathematikunterrichts
Vogelpothsweg 87
44227 Dortmund