Quelle: Krauthausen, Günter: Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden. In: Journal für Mathematikdidaktik 14 (1993), H. 3/4, S. 189-219

Günter Krauthausen

Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden[1]

***Summary**: In elementary mathematics instruction four types of calculation should be distinguished from each other: mental calculation, informal strategies, written algorithms, and the use of calculators. Each of these methods is connected with a specific degree of importance, but written algorithms traditionally are given priority over the other ones. The present paper pleads for a new reflection and reexamination of the four types that takes the specific features, intentions and strengths of each method into account. The essential suggestion is to reduce written algorithms in favor of mental calculation and informal strategies. This point of view is both theoretically founded and illustrated by means of typical examples.*

„Das Verhängnis des Schülerdaseins ist, daß er viel zu rasch die einzig richtige glatte Antwort erfährt."

(ROTH, zit. nach SKOWRONEK 1968; 129)

In der Mathematikdidaktik unterscheidet man gewöhnlich folgende vier Rechentypen (vgl. PLUNKETT 1987):

a) Kopfrechnen (Alle (Zwischen-) Schritte zur Lösung einer Aufgabe erfolgen im Kopf, d.h. unter Verzicht auf jegliche Notation.);

b) Halbschriftliches Rechnen (Bei den Rechnungen werden notwendige Zwischenschritte oder Teilergebnisse notiert.);

c) Schriftliche Rechenverfahren (Auf der Basis der Stellenwertsystematik werden Ergebnisse nach festgelegten Regeln (Algorithmen) ziffernweise ermittelt.);

d) Taschenrechner.

Die *Frage nach dem Stellenwert* der einzelnen Bereiche ist in der Vergangenheit bereits mehrfach gestellt und vor dem Hintergrund der jeweiligen gesellschaftlichen, d.h. ökonomischen und technischen Gegebenheiten beantwortet worden. Es hat sich gezeigt, „daß Entwicklung und allgemeine Kenntnis (-möglichkeit) neuer Rechenverfahren für deren weite Verbreitung in der täglichen Praxis und ihre Aufnahme in den allgemeinen Schulunterricht allein nicht ausreichen. Weitaus entscheidender waren in der Geschichte und sind vermutlich auch künftig technische und ökonomische Rahmenbedingungen" (RADATZ/ SCHIPPER 1983; 102). Die genannte Frage erneut aufzugreifen, ist aus unterschiedlichen Gesichtspunkten heraus geboten:

[1] Überarbeitete und erweiterte Fassung des Eröffnungsvortrags auf dem ‚1. Symposium mathe 2000' (1991 in Dortmund). Kritisch-konstruktive Rückmeldungen zu diesem Beitrag verdanke ich den Leitern der Projektgruppe ‚mathe 2000', Herrn Prof. Dr. Erich Ch. Wittmann und Herrn Prof. Dr. Gerhard N. Müller, sowie meinen Kolleginnen und Kollegen der Projektgruppe (Martina Röhr, Johannes Kempelmann und insbesondere Petra Scherer und Christoph Selter).

1.) angesichts des normativen, gleichwohl auch empirisch untermauerten *Paradigmas des aktiv-entdeckenden und sozialen Lernens* und

2.) angesichts der Tatsache, daß billige und leistungsfähige Taschenrechner allgemein verfügbar sind.

Es muß also geprüft werden, ob die Beherrschung von Rechentechniken noch zu den wichtigsten Qualifikationen eines mündigen Erwachsenen des 21. Jahrhunderts gehört (RADATZ/SCHIPPER 1983; 47). Demzufolge ist zu diskutieren, welchen der vier Rechentypen zentrale Bedeutung zukommen wird; und das Ergebnis dieser Diskussion darf nicht ohne Folgen für den Mathematikunterricht in der Grundschule bleiben.

Die folgenden Überlegungen verstehen sich als *Plädoyer für eine Neubestimmung des Stellenwertes* der angesprochenen Bereiche. Angesichts heutiger Erkenntnisse ist eine Revision erforderlich, die sich auf die *spezifischen* Merkmale, Zielsetzungen und Stärken der jeweiligen Methoden besinnt. In gewisser Weise ist dazu der Rückgriff auf bewährte Ideen aus der Geschichte der Rechen- bzw. Mathematikdidaktik hilfreich, weshalb hier bewußt von ‚*Revision*‘ und nicht von ‚*Revolution*‘ gesprochen wird.

Ausgehend vom traditionellen Verständnis, im 1. Kapitel überblickartig skizziert, soll im Kapitel 2 die schwindende Bedeutung der schriftlichen Rechenverfahren beleuchtet werden. Aus der sich daraus ergebenden Notwendigkeit einer Neubesinnung wird das 3. Kapitel Gründe für eine Aufwertung halbschriftlicher Strategien anführen und exemplarisch illustrieren.Das 4. Kapitel skizziert abschließend das postulierte revidierte Verständnis der vier Rechenmethoden.

1 Zum traditionellen Verständnis vom Stellenwert der vier Methoden

1.1 Vorrang schriftlicher Rechenverfahren

‚Jede Stunde beginne mit Kopfrechnen‘. Die Erfüllung dieses Postulats sagt noch nichts über die *Qualität* des Unterfangens aus. Unterstellt man eine eher behavioristische Sichtweise des Mathematiklernens, so wird man allein von der *Regelmäßigkeit* der Kopfrechenpraxis eine verstärkte Behaltensleistung erwarten. Der Art und Weise der Aufgabenfolge kommt dabei nur eingeschränkte Bedeutung zu. Unter Umständen ist sie rein zufällig, etwa wenn die Lehrkraft Aufgaben stellt, die ihr im Moment einfallen. Die einzelnen Aufgaben werden sehr schnell von Anschauungs- und Einsichtsprozessen abgekoppelt und einer raschen Automatisierung im Sinne eines *Reiz-Reaktions-Mechanismus* zugeführt. Insbesondere wird damit angestrebt, daß die so verfügbar werdenden Automatismen als schnelles ‚Werkzeug‘ bei der Behandlung der schriftlichen Rechenverfahren abrufbar sind. Durch derartiges Kopfrechnen automatisierte Rechensätze haben also eine primär *dienende Funktion* (vgl. Abb. 1).

Das halbschriftliche Rechnen scheint nur eine eher ‚unelegante Durchgangsstation‘ auf dem Weg zur algorithmisierten Endform darzustellen (vgl. Abb. 1). Dies ist zum einen daran ersichtlich, daß – vor allem in Schulbüchern und damit wohl leider auch häufig in der Unterrichtspraxis – oft nur ein einziges halbschriftliches Verfahren zu finden ist. Zudem wird dieses dann vorschnell von ikonischen Anschauungshilfen abgekoppelt und sehr bald ähnlich *formal* behandelt, wie später die schriftlichen Algorithmen. Ist bei letzteren die *Endform* durch das Curriculum vorgeschrieben, so sollte es aber doch beim halbschriftlichen Rechnen darum gehen, *verschiedene* individuelle und ‚geschickte‘ Wege zu *entdecken* und zuzulassen. Anderenfalls (bei einer forcierten Formalisierung) bestünde – außer in der Kürze des Verfahrens – *prinzipiell* kein Unterschied zu den Algorithmen. Erklärtes Ziel wäre dann eine möglichst rasche und ökonomische Hinführung dorthin. Halbschriftliches Rechnen bliebe somit ein Übergang-

Quelle: Krauthausen, Günter: Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden. In: Journal für Mathematikdidaktik 14 (1993), H. 3/4, S. 189-219

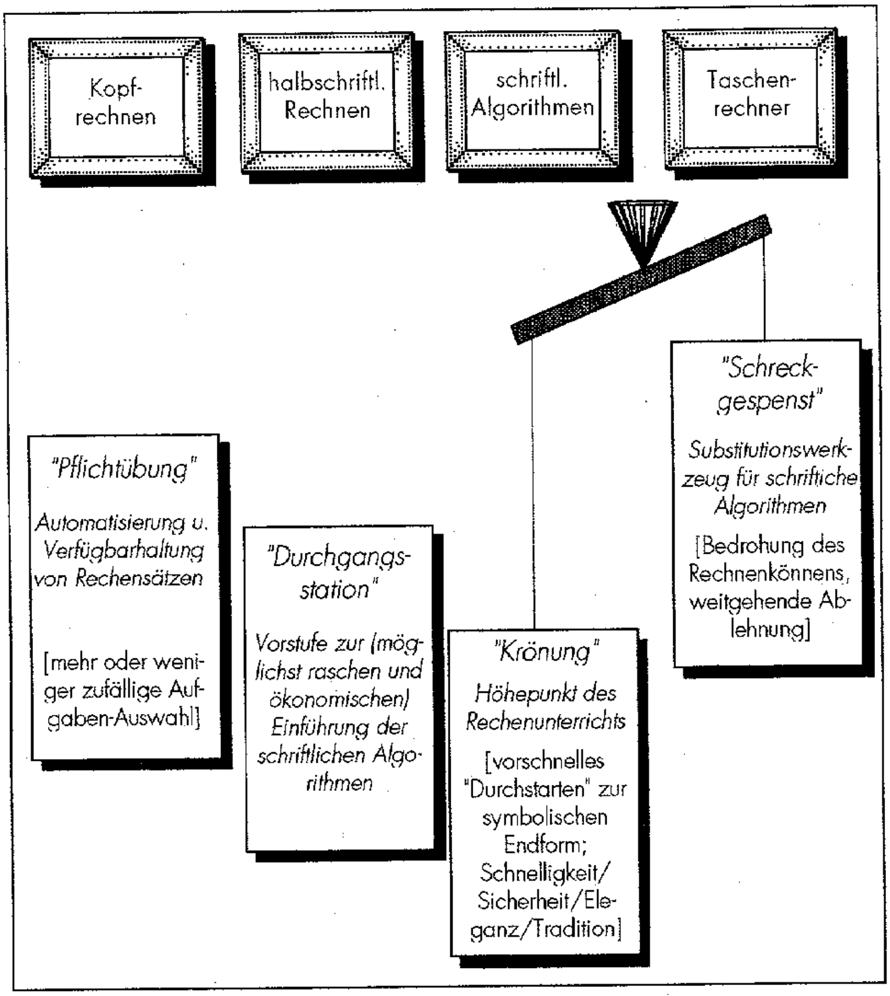


Abb. 1: Traditionelle Sichtweise[2]

verfahren, zu dessen Unterrichtsrealität RADATZ/SCHIPPER (1983; 76) bedauernd konstatieren: „Erfahrene Lehrerinnen begrenzen z.T. den Umfang des halbschriftlichen Rechnens und gehen schneller ein auf die schriftlichen Rechenverfahren".

Ab der 3. Klasse werden Kinder traditionsgemäß mit den schriftlichen Rechenverfahren vertraut gemacht. Sie stellen standardisierte Lösungsverfahren (Algorithmen) dar, mit deren Hilfe sich Aufgabentypen, für die sie konstruiert wurden, mechanisch lösen lassen, ohne daß unbedingt eine Einsicht in das Verfahren notwendig wäre (vgl. 1.2.1). Der Wert solcher Standardverfahren liegt in der Erleichterung (Rechnen mit *Ziffern*, Einspluseins, Einmaleins), der größeren Schnelligkeit bzw. Sicherheit (als Folge davon), die sie für das Lösen mathematischer Probleme bedeuten *können*. Die auf der Hand liegenden Vorteile müssen jedoch aus fachdidaktischer Sicht differenzierter betrachtet werden (s.u.).

Wenn für das Mathematiklernen in der Grundschule das Reizwort ‚Taschenrechner' in die Diskussion eingebracht wird, kann man oft mit Empörung und Ablehnung rechnen. Er stellt in den Augen vieler Lehrkräfte und Eltern ein *Schreckgespenst* dar, das am Sockel des schriftlichen Rechnens – und damit dem ‚*Höhepunkt* des Mathematiklernens in der Grundschule' – zu kratzen droht (vgl. Abb. 1). Er gilt als *Bedrohung des Rechnenkönnens*, weil er der Substitution bewährter Verfahren Vorschub leiste. Verstärkter Taschenrechnereinsatz wird gleichgesetzt mit ‚weniger Rechnen', und da Letzteres (was immer damit in dem Zusammenhang gemeint sein mag!) generell für wichtig erachtet wird, gehen die Befürchtungen bis hin zur Angst, potentielle Zukunftschancen der Schülerinnen und Schüler zu beschneiden[3]. Die vermeintliche Bedrohlichkeit des Taschenrechners hat die Diskussion stellenweise so weit *emotionalisiert*, daß eine sachliche Auseinandersetzung schwierig geworden ist.

[2] Zur Lesart der Skizze (vgl. auch Abb. 5): Je stärker die Gewichtung, desto tiefer hängt die entsprechende Erläuterung (die Unterschiede stellen lediglich tendenzhafte Einschätzungen dar).

[3] Vgl. das Symbol der Waage: Ein stärkeres Gewicht des Taschenrechners führt nach dieser Vorstellung zwangsläufig zu einer Reduktion der so hochgewichteten Algorithmen-Beherrschung.

Im folgenden sollen nun Ursachen für dieses traditionelle Verständnis, wie es in Abb. 1 zusammenfassend dargestellt ist, untersucht werden, nicht zuletzt um daraus Ansatzpunkte für die propagierte Notwendigkeit einer Neubesinnung abzuleiten.

1.2 Gründe für die Vormachtstellung der schriftlichen Rechenverfahren

1.2.1 Effizienz (per Automatisierung)

Die Vorrangstellung der schriftlichen Standard- oder Normalverfahren wird ihnen nicht zuletzt deshalb eingeräumt, weil sie äußerst effizient sein können. Diese Effektivität beruht auf bestimmten Eigenschaften von Algorithmen, deren Stärken auch für Kinder nachvollziehbar sind. Algorithmen sind *allgemeine*, *endliche*, *effektive* und *eindeutige* Verfahren zur Lösung von *Problemklassen* (vgl. BÖRGER 1986, DÄHN et al. 1974).

Das heißt zunächst einmal, daß sie für einen bestimmten Anwendungsbereich konstruiert sind (z.B. die Multiplikation) und standardmäßig *alle* Aufgaben dieser Klasse lösen, also etwa Multiplikationen mit beliebig großen Faktoren und auch in beliebigen Stellenwertsystemen.

Der Weg zur Lösung ist zum anderen *determiniert*, d.h. es ist gewährleistet, daß ein und dieselbe Aufgabe auf ein und demselben Weg jederzeit zum Ergebnis führt, unabhängig davon, welche Person (oder Maschine) das Verfahren durchführt. Daß auch eine Maschine diesen Prozeß erfolgreich durchlaufen kann, ist ein Indiz dafür, daß Algorithmen ohne jegliche Einsicht in die zugrundeliegende mathematische Struktur oder interne Begründungszusammenhänge, also rein *mechanisch* ausgeführt werden können. Voraussetzung ist lediglich die Kenntnis der *formalen Abfolge* der Teilschritte (s.u.) und die Beherrschung grundlegender Wissenselemente (z.B. Einspluseins und Einmaleins).

Wer Algorithmen ausführt (Mensch oder Maschine) „empfängt beliebige endliche einschlägige Ausgangsgrößen (Problemfälle) als Eingabe und bearbeitet diese wie in der Verfahrensbeschreibung angegeben und ohne weitere äußere Einflußnahme Schritt für Schritt (…). Die Abgeschlossenheit des Verfahrens vor äußeren Faktoren beinhaltet, daß jeder einzelne Verfahrensschritt nur von der Verfahrensbeschreibung und von der jeweiligen Rechenkonstellation abhängt, in der er ausgeführt wird; also muß jeder einzelne Verfahrensschritt elementar (lies: einfach und lokal auszuführen) sowie eindeutig und vollständig bestimmt sein und besteht die Ausführung des Gesamtverfahrens in wiederholter Anwendung elementarer Rechenschritte“ (BÖRGER 1986;3).

Eine derartige Wiederholungsprozedur bricht (nach endlich vielen Schritten) dann ab, wenn erstmals ein vorab festgelegtes *Abbruchkriterium* erfüllt ist. Der daraus resultierenden Endkonstellation läßt sich sodann das Ergebnis der Rechnung entnehmen. Als Beispiel diene der Algorithmus für die Addition: Charakteristisch für schriftliche Rechenverfahren (in Abgrenzung zu halbschriftlichen Rechenstrategien; s.u.) ist ja u.a. die Behandlung der Zahlen als Ziffernketten (‚strings‘). D.h., die Ziffernkette des Ergebnisses einer Aufgabe ergibt sich Stelle für Stelle. Die wiederholte Ausführung dieser stellenweisen Additionsvorschrift bricht ab, wenn keine weiteren (höheren) Stellenwerte mehr besetzt sind, und aus der erhaltenen Ziffernkonstellation setzt sich die Ergebniszahl zusammen.

Der deterministische Charakter (s.o.) beruht auf der Forderung nach *Eindeutigkeit* von Algorithmen, „auf Grund derer für jeden elementaren Verfahrensschritt durch die Verfahrensbeschreibung nicht nur die an den bearbeiteten Größen vorzunehmende Umformung, sondern auch derjenige Verfahrensschritt festgelegt werden muß, der als nächster auszuführen ist (…). Jedem Algorithmus unterliegt somit eine Kontrollstruktur zur Festlegung der Reihenfolge, in der die elementaren Verfahrensschritte auszuführen sind“ (BÖRGER 1986; 8 f.).

Darüber hinaus sind Algorithmen...
... verschriftlicht und damit dauerhaft und korrigierbar,
... leicht vergleichbar (da standardisiert; s.o.),
... wegen ihrer symbolischen Repräsentation potentiell vorstellungsneutral,
... ökonomisch strukturiert,
... kompakt (bedingt durch die Ausnutzung von Rechengesetzen).
Zu fragen wäre allerdings, ob die genannten Aspekte wirklich – zumindest aus didaktischem Blickwinkel – durchweg als Vorteile zu werten sind oder nicht sogar *zu kognitiver Passivität verführen* (vgl. Plunkett 1987).

Die angestrebte Beherrschung einer (formalen) Rechenfertigkeit wird nicht selten synonym für das gehalten, was man als den ‚Beitrag der Mathematik für die Bereitstellung von Kulturtechniken' ansieht. Und so gleicht die Einführung der Algorithmen oft einem vorschnellen ‚Durchstarten' zur symbolischen Endform, die es zu automatisieren gilt. Automatisierung und mechanischer ‚Drill' bestimmter Fertigkeiten können zur Reduktion mentaler Anstrengung beitragen, deren Kapazität ja naturgemäß begrenzt ist, und damit wertvolle Energien für die Erreichung höherwertiger Denkprozesse verfügbar halten. Hierin ist eine der wenigen Rechtfertigung der Mechanisierung im *geistigen* Bereich zu sehen, nämlich als ‚Service-Leistung' für die Erfüllung höherer Zwecke (Kühnel 1927, Hiebert 1990).

Bereits 1927 hat sich Johannes Kühnel zur ‚Problematik der Normalverfahren' geäußert. Zwar hält er Prozesse der Mechanisierung in bestimmten Fällen für sinnvoll und legitim (s.o.), im Bereich des Rechnens würden Normalverfahren die Kinder jedoch an mechanisches Tun gewöhnen, und zwar „auch dort, wo die Besonderheit des Einzelfalles Beachtung erheischt" (Kühnel 1927; 74). Und so resumiert er: „Ein Rechenunterricht, der Normalverfahren anstrebt, ist also eine pädagogische Versündigung" (ebd.).

Allerdings verlockt (Lehrende wie Lernende) die *Schnelligkeit* und wachsende *Sicherheit*, mit der ‚große' Rechnungen bewältigt werden können, und dies – bei entsprechendem Training – *sogar* auch von ‚schwachen' und ‚schwächsten' Schülern, bei denen man versucht ist, den Anspruch an einsichtsvolles Lernen (wenn auch sonst nicht, so doch am ehesten in diesem Bereich) zurückzunehmen und ‚wenigstens' die bloße Beherrschung der Fertigkeit zu erreichen. Den halbschriftlichen Verfahren gegenüber *wirken* Algorithmen zudem ‚eleganter' (weil optimierter und ökonomischer) und ‚mathematischer'.

1.2.2 Traditionen

Ein weiteres Argument für die seit Jahren verankerte Gewichtung der schriftlichen Algorithmen ist ihre Tradition. Leicht hält man die heute gebräuchlichen Normalverfahren gleichsam für ‚gottgegeben'. Daß es auch durchaus andere Verfahren der Ergebnisermittlung gab, als wir sie heute kennen, läßt sich jedoch leicht anhand der geschichtlichen Entwicklung belegen (Ifrah 1991, Menninger 1958, Tropfke 1921a/b bzw. 1980, zusammenfassend Radatz/ Schipper 1983, vgl. exemplarisch Abb. 2).

Historisch betrachtet lassen sich unterschiedliche Einschätzungen bzw. Gewichtungen einzelner Bereiche nachweisen. Schriftliche Rechenverfahren waren gar bis ins 16. Jahrhundert hinein noch weitgehend unbekannt, wenngleich diese Form des Ziffernrechnens bereits 820 n. Chr. vom arabischen Mathematiker Al-Khwarizmi beschrieben und um 1200 ins Lateinische übersetzt worden war. Als vorherrschende Methode galt bis dato das sogenannte ‚Rechnen auf den Linien' mit Hilfe eines Rechenbrettes (Abacus).

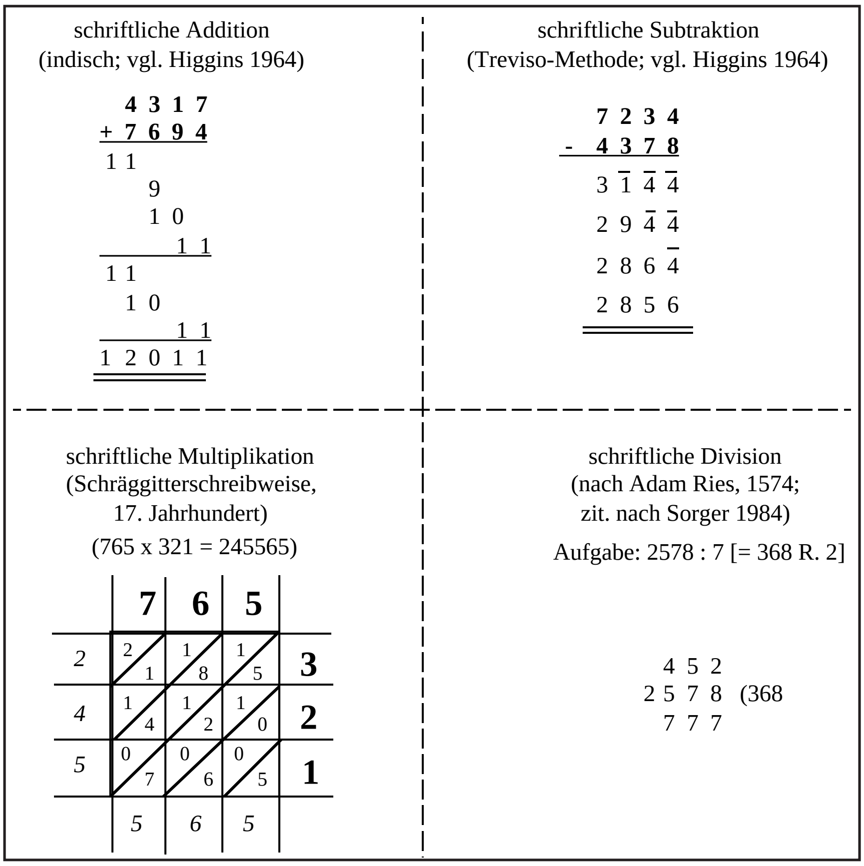


Abb. 2: Alternative Methoden

Bedingt durch eine Reihe von zeitbedingten Gegebenheiten (Fortschritt der mathematischen Wissenschaft; Aufschwung von Handel, Gewerbe und Rechnungswesen, der zunehmend nach einer Rechenkunst für Handeltreibende verlangte; die Weiterentwicklung und Verbreitung des Buchdrucks) gewann dann aber das ‚Regelrechnen‘ schnell an Bedeutung, vermittelt von der sich entwickelnden Zunft der ‚Rechenmeister‘. Es bestand zunehmend die Notwendigkeit, daß nicht mehr nur eine geistige Elite sondern jederman rechnen lernte, damit – wie Adam Ries (1492-1559) seinerzeit schrieb – *„der arme gemeine man ym Brotkauff nicht vbersetzt* (übervorteilt - d.V.) *würde“* (zit. nach Deschauer 1991; 6). Das (ziffernmäßige) ‚Regelrechnen‘ (Der Name deutet u.a. an, daß es bei der Vermittlung nicht auf *Einsicht* in Verfahrensstrukturen, sondern auf deren schlichte *Übernahme* ankam) erlaubte eine recht schnelle, ökonomische und effiziente Ergebnisbestimmung in den Grundrechenarten.

Erst am Ende des 18. Jahrhunderts fanden dann die schriftlichen Rechenverfahren als Unterrichtsinhalt Eingang in die Elementarschulen, nachdem sie zuvor der universitären und gymnasialen Bildung vorbehalten waren, und bis heute gelten sie als zentrale Elemente im Rahmen des Mathematik-Curriculums. Mit anderen Worten: „the current techniques have not always been with us – Galileo used different (more cumbersome) techniques“ (Levin 1981; 423).

Es ist aber gar nicht notwendig, auf ‚ausgefallene‘ Verfahren oder vergangene Zeiten zurückzugreifen. Auch heute sind noch, je nach lokalen Gepflogenheiten oder Lernerfahrungen, durchaus unterscheidbare Algorithmen in Gebrauch. Stellvertretend sei an jene für die schriftliche Subtraktion erinnert (Norddeutsche Methode, Süddeutsche oder Österreichische Methode, Zerlegungs- oder ‚Decomposition‘ Methode, ‚Equal-Addition‘ Methode), die sich jeweils aus der Kombination eines ‚Verfahrens‘ (Abziehen oder Ergänzen) mit – im Falle einer Stellenwertüberschreitung – einer ‚Technik‘ (Borge- oder Leihtechnik, Erweiterungstechnik, Auffülltechnik) ergeben (für eine vergleichende Darstellung s. Wiegard 1977; eine Auseinandersetzung mit verschiedenen Verfahren der schriftlichen Division mit Rest findet sich bei Winter 1973; u.a. Algorithmen aus anderen Ländern thematisiert z.B. Padberg 1992).

Es ist übrigens sehr reizvoll und durchaus lernrelevant, derartige Verfahren im Mathematikunterricht anzubieten. Ihr ‚exotisches‘ Aussehen und Funktionieren kann die Kinder verblüffen und sie damit zu einer genaueren Auseinandersetzung mit den dahinterliegenden Strukturen motivieren.

Quelle: Krauthausen, Günter: Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden. In: Journal für Mathematikdidaktik 14 (1993), H. 3/4, S. 189-219

2 Gründe für die schwindende Bedeutung der schriftlichen Rechenverfahren

2.1 Stärkere Betonung kreativerer Aspekte des Mathematik-Treibens

In den vergangenen zehn Jahren hat es eine Reihe fachdidaktischer Publikationen gegeben, die von einer schwindenden Bedeutung der Standardverfahren und der Notwendigkeit einer stärkeren Betonung von kreativeren Aspekten der Mathematik, wie z.B. dem Problemlösen, sprechen (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS 1980; COMMISSION ON STANDARDS FOR SCHOOL MATHEMATICS 1989). Im Kontext dieser Aussagen stellt sich für Lehrerinnen und Lehrer eine Reihe von Fragen: Wo bleibt das Üben und Anwenden von Routine-Aufgaben? Welche Rolle sollte die Beherrschung von Standardverfahren im Mathematikunterricht der Zukunft spielen (HIEBERT 1990)? Sollten sie überhaupt noch behandelt werden? Viele sehen einen Widerspruch in der Dualität ‚Problemlösen' bzw. ‚entdeckendes, einsichtsvolles Lernen' auf der einen und ‚Beherrschung der Normalverfahren' auf der anderen Seite.

Man ist i.a. der Überzeugung, daß die oftmalige und wiederholte Übung bzw. Anwendung der schriftlichen Rechenverfahren notwendig sei, damit die Schülerinnen und Schüler diese Algorithmen nicht vergessen. Dies mag für einfache Prozeduren gelten, bei denen in der Tat eine gewisse Übung die schnell abrufbare Verfügbarkeit fördert. Weit weniger selbstverständlich ist dies aber bei komplexeren Verfahren, etwa der schriftlichen Multiplikation mit mehrstelligen Faktoren. Hier ist ein großer Übungsaufwand nicht unbedingt der beste Weg, um sichere und dauerhafte Abrufbarkeit zu gewährleisten (vgl. die Klagen von Lehrern der weiterführenden Schulen). Wie SKEMP (1978) und HIEBERT/LEFEVRE (1986) gezeigt haben, werden derartige Verfahren eher erinnert, wenn viel Zeit darauf verwendet wurde, ihre *Bedeutung* und *Struktur* zu durchschauen. „If we want students to remember procedures, we should ask them to step back and *think about* the procedures they are using rather than *practicing more exercises*" (HIEBERT 1990; 36; Hervorhebungen GKr).

2.2 Wissen als einsichtsvolle Eigenkonstruktion

Nun mag man fragen, ob Kinder denn – und vor allem auch lernschwächere – zu diesem offeneren, selbständigen Umgang mit Komplexitäten – wenn sie denn zugelassen und auch erwünscht würden – überhaupt in der Lage sind. Wir glauben: ja, wenn Kinder frühzeitig an diese Art des Lernens und Mathematik-Betreibens herangeführt werden. Integrale Bestandteile solcher mathematischer Aktivitäten sind: Entscheidungen treffen, experimentieren, Hypothesen bilden, verallgemeinern, Modelle bilden, sich darüber austauschen, Ergebnisse interpretieren, beweisen, symbolisieren oder Muster finden (vgl. TRICKETT/SULKE 1988). Die Autoren berichten im Rahmen des Projektes ‚Schulschwache Kinder im Mathematikunterricht' von Lehrererfahrungen: Demnach wurden bei durchschnittlichen und lernschwachen Kindern bemerkenswerte Leistungen beobachtet, wenn der Mathematikunterricht in der Form offener wurde, daß man die Schüler aufforderte, ihre eigenen Lösungen zu Aufgaben zu finden und dabei ihre eigenen Wege zu gehen. Die Lehrer haben beobachtet, daß ihre Schüler sehr wohl mit Frustration und dem mit einer mathematischen Herausforderung unabdingbar verbundenen ‚Stolpern' zurechtkommen können, vorausgesetzt, daß der Unterricht in einer Atmosphäre stattfindet, in welcher Prozesse des Sich-Anstrengens positiv bewertet und ermutigend begleitet (vgl. ebd.) sowie individuelles ‚Pröbeln' und Experimentieren nicht vorschnell durch wohlmeinende und vermeintlich altbewährte Ratschläge gestört werden (vgl. GALLIN/RUF 1990).

Ausgehend von der bereits 1916 (!) formulierten These KÜHNELS „Nicht Leitung und Rezeptivität, sondern Organisation und Aktivität ist es, was das Lehrverfahren der Zukunft kennzeichnet" (KÜHNEL 1959; 70), bleibt die Frage, warum dies so schwer einzulösen ist bzw. warum es noch 70 Jahre gedauert hat, „bis sich die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens auf der Ebene der Lehrpläne durchsetzen konnte (...) Ich sehe die Hauptursache darin, daß Pädagogen und Didaktiker immer dazu geneigt haben, die didaktischen Möglichkeiten des Lehrers zu *über*- und die Möglichkeiten der Schüler zu *unter*schätzen. Trotz aller guten Vorsätze, die Lernvoraussetzungen der Schüler aufzunehmen und ihre Eigentätigkeit zu fördern, hat sich die traditionelle Didaktik stets auf Maßnahmen konzentriert, wie den Schülern etwas *beizubringen* sei, anstatt auf Maßnahmen, wie ihre Aktivität angeregt und organisiert werden könne“ (WITTMANN 1991 b; 43), was die wachsende Fähigkeit zur *Selbst-Organisation des eigenen Lernens* mit einschließt.

Wie Schüler auf die Bereitstellung aktiv-entdeckender Lernsituationen reagieren und diese einschätzen, mögen exemplarisch folgende Zitate von Kindern illustrieren, welche die Klassenlehrerin in Einzelinterviews erhoben hat, nachdem das beschriebene Vorgehen ‚auf dem Weg zur schriftlichen Addition‘ praktiziert worden war (vgl. Abb. 9 und Fußnote 6). Die Lehrerin hatte die Kinder gefragt: „Du hast lange überlegt, nachgedacht und ausprobiert, bis Du herausgefunden hast, wie man solche Aufgaben lösen kann. Ich hätte es Euch leichter machen können, wenn ich es Euch – oder auch jedem Einzelnen extra – gezeigt hätte. Wie soll ich es beim nächsten Mal machen? Soll ich erklären oder Euch selbst einen Weg herausfinden lassen?“ Bis auf einen Schüler sprachen sich alle für das Selberfinden aus. Einige Begründungen der Kinder: „Weil, wenn der Lehrer was erklärt, dann ist es komplizierter. Und so alleine – da darf man auch Fehler machen. Und es macht auch mehr Spaß und man lernt außerdem auch mehr.“ – „Weil sonst geht es manchmal zu schnell und man weiß gar nicht, was passiert. Wenn man das allein macht, hat man Ruhe und kann langsam über das Problem nachdenken – sonst weiß man nicht, was passiert.“ – „Erfinden macht eben Spaß.“ – „Es ist nicht so langweilig. Wenn´s der Lehrer erklärt, kapiert man´s nicht. So weiß man, was man macht und kapiert es.“ – „Es ist nicht so langweilig. Wenn der Lehrer was an der Tafel erklärt, muß man meistens gähnen. Außerdem macht es Spaß, wenn das Gehirn angestrengt wird.“ – „Die Methode vom Lehrer versteht man nicht. Seine eigene Methode versteht man besser.“

Diese Äußerungen bestätigen eindrucksvoll die Überzeugung von YACKEL u.a.: „We contend that not only are children capable of developing their own methods for completing school mathematics tasks but that each child has to *construct his or her own mathematical knowledge*. That is, in our view, mathematical knowledge cannot be given to children. Rather, they develop mathematical concepts as they *engage in mathematical activity*, including trying to make sense of methods and explanations they see or hear from others. The implications of this view for instruction are that children should be provided with activities that are likely to give rise to genuine mathematical problems. These problems give them the opportunity to reflect and reorganize their current ways of thinking“ (YACKEL et al. 1990; 13 - Hervorhebungen GKr).

Das impliziert nicht nur die Akzeptanz eines veränderten Lernbegriffs durch Lehrer und Schüler, sondern ebenso die Einsicht, daß damit eine Wandlung des Rollenverständnisses einhergehen muß. Kinder brauchen verstärkt Gelegenheiten, „to indulge in divergent thinking, to discover ad hoc solutions, to make a break with routine procedures, to develop and/or apply heuristic strategies (e.g. the decomposition of the multiplier, reducing a multiplication task to a summation task, etc.), to communicate, to reflect and to argue about their activities. The teacher who aims at educating should trust in children’s mathematical productivity. He should take their contributions seriously. He should conceive his role as that of a mediator between individual mathematical knowledge and the conventional mathematics he wants the children eventually to master“ (WALTHER 1984; 74).

Quelle: Krauthausen, Günter: Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden. In: Journal für Mathematikdidaktik 14 (1993), H. 3/4, S. 189-219

2.3 Kinder und Algorithmen

In der Grundschule wird verhältnismäßig viel Zeit darauf verwandt, um Kindern die schriftlichen Normalverfahren ‚beizubringen' und sie ausdauernd zu trainieren. Natürlich sollen – in Einklang mit dem Lehrplan – Algorithmen *am Ende (!)* der Grundschulzeit sicher und geläufig beherrscht, d.h. mechanisiert werden. Dabei wird aber leicht die Forderung übersehen, daß ihr *Erlernen* von *Einsicht* in die Struktur des Verfahrens begleitet sein soll (vgl. KULTUSMINISTER 1985). Gestaltet sich dieses Ansinnen bei manchen Kindern nun sehr problematisch, dann liegt – begründet in der Natur von Algorithmen (vgl. 1.2.1) – die Versuchung nahe, sich mit der Vermittlung der bloßen Handhabungskompetenz, d.h. der mechanischen Fertigkeit eines korrekten Durchlaufens der Teilschritte, zufriedenzugeben. Und so lernen manche Kinder die Algorithmen zwar richtig anzuwenden, *verstehen* sie aber nicht *wirklich*.

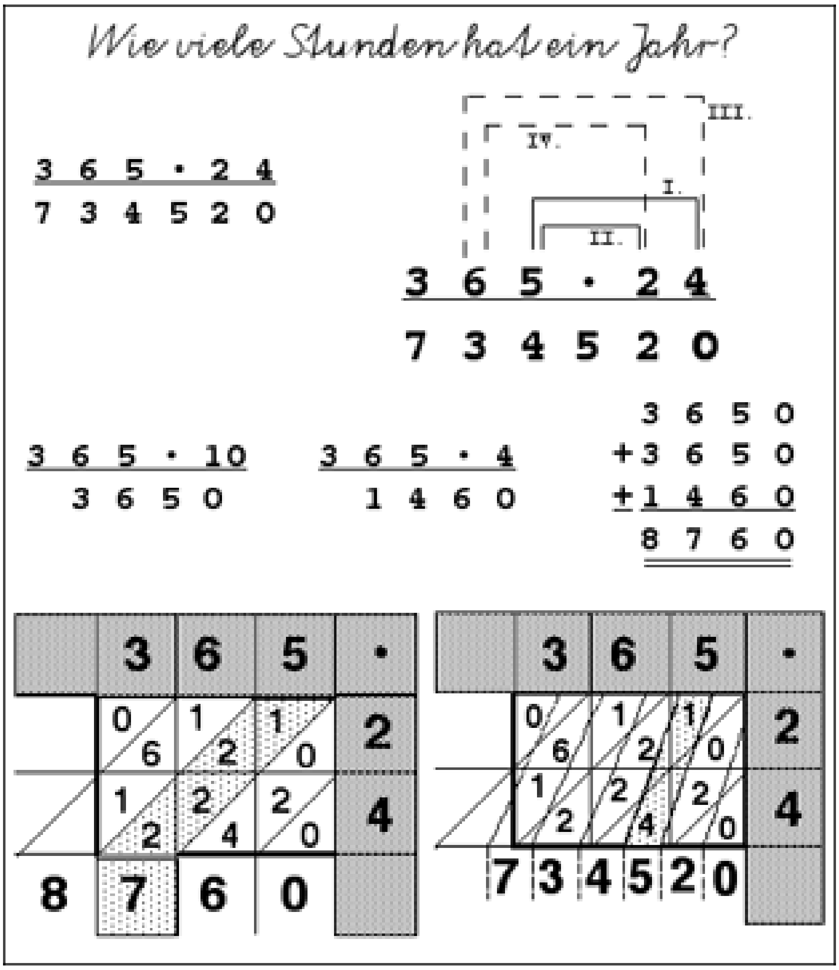


Abb. 3: Lösungsstrategie von Martin (Anfang 4. Klasse, vor der ‚offiziellen' Thematisierung) und ihre Darstellung in der Gitterschreibweise

Auf der anderen Seite sind wir – nicht zuletzt durch entsprechende Berichte von Lehrern sowie durch die Erfahrungen aus der eigenen Unterrichtspraxis – zu der Einschätzung gelangt, daß Kinder, die Schwierigkeiten mit der Ausführung der Normalverfahren haben, nicht selten die gleichen Aufgabenstellungen im Kopf oder mit anderen (z.B. halbschriftlichen) Strategien ohne weiteres lösen können (vgl. PLUNKETT 1987, GINSBURG 1977, HUGHES 1986). In der Tat, und das mag zunächst wie ein Argument für die Verfechter der bisherigen Praxis aussehen, unterlaufen ihnen dabei auch Fehler.

Getreu dem Postulat „Fehler vermeiden, statt Fehler korrigieren" fühlt sich mancher dann gedrängt, die Kinder mehr oder weniger behutsam auf die Normalverfahren zu verpflichten. KÜHNEL (1927) hat dieses Postulat relativiert und auf Fälle begrenzt, die dem Bereich mechanischer Gewöhnungen (z.B. mit dem Messer essen) oder des sittlichen Lebens zuzurechnen wären (nicht erst das Kind ‚in den Brunnen fallen lassen'). Auf dem Gebiet der geistigen Entwicklung aber sehe dies ganz anders aus, und er ist der Überzeugung: „Einen Fehler entdecken ist gerade so viel wert, wie ein Exempel richtig rechnen" (a.a.O.; 78). Und so kann die nähere Untersuchung etwa einer Fehlerstrategie wie bei Martin (vgl. 1. Lösungsweg in Abb. 3) zu einer fruchtbaren Auseinandersetzung mit der Verfahrensstruktur und den Schüler zu einem höheren kognitiven Niveau seiner diesbezüglichen Einsichten führen. Sicherlich mag es einfacher sein, ein ‚*f*' an diese Aufgabe zu schreiben, da ihr Ergebnis in der Tat falsch ist. Es hieße aber, auf wertvolle Lernanlässe zu verzichten, würde man die ‚Konsequenz' und die innere Logik des Vorgehens einfach übergehen, die durch die Schräggitterschreibweise (Abb. 3) verdeutlicht werden kann[4].

KÜHNEL plädiert dafür, die Vielfalt möglicher Verfahren in ihrer Komplexität zuzulassen und Kinder diese Mehrheit von Lösungswegen selbst finden zu lassen, wozu die Frage ‚*Wer kann es anders?*' Anlaß gibt: „Ein selbständiges Suchen, Finden und Verstehen mehrerer Lösungswege, das müssen wir an die Stelle der alten Normalverfahren setzen; es ist wirklich ein Zauberstab, dies Wörtchen: Wer kann es anders?" (a.a.O.; 80).

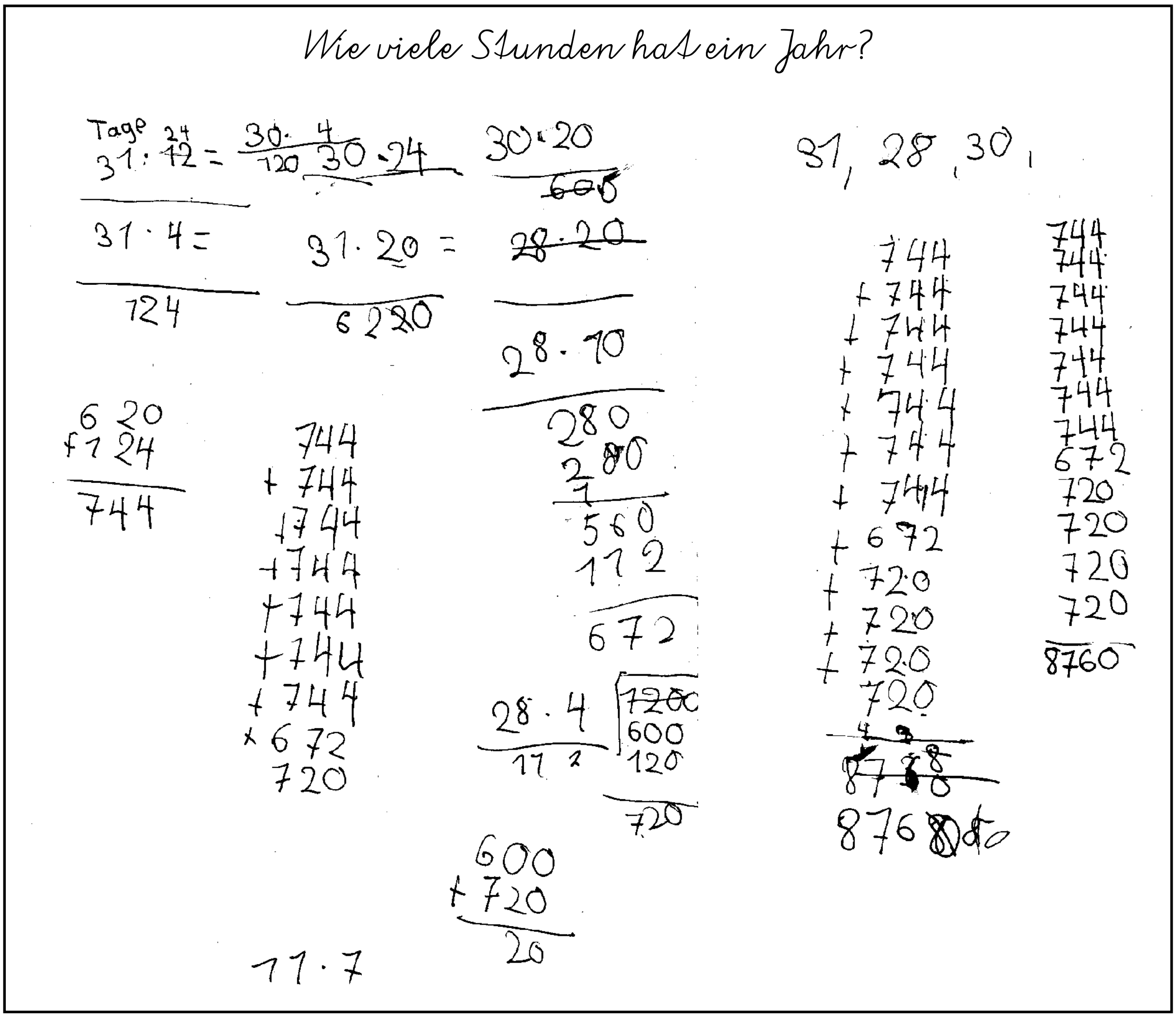


Abb. 4: Lösungsstrategie von Elena & Kerstin (Anfang 4. Klasse, vor der ‚offiziellen' Thematisierung)

Die Vielfalt der Verfahren, welche die Kinder finden, sobald sie sich auf Reflexion, auf einsichtsvolle Erkundungen (‚investigations') einzulassen beginnen (vgl. TREFFERS 1983), steht in deutlichem Kontrast zum blinden Regelgehorsam, den man so oft beobachten kann, wenn Kinder darauf trainiert werden, den Gebrauch eines verbindlich vorgeschriebenen Algorithmus zu perfektionieren. „It is the difference between ‚What was I told I am supposed to do?' and

4 Sie stammt nicht von Martin, sondern wurde hier nur gewählt, um sein Vorgehen transparenter zu machen: Es wird deutlich, daß seine Strategie durchaus einen Sinn macht und er sie zudem auch stringent durchhält. Die Ermittlung der Teilergebnisse ist durchgängig korrekt, lediglich das diagonale stellenweise Aufaddieren erfolgt ‚zu steil'.

‚How can I figure this out?'" (YACKEL et al. 1990; 14) Im Grunde ist dies nichts anderes, als ein Plädoyer für KÜHNELS ‚Zauberstab': Kinder sollten sich fragen „Wie kann ich dies herausfinden?" und dabei wissen, daß die Frage nach möglichen Lösungwegen eine von ihnen selbst zu entscheidende ist, anstatt sich ständig zu fragen: „Was hat man mir gesagt, wie ich zu verfahren habe?" und damit – „Lerngehorsam praktizierend" (SPITTA 1991; 8) – vorgegebene Erwartungen zu erfüllen (YACKEL et al. 1990; ebd.).

Ungeachtet all der Zeit und Mühe, die im Unterricht in das Lehren von Algorithmen investiert wird, verwenden Kinder (s.u.: genau wie Erwachsene) sie jedoch z.T. gar nicht. Sie betreiben Arithmetik nicht immer so, wie sie im Unterricht ‚offiziell erwünscht' ist. Natürlich benutzen sie, um sicher zu gehen, die Standardverfahren zum Rechnen, besonders wenn die Lehrkraft ihnen sagt, daß sie so vorzugehen hätten. Anstatt die Vorteile der Standardverfahren auszunutzen, die aus Lehrersicht doch auf der Hand zu liegen scheinen, bedienen sich Kinder durchaus auch anderer Methoden (vgl. GINSBURG 1977). Sie passen die Schulmathematik ihrer eigenen mentalen Struktur an, stellen Beziehungen her zwischen dem, was sie gelehrt bekommen, und dem, was sie sonst schon wissen oder können (Zählstrategien, formales und informelles Wissen), wie das Beispiel von Elena und Kerstin zeigt (vgl. Abb. 4).

Ergebnisse können erfundene Prozeduren und Mischmethoden sein, die z.T. auf traditionell algorithmisierter Arithmetik und z.T. auf individuellen Zugängen des Kindes beruhen (über Zählen, Mischung aus Zählen und erinnerten Zahlensätzen). Und was nicht immer verständlich erscheinen mag: oft empfinden Kinder ihre erfundenen Methoden einfacher, komfortabler oder sicherer als die im Unterricht gelehrten Algorithmen (vgl. GINSBURG 1977). Dabei kann es auch durchaus vorkommen, wie das Beispiel von Elena und Kerstin zeigt (Abb. 4), daß ‚unvermittelt' (?) die Strategie gewechselt wird, was aus Erwachsenensicht nicht notwendigerweise schlüssig ist, liegen doch bei den Aufgaben 31·24 und 28·24 im Grunde vergleichbare Bedingungen vor, was vielleicht auch die gleiche Strategie (31·20 und 31·4 bzw. dann auch 28·20 und 28·4) erwarten ließe (zu diesem Beispiel vgl. auch WALTHER 1984).

2.4 Alltagserfordernisse und Algorithmen

Alltagssituationen erfordern oft gar kein präzises Ergebnis. Meist reichen gewisse ‚Vertrauensintervalle' aus, und dennoch fehlt es hier oft an entsprechenden Erfahrungswerten. Fragt man Erwachsene zum Beispiel (vorausgesetzt, sie *wissen* dies nicht), wieviel Liter das größte der vier bekannten gelben Pack-Sets der Bundespost faßt, wie viele Sitzplätze die Westfalenhalle hat, wie viele km² die Bundesrepublik, welche Höhe das Empire State Building, so erzeugt man nicht selten große Verlegenheit. Die Schätzungen liegen – besonders was Flächen und Volumina betrifft – oft überraschend, wenn nicht gar erschreckend weit vom realistischen Wert entfernt (vgl. SELTER 1992 a). Die Bedeutung des Schätzens und des Überschlagrechnens ist im Vergleich zur Algorithmenbeherrschung sehr lange unterschätzt worden. Schüler sehen den Sinn oft nicht ein, sondern tun es – aufgetragen durch die Aufgabenformulierung oder die Lehrkraft – notgedrungen, als unangenehme Begleiterscheinung, bevor sie ‚richtig' rechnen (verifizieren). Dabei spielt sicher auch eine Rolle, daß es mit dem Aufkommen eines (neben dem Papier) neuen Speichermediums (elektronische Chips) möglich geworden ist, die Ergebnisermittlung selbst für sehr komplexe Aufgabenanforderungen an ein Werkzeug – den Taschenrechner – zu deligieren, das zunächst einmal durch seine Schnelligkeit und ‚Sicherheit' zu bestechen vermag und welches heute für jedermann verfügbar geworden ist (weiter unten wird noch genauer darauf eingegangen). Aber *gerade* technische Hilfen dieser Art erfordern es in besonderem Maße, Überschlags- und Approximationsmethoden (auch und v.a. im Kopf) anwenden zu können, welche eine verläßliche Plausibilitätsprüfung ermöglichen. Wohlgemerkt: Die Fähigkeit des Abschätzens, die Verfügbarkeit von Bezugsgrößen ist nicht nur im Hinblick auf

Plausibilitätsprüfungen bei Taschenrechner-Ergebnissen von besonderer Bedeutung. *Gute* Überschlagsmethoden passen sich flexibel den jeweiligen Erfordernissen an: von groben Abschätzungen bis hin zu recht hoher Genauigkeit, und dies entspricht viel eher dem halbschriftlichen als dem schriftlichen Vorgehen (s. 3.2, Beispiel 5).

Nicht zuletzt zwingen auch jene Methoden zum Überdenken, welche von Erwachsenen im Alltag *tatsächlich* benutzt werden: Die Anwendungssituationen für schriftliche Algorithmen, wie sie die Schule lehrt, sind allerorten drastisch zurückgegangen und werden in Zukunft – wie es scheint – noch weiter verdrängt (vgl. PLUNKETT 1987), denn auch die übergroße Mehrzahl von Rechenanlässen im täglichen Leben ist für Methoden zugänglich, die nicht zwangsläufig normierte Verfahren erfordern. Mehr als die Hälfte der Rechnungen wurden z.B. bei einer Untersuchung von JONES (1973, zit. in: ebd.; 44) erfolgreich mit Hilfe von Methoden bewältigt, die eben *keine* Standardverfahren darstellten (vgl. auch LEVIN 1981). Dies trifft zu sowohl für Berufsfelder, für den nicht-geschäftlichen alltäglichen Bereich wie auch für die Bedeutung im Hinblick auf innermathematische Verstehensprozesse: „A bank clerk who insisted on adding up long columns of numbers using the techniques learned in school would soon be seeking new employment“ (LEVIN 1981; 421). Daß andererseits z.B. Banken heutzutage in Aufnahmeprüfungen großen Wert auf traditionelles Rechnen legen, steht dazu nicht unbedingt im Widerspruch, sondern ist eher ein Zeichen für die Trägheit des Systems, welches sich erst mit einer gewissen Verzögerung an gesellschaftliche Veränderungen angleichen kann. Allzu oft jedoch scheinen sich Erwachsene angesichts alltäglicher Rechenanforderungen kaum jener algorithmisierter Papier-Bleistift-Methoden zu bedienen, die in der Schule mit hohem Aufwand an Zeit und Energie gelehrt werden (LEVIN 1981, PLUNKETT 1987).

Wenn 10% der Kinder am Ende des ersten Jahres in der Sekundarstufe Verständnislücken bei der Multiplikation und Division haben und 40% sogar dann noch unsicher mit diesen Operationen umgehen, wenn es sich um ganze Zahlen handelt, dann sollte das Grund zum Nachdenken sein (BROWN 1981). „On interviews it was clear that many children, and even those at higher levels, resorted to informal addition-based strategies when asked to solve practical problems. In a number of cases (...) this was due to inability to recall the standard algorithms. It may well be the case that a combination of reliable mental methods and the ability to use a calculator are sufficient for all practical puposes. If teachers do feel it worthwhile to teach pencil and paper algorithms, then either more time must be devoted to practising and recalling them, or they must be better related to children´s knowledge to assist recall. Perhaps the present methods should be abandoned in favour of others, maybe less efficient, but more related to children´s own informal methods, and hence easier to remember“ (ebd.; 47). Im folgenden wird noch aufzuzeigen sein, weshalb wir hier der letztgenannten Alternative, also einer verstärkten Berücksichtigung halbschriftlicher Strategien gegenüber einem noch weiter auszudehnenden Algorithmen-Training den Vorzug geben.

2.5 Verantwortungsvoller Umgang mit Zahlen

Ein weiteres Argument, das für eine Relativierung der Vormachtstellung schriftlicher Normalverfahren spricht, ergibt sich aus einer anderen Blickrichtung: Mathematiklernen hat nicht nur etwas mit Zahlen und Ergebnissen zu tun. Die voreilige Meinung, daß mathematische Aufgaben natürlicherweise stets zu zahlenmäßigen Ergebnissen führen müssen, deren Korrektheit und Eindeutigkeit zudem unbestreitbar sind und gleichsam zur ‚Objektivität an sich‘ erhoben werden, vernachlässigt in fragwürdiger Weise eine Komponente, die gerade in der heutigen Zeit verstärkt in den Fragehorizont zu rücken ist: die ethisch-moralische Komponente der Mathematik bzw. des Umgangs mit Zahlen.

Durch Zahlen können unüberschaubare Mengen von Informationen und Meinungen transportiert werden, und gleichzeitig kann vor dem Hintergrund der scheinbaren Objektivität wirkliche Informiertheit erschwert, Verständnis verschleiert werden, zumal wenn dieses Vorgehen beim Rezipienten mit „romantischen Fehldeutungen über das Wesen der Mathematik" (PAULOS 1990; 49) kollidiert. Aufgabe der Schule muß es daher gerade heute mehr denn je sein, einerseits Kritikfähigkeit gegenüber zahlenmäßigen Ergebnissen (als *Denkhaltung*) zu fördern (etwa gegenüber eigenen Rechenergebnissen, indem sie durch Proben oder Überschlagsrechnung auf ihre Plausibilität hin abgeschätzt werden können) und andererseits die Bereitschaft, für die eigenen ‚Produkte' auch *Verantwortung* zu übernehmen (vgl. MÜLLER 1991).

„Der Schüler muß erfahren, daß beim Rechnen nicht der Lehrer, sondern daß er selbst der Kontrolleur ist; er muß erfahren, daß im Rechnen zugemutet wird, nicht nur ein Ergebnis zu liefern, sondern es auch zu verbürgen. Ergebnisse, für die niemand bürgt, sind wertlos. Wo die Schule anders verfährt, verfälscht sie das Leben" (RÖHRL 1977; 76). Das hat Auswirkungen bis auf die Ebene der Notation benutzter Rechenwege, denn wer „für die Sicherheit seiner Ergebnisse eintreten muß, soll sich aller erreichbaren Sicherheiten bedienen. Dazu gehört die möglichst weitgehende Unterstützung des Denkens durch parallellaufendes Notieren auf dem Papier. Nicht nur um Fertig-Gedachtes mitzuteilen dient das Papier – noch viel wichtiger ist das Papier während des Denkens: als ein zusätzlicher Außenspeicher unseres Gehirns. Sonach wäre es töricht, heute noch von einer Notation zu fordern, daß sie möglichst viel Papier spart. Es wäre lächerlich, sich eine Notiz zu versagen, die hilft, richtig weiter zu denken. Nicht ‚Sauberkeit' und Sparsamkeit sind die Forderung an ein gutes Notieren, sondern Übersichtlichkeit und Greifbarkeit. Das gilt nun auch für die schriftlichen Rechenverfahren: Man wird sie so entwickeln, daß jeder so viel notieren kann, wie es ihm gerade gutdünkt; man wird das Durchstreichen einer Teilnotiz nicht als Äußerung eines Fehlers, den man besser hätte vermeiden und verbergen sollen, abwerten, sondern vielmehr das Durchstreichen – etwa im Zuge eines Probierverfahrens – sogar zur Methode erheben" (ebd.).

3 Gründe für die stärkere Betonung halbschriftlicher Strategien

Im Projekt ‚mathe 2000' am Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Dortmund[5] wird versucht, den oben genannten Erkenntnissen über Anforderungen, Charakteristika und Stellenwert der verschiedenen Rechentypen Rechnung zu tragen und sie konzeptionell und konstruktiv umzusetzen (vgl. WITTMANN/MÜLLER 1990 , 1992). Dies soll im folgenden exemplarisch aufgezeigt werden.

3.1 Lernbegriff, mathematische Inhalte und curriculare Ziele

Natürlich nimmt das Kopfrechnen einen wichtigen Platz im täglichen Unterricht ein (vgl. Abb. 5). Das ‚Blitzrechnen' als Bestandteil des Kopfrechnens umfaßt dabei mehr als die Mechanisierung von (oft zufälligen) Aufgabenfolgen (vgl. WITTMANN/MÜLLER 1990). Zwar geht es letzten Endes auch – aber eben erst *am Ende*! – um eine Automatisierung (‚schnell wie der Blitz'). Es handelt sich aber hier um eine *strukturierte Aufgabenauswahl*, und bei den Lösungen steht das *strategische Vorgehen* und *operative Verändern* im Vordergrund. Das Verständnis wird auf der Grundlage von *Anschauung* und *Einsicht* ausgiebig und verläßlich entwickelt. So stellt es eine tragfähige Basis für die Fähigkeit dar, mit ‚halbschriftlichen Methoden im Kopf' Rechenanforderungen gerecht zu werden. Kopfrechnen und halbschriftliche Methoden stehen also in einem sehr engen, sich *wechselseitig* befruchtenden Zusammenhang.

[5] Projektleitung: Prof. Dr. Erich Ch. Wittmann/Prof. Dr. Gerhard N. Müller

Weitere Vorteile kommen zum Tragen (vgl. PLUNKETT 1987): Die Rechenwege sind beispielsweise *variabel* (da nicht algorithmisiert, und somit flexibel der Aufgabe anzupassen), von *aktiver*, selbstbestimmter Natur, *ganzheitlich*, da sie nicht nur auf Ziffernrechnungen zurückgreifen, gebunden an *Einsicht und Verständnis* und oft ikonischer Natur (innere Bilder).

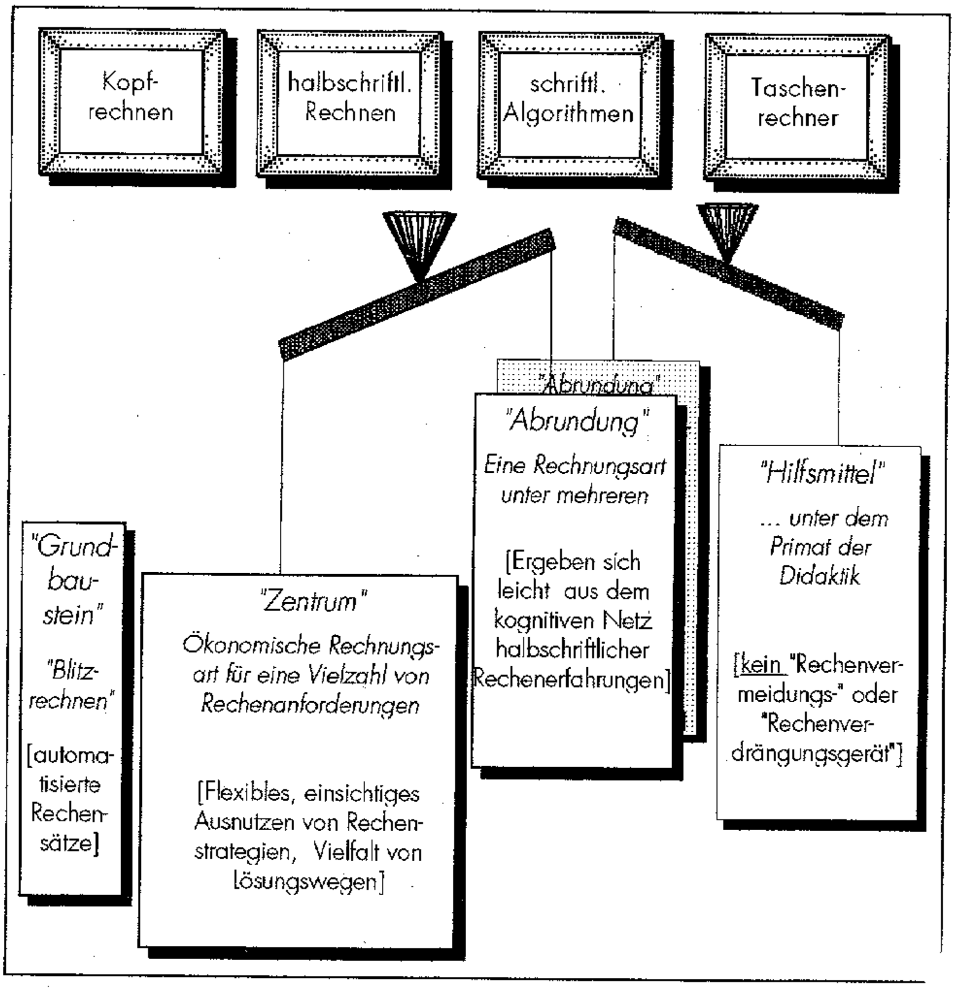


Abb. 5: Relativierte Sichtweise

Im Gegensatz zur traditionellen Position erfahren somit nach diesem Verständnis die <u>halbschriftlichen Strategien</u> eine deutliche Aufwertung (vgl. auch Abb. 1). Sie erhalten ein Eigengewicht und dienen nicht mehr alleine als Vorstufe zu den schriftlichen Algorithmen. Die konventionalisierte Form der Normalverfahren ist i.d.R. so kompakt, daß viele der ihr zugrunde liegenden strukturellen Beziehungen dadurch nicht direkt sichtbar zutage treten. Elaboriertere Notationen, wie die halbschriftlichen Strategien, bringen sie dagegen deutlicher ans Licht (vgl. 3.2). Man sollte sie daher nicht lediglich als ‚Vorspiel' auf dem schnurgeraden Weg zur algorithmisierten Endform und ihrer wiederholten Ausführung betrachten, sondern halbschriftlichen Strategien den ihnen zugehörigen *Wert an sich* zubilligen. Sie helfen nämlich, die dem Algorithmus zugrunde liegenden Regelhaftigkeiten aufzudecken, seine Systematik wirklich mit Sinn zu füllen (HIEBERT 1990). Zentral – für das Verständnis von schriftlichen Rechenverfahren wie auch für andere Bereiche des Mathematiklernens – ist die *Einsicht* in das eigene Tun. Eine Sache wirklich verstehen aber heißt, ihre Struktur zu begreifen, und nicht bloß, das zahlenmäßige Ergebnis zu kennen; und ‚Struktur' meint: präzise, klare (durch logische Beziehungen miteinander vernetzte) Konzepte.

Nach wie vor akzeptiert und vollkommen vereinbar damit ist die Zielsetzung, daß Kinder sicher und geläufig rechnen lernen sollen. Fragwürdig ist nur der Schluß, daß sie deshalb möglichst schnell und ökonomisch auf schriftliche Normalverfahren zu verpflichten sein müßten. Vielmehr geht es darum, Kindern den von Einsicht und Verstehen gekennzeichneten Erwerb von *sensiblen Rechenmethoden* zu ermöglichen. „Wir bevorzugen absichtlich den Terminus ‚**Strategien**' gegenüber dem Ausdruck ‚Verfahren', da beim halbschriftlichen Rechnen keine Normalverfahren angestrebt werden, sondern es darum geht, geschickt (‚strategisch') vorzugehen" (WITTMANN/ MÜLLER 1992; 20). Ihre Vorrangstellung läßt sich auf verschiedenen Ebenen aufzeigen:

a) Bedeutung im Hinblick auf Lernen:

Im Mittelpunkt steht *kreatives, bewegliches Denken als flexibles* (und nicht nur ‚optimiertes'!) *einsichtiges Ausnutzen von Rechenstrategien* (die hier kursiv gesetzten Begriffe spiegeln entscheidende Leitideen des – z.B. – nordrhein-westfälischen Mathematiklehrplans wieder). Bei einem solchen Umgang mit geeigneten Problemstellungen (vgl. 3.2) werden Schüleraktivitäten gefördert und gefordert, die aktiv-entdeckendes und soziales Lernen ermöglichen und unterstützen. Dazu gehört es etwa, Aufgaben gezielt zu verändern und die Auswirkungen zu betrachten, Ergebnisse zu vergleichen, Hypothesen aufzustellen und an weiteren Beispielen zu überprüfen, Auffälligkeiten, Beobachtungen oder Vermutungen zu beschreiben, zu begründen und zu diskutieren (MÜLLER/WITTMANN 1990).

b) Bedeutung im Hinblick auf mathematische Inhalte:

Es ist keineswegs gleichgültig, welche Aufgaben oder Problemstellungen für das hier propagierte Vorgehen ausgewählt werden. Nicht jede Anforderung kann das leisten, was mit halbschriftlichen Strategien auszuschöpfen wäre. Es versteht sich von selbst, daß es nicht ausreicht, (im Sinne der ‚grauen Päckchen') gehäuft halbschriftliche Rechnungen ‚abarbeiten' zu lassen.

In den diversen halbschriftlichen Strategien – darin liegt gerade ihre Stärke – sind nun (vgl. 3.2) alle *Gesetzmäßigkeiten* enthalten und v.a.von den Kindern selbst *anschaulich* zu entdecken, auf die dann letztlich auch die schriftlichen Algorithmen in ihrer formalisierten Form zurückgreifen. Komplexe Aufgaben können unter Ausnutzung von Rechengesetzen (Rechenvorteilen) in einfache Teilaufgaben zerlegt werden, wobei sich das Vorgehen auf *ganzheitliche Zahlvorstellungen und geeignete Zahldarstellungen* stützt und nicht als blosse *Ziffernmanipulation* vonstatten geht. Die Abbildungen 6 und 7 stellen *einige* (*Haupt-*)Strategien dar. Die Namensgebung erleichtert dabei eine Zuordnung und die Dis-

a) ‚Stellenwerte extra':

```
479 + 135 = 500 + 100 + 14 = 614
400 + 100
 70 +  30
  9 +   5
```

b) ‚Schrittweise':

```
479 + 135 = 609 + 5 = 614
579 +  30 + 5
```

c) ‚Vereinfachen':

```
479 + 135 = 614
480 + 134
500 + 114
```

---

a) ‚Stellenwerte extra':

```
634 - 378 = 300 - 40 - 4 = 256
600 - 300
 30 -  70
  4 -   8
```

b) ‚Schrittweise':

```
634 - 378 = 264 - 8 = 256
334 -  70 - 8
```

c) ‚Vereinfachen':

```
634 - 378 = 256
636 - 380
656 - 400
```

d) ‚Auffüllen':

```
634 - 378 = 6 + 50 + 200 = 256
      384
      434
      634
```

Abb. 6: Hauptstrategien der halbschriftlichen Addition/Subtraktion (vgl. WITTMANN/MÜLLER 1990, 1992) kussion von Rechenwegen. Kinder finden in ihren individuellen Vorgehensweisen dann durchaus noch weitere sowie Mischformen dieser Strategien (VGL. SUNDERMANN 1993).

Vor einem Mißverständnis sei jedoch gewarnt: „Ziel des Unterrichts kann es nicht sein, daß die Schüler sämtliche der o.g. Strategien fließend beherrschen. Die Schüler sollen vielmehr lernen, dieses Angebot nach ihren eigenen Möglichkeiten und Vorlieben zu nutzen. Der Nachdruck der Übungen liegt dabei auf der **bewußten Nutzung** von Strategien und der **Diskussion** über die entsprechend unterschiedlichen Rechenwege“ (WITTMANN/MÜLLER 1992, S. 22). Halbschriftliche Strategien können dem Kind anschaulich vor Augen führen, „daß es im Zahlenreich Gesetzmäßigkeiten und ‚Muster‘ gibt, und öffnen damit den Blick für eine fundamentale Idee der Arithmetik. Dieser Aspekt ist für die Grundschule besonders wichtig, weil der Unterricht dieser Stufe traditionell in der Gefahr steht, die Mathematik als System von Fakten und Rezepten für bestimmte Aufgabentypen erscheinen zu lassen“ (MÜLLER/WITTMANN 1990; 199).

Schriftliches wie halbschriftliches Rechnen beruht auf wenigen Rechengesetzen, die bei beiden Vorgehensweisen jedoch unterschiedlich deutlich zutage treten. Bei schriftlichen Algorithmen treten „Rechengesetze und auf ihnen beruhende Rechenvorteile, Zahlvorstellungen und Zahlbeziehungen (...) in den Hintergrund zugunsten genau vorgeschriebener Verfahren, die ausschließlich einem einzigen Ziel dienen: **Ergebnisse** zu bestimmen. Es ist offensichtlich, daß das mathematische Denken der Schüler weit besser durch die Beschäftigung bspw. mit Streichquadraten und Umkehrzahlen gefördert wird als durch die wochenlange Einübung von schriftlichen Rechenverfahren“ (WITTMANN/MÜLLER 1992, S. 35 f.).

a) "Malkreuz": 15 · 19 ->

•	10	9
10	100	90
5	50	45

```
150 + 135 = 285
250 +  35
```

Später schriftlich:

```
 190
+ 95
 285
```

b) "Schrittweise":

```
13 · 14 = 130 + 40 + 12 = 182
13 · 10
13 ·  4
```

c) "Hilfsaufgabe"

```
17 · 19 = 340 - 17 = 323
17 · 20 = 340
```

a) "Schrittweise":

```
          425 : 11 = 38   Rest 7
          425
          110 : 11 = 10
     Rest 315
          220 : 11 = 20
     Rest  95
           88 : 11 =  8
```

b) "Hilfsaufgabe":

```
896 : 3 = 298   Rest 2
900 : 3 = 300
```

Abb. 7: Hauptstrategien der halbschriftlichen Multiplikation/Division (vgl. WITTMANN/MÜLLER 1990, 1992)

Die Überlegenheit der halbschriftlichen Strategien gegenüber schriftlichen Algorithmen ist v.a. bedingt durch ihre größere *Nähe zur Algebra*, wodurch algebraische Zusammenhänge deutlicher offenbar werden können. So läßt sich mit schriftlichen Algorithmen zwar *zeigen*, *daß* bei einer Aufgabe oder Problemstellung bestimmte Phänomene oder Ergebnisse resultieren – Algorithmen können also *verifizieren*; sie sind aber ein ungeeignetes Mittel, um solche Beobachtungen (v.a. anschaulich) zu *begründen*. Hingegen ist es mit halbschriftlichen Strategien auch auf Grundschulniveau möglich, Aussagen darüber zu machen, *warum* etwas so ist (vgl. 3.2), und von daher kann man „gar nicht oft genug betonen, daß der **mathematisch** weiterführende Rechentyp keineswegs das schriftliche, sondern das **halbschriftliche** Rechnen ist" (WITTMANN/MÜLLER 1992, S. 134).

Auch überall dort, wo ein *Abschätzen* verlangt wird, sind halbschriftliche Methoden den schriftlichen Algorithmen überlegen, weil sie auf ganzheitlichen Zahlvorstellungen beruhen und nicht auf bloßen Ziffernmanipulationen. Überhaupt ergibt sich oft schnell eine erste Approximation, wenn man bei den größeren Stellenwerten zu rechnen beginnt (vgl. 3.2, Beispiel 5).

Die natürlichen Zahlen können dabei als *Größenbereich* betrachtet werden. Jede Zahl läßt sich als neue Einheit auffassen. Das ist nicht gebunden an das Stellenwertprinzip und erst recht nicht an die Basis 10. Die ‚Ganzheitler' kannten schon den Satz *‚Mit Zehnern rechnen wie mit Einern'*. 8·70 wird gerechnet als 8·7 Zehner = 56 Zehner = 560. Die Aufgaben 8·70 = 560 und 7·80=560 sind somit nicht einfach ‚umgedreht'. Algebraisch steckt hier sehr viel mehr dahinter:

$$8 \cdot (7 \cdot 10) \underset{\text{Assoziativität}}{=} (8 \cdot 7) \cdot 10 \underset{\text{Kommutativ.}}{=} (7 \cdot 8) \cdot 10 \underset{\text{Assoziativität}}{=} 7 \cdot (8 \cdot 10)$$

c) Bedeutung im Hinblick auf Ziele des Mathematikunterrichts:

Auch gemessen an den Lernzielen des Mathematikunterrichts, wie sie der Lehrplan ausweist (KULTUSMINISTER 1985), läßt sich eine Aufwertung der halbschriftlichen Strategien und des Kopfrechnens zulasten der Normalverfahren legitimieren. Schriftliche Rechenverfahren sind nur *ein Teil* der *inhaltlichen* Lernziele (Wissen, Kenntnisse, Fertigkeiten). Den wichtigen Bereich der *allgemeinen Lernziele des Mathematikunterrichts* berühren sie überhaupt nicht (Förderung der Kreativität, des Argumentierens, des Mathematisierens, ...). Eine Relativierung des Stellenwertes schriftlicher Algorithmen geht somit keineswegs an die Substanz des Mathematiklernens, sondern vermag gar Platz zu schaffen für – langfristig gesehen – wichtigere Lernziele, wie z.B. die Ausbildung einer positiven Einstellung zum Lernen und eines unverfälschten Bildes von der Mathematik. Diese ist nämlich „keine Menge von Wissen. Mathematik ist eine Tätigkeit, eine Verhaltensweise, eine Geistesverfassung" (FREUDENTHAL 1982; 140. Vgl. auch ASSOCIATION OF TEACHERS OF MATHEMATICS 1970; 1-6). Oder werden die damit plötzlich verfügbaren Freiräume nicht als Chance, sondern als Vakuum empfunden, das eher Angst auslösend wirkt...?

Halbschriftliche Strategien bieten die Möglichkeit, inhaltliche und allgemeine Lernziele des Mathematikunterrichts *integriert* zu verfolgen. Die spracharme, wenn nicht gar sprachlose, Übungspraxis eines auf Rezepte ausgerichteten klein- oder gleichschrittigen Unterrichts könnte mit ihrer Hilfe abgelöst werden durch ein ganzheitlich orientiertes produktives Üben, das sich auf Einsicht und aktive Konstruktion von Sinn gründet. Beschreiben, Argumentieren und Begründen schließt dabei neben sprachlichen auch nichtsprachliche Darstellungsformen ausdrücklich mit ein (Zeichnungen, Handlungen mit konkretem Material) .

3.2 Beispiele produktiver Übungsformen mit halbschriftlichen Strategien

Die im folgenden heranzuziehenden Beispiele wurden bewußt, d.h. mit einem über das primär zu Zeigende noch hinausgehenden Hintergedanken ausgewählt: Sie mögen nämlich auf den ersten Blick und gemessen an traditionellen, etwa in Schulbüchern gängigen Aufgabentypen ungewohnt, ja als ‚zu anspruchsvoll‘ erscheinen. Dabei repräsentieren sie nur schlicht und einfach Übungsformen, die jene Kriterien ernst nehmen, welche an produktive, entdeckendes Lernen zulassende Aufgaben- und Problemstellungen zu stellen sind: Sie fördern und fordern das aktive Umgehen mit elementaren arithmetischen Zusammenhängen, Beziehungen zwischen Zahlen. Sie regen an zur Entdeckung und Beschreibung der Auffälligkeiten und ‚Muster‘, sowie zu ihrer Erklärung auf *schülergemäßem* Niveau.

Zudem muß bei einer Bewertung produktiver Übungsformen auch bedacht werden, daß sie *Möglichkeiten* eröffnen, die im Unterricht keineswegs für jedes Kind bis zur oberen Grenze ausgeschöpft werden müssen. Der Lehrer kann selbst bestimmen, wie weit er mit einer Klasse oder einzelnen Schülern gehen will (bzw.: auch die Kinder selbst werden sich mehr oder weniger weit ‚vorwagen‘ wollen – vgl. 2.2: Organisation und *Selbst*organisation des Lernens).

Die Aura des ‚ungewohnt Anspruchsvollen‘ liegt u.E. vor allem auch darin begründet, daß wir Erwachsenen (oft mangels eigener konkreter Erfahrung mit einem solchen Vorgehen sowohl als Lerner wie auch als Lehrer) dies Kindern nicht ohne weiteres zutrauen mögen. Die Angst vor der Überforderung (und in der Folge die systematische Unterschätzung der Kinder in Verbindung mit einer systematischen Überschätzung didaktischen Handelns; vgl. WITTMANN 1991 a/b) ist aber wohl eher ein Problem der Erwachsenen als der Kinder. Denn sie können durchaus mit offeneren, aber substantiellen Aufgabenstellungen umgehen, wenn man es ihnen von Anfang an zugesteht und es auch – ggf. nach einer gewissen ‚Umgewöhnungsphase‘ – von ihnen erwartet. ‚*Wir bekommen das, was wir akzeptieren*‘, bringt es HIGGINS (1988; 2) auf den Punkt: „If we ask only for simple numerical answers, children will value only procedures and computational tasks. But if we ask for discussion, explanation, and elaboration – and if we *reward* these kinds of answers – then children will value understanding and meaning“ (ebd.).

<u>Beispiel 1:</u> <u>Subtraktion von Spiegelzahlen</u>

(vgl. WITTMANN/MÜLLER 1990, S. 96 ff. u. 1992, S. 33; FLOER/SCHIPPER 1989)

```
  391       815       925       834
- 193     - 518     - 529     - 438
  198       297       396       396
```

Folgende *Auffälligkeiten* (Entdeckungen) etwa treten zutage:

a) An der Zehnerstelle erscheint stets die 9.
b) Die Summe von H- und E-Stelle ergibt ebenfalls immer 9 (=> QS = 18).
c) Die Ergebnisse sind stets Vielfache von 99.

Diese Auffälligkeiten mögen zwar beobachtet werden, ihre *Begründung* ist aber aus dem hier benutzten *schriftlichen Algorithmus* heraus, zumindest für Grundschüler, recht schwierig. Die interessierte Lehrkraft wird zu diesem Zwecke auf den formalen Umgang mit Variablen, gestützt auf Kenntnisse der Stellenwertsystematik und des Algorithmus (incl. Übertrags-Methoden) zurückgreifen können, also etwa wie folgt verfahren:

H	Z	E
a	b^{10}	c^{10}
$- \; c_{1}$	b_{1}	a
$a-(c+1)$	$10+b-(b+1)$ [= 9]	$10+c-a$

d.h.: H + E =>: $a-(c+1) + 10 + c - a$

$= a - c - 1 + 10 + c - a = 9$

Diese Vorgehensweise liefert einen *formalen* Beweis für die Phänomene *a) und b)*, ist aber für den Grundschüler so kaum verständnisvoll zu erklären, da das schriftliche Verfahren die einsichtsermöglichenden Zusammenhänge verdeckt. Anschaulicher (weil die Zwischenergebnisse betonend) wird v.a. der Sachverhalt *c)*, wenn die Argumentation auf der Ebene halbschriftlicher Strategien durchgeführt wird, etwa mit der Strategie ‚*Stellenwerte extra*' (vgl. WITTMANN/MÜLLER 1990 und 1992):

<u>391 - 193 = 200 - 2 = 198</u>

300 - 100
~~90 - 90~~
1 - 3

<u>815 - 518 = 300 - 3 = 297</u>

800 - 500
~~10 - 10~~
5 - 8

Argumentation: Die Verrechnung der Hunderterstelle führt im Zwischenergebnis stets zu einem glatten Hunderter (genauer: $x\cdot 100$ mit $x=|H-E|$). Die Zehnerstellen heben sich jeweils auf. In der Einerstelle ergibt sich ebenso oft eine Verringerung um 1, wie der Unterschied zwischen H- und E-Stelle beträgt (analog zu oben: $x\cdot 1$ mit $x=|H-E|$). Mit anderen Worten: Jeder Hunderter wird jeweils um 1 verringert, ergibt also 99, bei einer Zifferndifferenz zwischen Hunderter- und Einerstelle von 400 also $4\cdot 99$, bei einer Differenz von 200 entsprechend $2\cdot 99$ [formal: $2\cdot 100-2 = 2\cdot(100-1) = 2\cdot 99$].

<u>Beispiel 2: ‚Plus und Minus'</u> (vgl. WITTMANN/MÜLLER 1992, S. 42 f.)

Die Aufgabe laute etwa 563 - 478. Das Vorgehen soll bei Anwendung der entsprechenden Algorithmen wie folgt aussehen: Man notiere den Subtrahenden (die kleinere Zahl) und ergänze ihn auf 999, was recht einfach ist, da keinerlei Überträge vorkommen können. Diese ‚Ergänzungszahl' addiere man zum ursprünglichen Minuenden der Aufgabe (größere Zahl) und vergrößere diese Summe dann noch um 1. Beim so erhaltenen Ergebnis streiche man einfach die Tausenderziffer weg und erhält das korrekte Ergebnis (die Differenz) der Ausgangsaufgabe.

Subtrahend ergänzen auf 999:

$$\begin{array}{r} 478 \\ \underline{\boxed{+\ 521}} \\ 999 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 563 \\ \underline{+\ 521} \\ 1084 \\ \underline{+\ \ \ \ 1} \\ \cancel{1}085 \end{array}$$

Ausgangszahl + Ergänzung + 1, dann Tausenderstelle durchstreichen, übrig bleibt die korrekte Differenz:

Dieser Weg muß wie ein Zaubertrick anmuten. Die Einsicht ist schwierig, wenn nicht ganz verstellt. Betrachten wir den Fall wiederum halbschriftlich, und zwar mit der Strategie ‚*Vereinfachen*' (vgl. WITTMANN/MÜLLER 1990 und 1992):

$$\underline{563 \ - \ 478 \ =}$$

$$563 \ + 521 \ \boxed{+\ 1} \ - \ \underbrace{\underbrace{478 \ + 521}_{999} \ \boxed{+1}}_{1000}$$

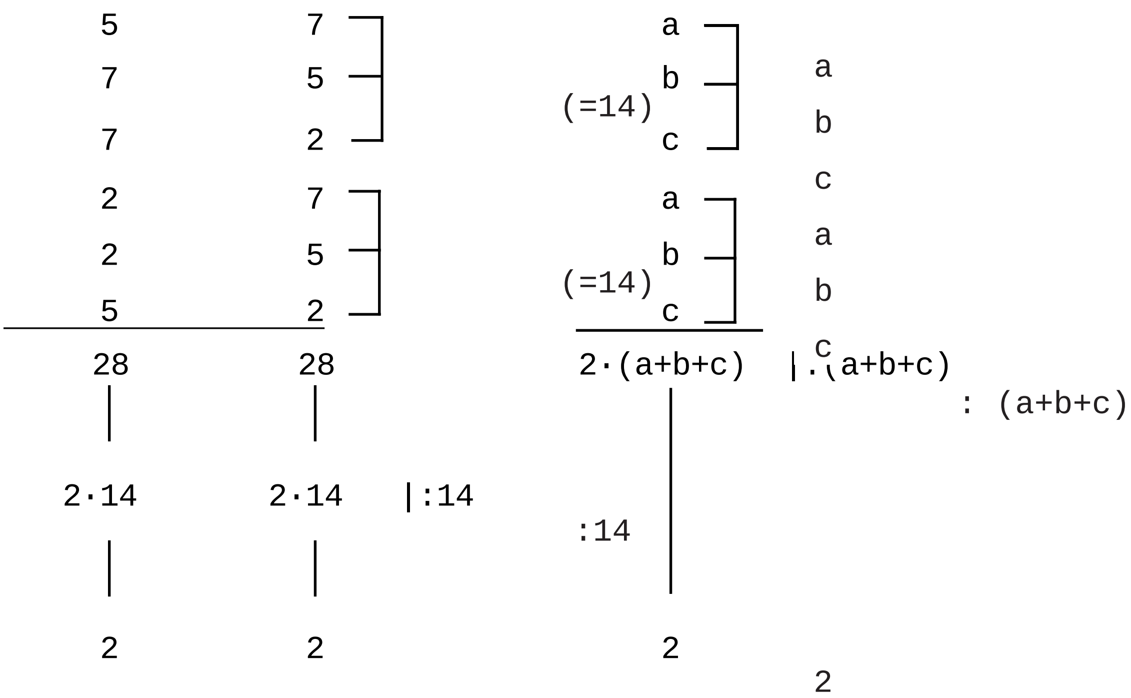
Argumentation: Die Methode des Vereinfachens bedient sich des Gesetzes der Konstanz der Differenz, welches besagt, daß der Wert einer Differenz unverändert bleibt, wenn Minuend und Subtrahend um den gleichen Betrag vergrößert bzw. verkleinert werden. Im halbschriftlichen Vorgehen wird deutlich, daß zunächst einmal beide Zahlen um 521 vergrößert werden. Im Falle des Subtrahenden entspricht dem die Ergänzung bis 999. Im Falle des Minuenden ergibt sich die Zahl 1084. Daß dadurch am Ergebnis nichts verändert wird, zeigt sich durch eine Zwischenkontrolle, denn 1084-999= 85. Das ‚Durchstreichen der Tausenderstelle' entspricht aber hier einer Subtraktion von 1000. Um dies zu bewerkstelligen werden beide (bereits einmal vergrößerten) Zahlen abermals vergrößert (Konstanzsatz), und zwar um 1 [d.h. ausgeschrieben: (1084+1) - (999+1) = 1085 - 1000 = <u>85</u>].

<u>Beispiel 3: ‚Immer 222'</u> (vgl. WITTMANN/MÜLLER 1992, S. 80 f.)

Man wähle drei verschiedene Ziffern, z.B. 2, 5 und 7. Sodann addiere man alle damit möglichen dreistelligen Zahlen, die man bei genau einmaliger Verwendung jeder Ziffer bilden kann, und dividiere die Summe durch die Quersumme der 3 Ziffern. Was fällt auf? Mittels schriftlicher Addition und Division läßt sich die Beobachtung, daß stets 222 als Ergebnis erscheint, zwar verifizieren, aber nicht anschaulich begründen:

$$
\begin{array}{r}
257 \\
275 \\
572 \\
527 \\
725 \\
\underline{+\ 752} \\
3108
\end{array}
\qquad\qquad 3108 : 14 = 222
$$

Die folgende halbschriftliche Vorgehensweise nutzt die Stellentafel aus (und liegt insofern recht nahe am Algorithmus) und legt die einsichtsermöglichende Struktur offen (‚*Stellewerte extra*‘; ein Schülerbeispiel dazu findet sich bei TREFFERS 1983 und WITTMANN/MÜLLER 1992):



Argumentation: Bei der stellenweisen Betrachtung und Summation wird erkennbar, daß die drei gewählten Ziffern (2, 5 und 7) in jeder Spalte jeweils zweimal vorkommen. Mit anderen Worten, es ergibt sich *zweimal* die Quersumme der gewählten Ziffern (28 = *2*·14). Bei Division durch die Quersumme muß sich daher zwangsläufig die ‚2‘ ergeben, und das an jeder Stelle. Erst durch diese– ansonsten ‚verpönte‘ – stellengerechte Schreibweise in der Stellentafel ohne ‚korrekte‘ Notation des Übertrags offenbart sich der Begründungszusammenhang.

Beispiel 4: Zifferntausch

Aus den Ziffern 1, 2, 3 und 4 lassen sich mehrere Produkte aus zweistelligen Faktoren bilden, z.B. 13·24 und 14·23. Lediglich die Einerziffern (bzw. die Zehnerziffern) sind hier vertauscht. Welches dieser beiden Produkte ist nun größer, welches kleiner? (Ausführlichere Anregungen zu diesem Beispiel vgl. WITTMANN/MÜLLER 1992, S. 73 f.) Wiederum ist über einen Algorithmus *verifizierbar*, welches im einzelnen das größte und welches das kleinste ist. Beim halbschriftlichen Vorgehen, hier gezeigt am Beispiel des ‚Malkreuzes', ist das zudem *anschaulich begründbar*:

•	20	4
10	200	40
3	60	12

•	20	3
10	200	30
4	80	12

Argumentation: Man erkennt in zwei Feldern identische Teilergebnisse (200 und 12) und sieht ebenso, an welchen Stellen die entscheidende, einflußnehmende Veränderung geschieht. Daraus ergibt sich eine Begründungsmöglichkeit für die Einsicht, z.B. daß die kleinere Einerziffer dorthin gehört, wo die größere Zehnerziffer steht, wenn man das größere Produkt erhalten möchte. Analog verhält es sich bei anderen Beispielen, z.B. 41·32 und 42·31.

Übrigens sind diese und weitere ähnliche Übungsformen aus dem Tausenderbuch (vgl. WITTMANN/MÜLLER 1991) zu gewinnen, wo die nach o.g. Regel gewonnenen Faktoren stets in einem 2x2-Feld liegen. So gewonnene Erkenntnisse (z.B. auch über die zwangsläufige Differenz solcher Produkte – auch bei ‚weiter auseinanderliegenden' Feldern!) lassen sich auf dreistellige Faktoren (d.h. auf alle Seiten des Tausenderbuchs) übertragen und (u.a.) mit Hilfe des Malkreuzes anschaulich begründen (vgl. SELTER 1992 b).

Beispiel 5: Abschätzen

Schriftliche Algorithmen beginnen (mit Ausnahme der Division) bei den kleineren Stellenwerten, d.h. an der für das Schätzen *unwichtigsten* Stelle (‚von rechts nach links'). ‚Abschätzen' läßt sich nun aber interpretieren als ein Teil des halbschriftlichen Vorgehens, welches an einer bestimmten Stelle, die situationsbedingt für hinreichend erklärt wird, abbricht. Zwar kann man auch z.B. bei einer schriftlichen Addition die letzten 3 Stellenwerte einfach abtrennen, gleichwohl scheint die Begründung nur für den Erwachsenen einsichtig zu sein, denn die Kinder sind es gewohnt, ziffernweise von hinten beginnend vorzugehen. Der vorzeitig abbrechende halbschriftliche Vorgang sähe hingegen wie folgt aus:

```
  617189 : 8 ≈  77000
- 560000 : 8 =  70000
R  57189
-  56000 : 8 =   7000
             M
```

oder:

```
174122 - 98482 ≈  76000
174000 - 98000 =  76000
```

Die Aufgabe 745·42 läßt sich halbschriftlich abschätzen durch das ‚*Malkreuz*', bei dem in diesem Falle bestimmte Felder weniger interessieren und deshalb einfach nicht berechnet werden. Je nach gewünschter Genauigkeit bleiben mehr oder weniger Zellen unberücksichtigt, die Approximation kann flexibel verfeinert werden. Im Gegensatz dazu sind die Zwischenergebnisse des schriftlichen Algorithmus weit entfernt vom tatsächlichen Ergebnis (vgl. LEVIN 1981)

•	700	40	5
40	28000		
2			

Diese Beispiele - weitere ließen sich anführen (vgl. WITTMANN/MÜLLER 1990 und 1992) - mögen genügen, um zu dokumentieren, daß halbschriftliche Strategien kein bloßes Anhängsel oder schneller Wegbereiter für schriftliche Algorithmen sind, sondern *per se einen Wert haben, der sie auszeichnet und sie auch schriftlichen Rechenverfahren überlegen macht.*

4 Zum revidierten Verständnis vom Stellenwert der vier Methoden

4.1 Vorrang halbschriftlicher Rechenstrategien

Individuelle Zugangsweisen und Strategien des Rechnens dürfen nicht durch Überbetonung von Algorithmen verschüttet oder ignoriert werden. HOPE (1985) bietet einen Einblick in die z.T. unglaublichen Leistungen von ‚lightning calculators', der mehr als Episodenhaftes verdeutlichen kann: *Ein* Kennzeichen, das diese Rechenkünstler u.a. auszeichnet, ist ihre Fähigkeit, sich flexibel einer großen *Vielfalt halbschriftlicher Strategien* bedienen zu können, wie sie u.a. oben beschrieben wurden (etwa das Äquivalent zum Malkreuz im Beispiel von BIDDER in HOPE 1985; 358 f.). Angesichts dieser Berichte und eingedenk des Verhaltens von Kindern beim Umgang mit Algorithmen bzw. genauer: ihres Rückbezugs auf halbschriftliche Strategien (s.o.), könnte man pointiert konstatieren: der *natürliche* Zugang zum Rechnen, den Kinder wählen, ähnelt *im Prinzip* den Praktiken vielbestaunter Rechenkünstler, bzw. anders formuliert: *Experten* der Kopfrechenkunst bedienen sich nicht algorithmisierter Methoden, sondern halbschriftlicher Strategien, die dem natürlichen Zugang von Kindern entsprechen.

Dies legt es nahe, daß die schriftlichen Rechenverfahren ihre ‚allein-seligmachende' Vorreiterfunktion aufgäben, denn „In light of the evidence for individual variation, perhaps the most fruitful course will be to provide students with a wide variety of approaches for computation, rather than any one cannonical technique" (LEVIN 1981; 433). Halbschriftliche Strategien sollten verstärkt in den Vordergrund gerückt werden, denn...

... sie sind ggf. ohne externe Hilfsmittel (Papier/Bleistift, Taschenrechner) im Kopf zu benutzen;

... sie produzieren Zwischenergebnisse, die (anders als Algorithmen) geeignete Abschätzungen mit zunehmender Genauigkeit darstellen;

... sie sind einfach und einsichtsvoll zu benutzen (und damit verläßlicher verfügbar) und

... sie sind in aller Regel, d.h. für die meisten Anforderungen und für jedermann, hinreichend effektiv (vgl. LEVIN 1981).

Andererseits soll das aber nicht heißen, daß die Standardverfahren schlagartig aus dem Mathematikunterricht verbannt würden (vgl. PLUNKETT 1987). Werden nämlich halbschriftliche Rechenpraktiken wirklich im beschriebenen Sinne realisiert, so wird es für die Schülerinnen und Schüler kein großes Problem sein, *auch* einen (‚*den*' schriftlichen) Algorithmus (optimierte Kurzform) als *eine* Möglichkeit *einsichtsvoll* daraus zu entwickeln und *letztlich* auch automatisiert anzuwenden – was aus Ökonomiegründen oft naheliegend ist (andere Gründe für die vermutlich weitere Zugehörigkeit zum Mathematikcurriculum sehen RADATZ/SCHIPPER 1983; 102 f.).

Diese Möglichkeit ergibt sich aber – anders als beim tradierten Vorgehen – in *natürlicher* Weise aus dem *kognitiven Netz* der Lernenden bzgl. der halbschriftlichen Strategien, d.h. aus der epistemischen (Wissens-) und heuristischen (Verfahrens-) Struktur (vgl. DÖRNER 1977), die sich im Laufe der einsichtsvollen Auseinandersetzung und Erfahrungen mit halbschriftlichem Rechnen ausgebildet hat. Eine *Relativierung* (nicht ‚Ausrottung', vgl. Kap. 1) der schriftlichen Verfahren zugunsten flexibler, einsichtsvoller Rechenpraxis mit halbschriftlichen Strategien und Kopfrechnen ist also sinnvoll und geboten.

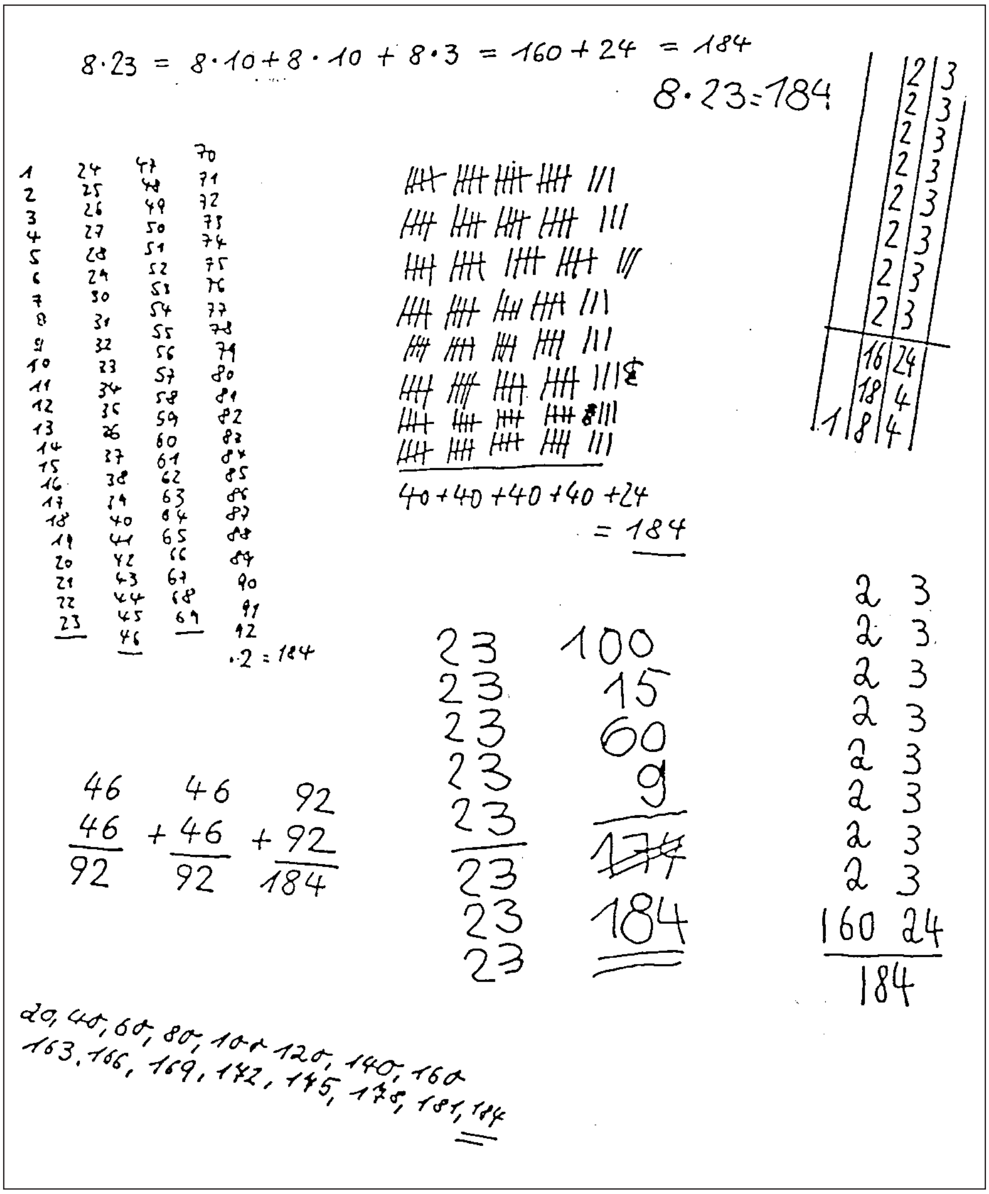


Abb. 8: Verschiedene Strategien (Anfang 3. Klasse; vgl. Treffers 1983)

TREFFERS (1983) hat überzeugend dargestellt, wie es Kindern in diesem Sinne ermöglicht werden kann, ausgehend von bedeutungsvollen Rechenhandlungen auf *natürlichen* Wegen zu den Algorithmen der schriftlichen Rechenverfahren zu gelangen: „Für den traditionellen Rechenunterricht scheint es charakteristisch zu sein, daß schriftliches Rechnen isoliert unterrichtet wird, in einem Lehrgang, der im großen und ganzen nach dem Prinzip der fortschreitenden Komplikation der Aufgaben vorgeht. Erst lernt man einziffrige Zahlen zu multiplizieren, dann etwa ein- mit zweiziffrigen, dann eine einziffrige Zahl mit einer dreiziffrigen, einziffrige mit vierziffrigen, zwei- mit zweiziffrigen, zwei- mit dreiziffrigen, zwei- mit vierziffrigen usw. Außer von der Länge der Zahlen wird die Komplexität auch von der erforderlichen Zahl der Überträge bestimmt und von der Stelle, auf der eine etwaige Null steht. Das Kompliziertere kommt an die Reihe, wenn das Einfache recht beherrscht wird" (TREFFERS 1983; 17; vgl. STREEFLAND/TREFFERS 1990).

Dem liegt oft – sowohl bei Lehrern als (folglich) auch bei Schülern – ein unzutreffendes Bild von Mathematik und Lernen zugrunde. Sie verstehen Mathematikunterricht „to be mainly courses in method, where ‚recipes' are given on ‚how to introduce the addition and multiplication of numbers', etc. Such expectations reflect an inadequate grasp of the nature of education: the imitation of procedures is preferred to meaningful learning; an ability to explain ‚how to do

Quelle: Krauthausen, Günter: Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden. In: Journal für Mathematikdidaktik 14 (1993), H. 3/4, S. 189-219

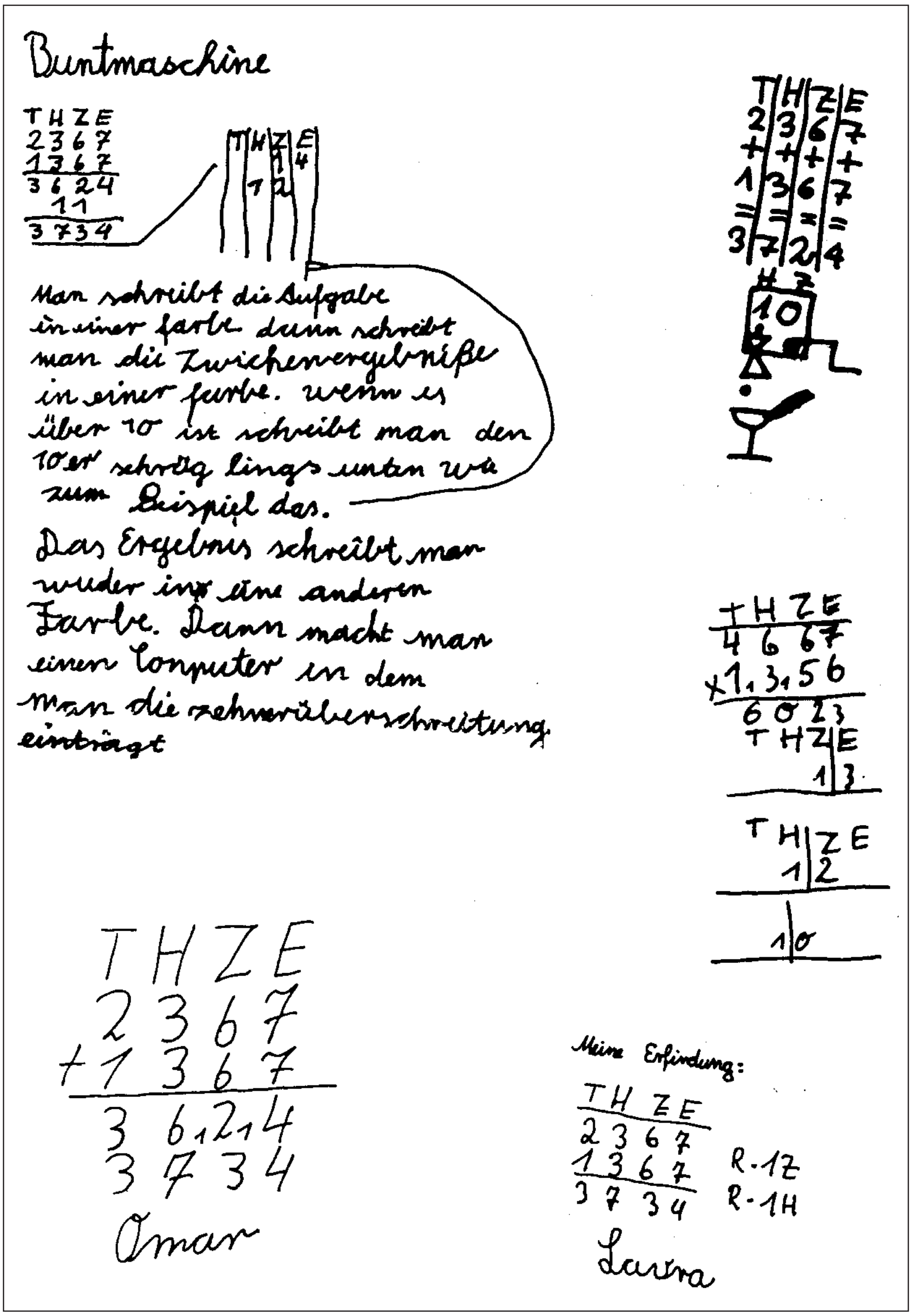


Abb. 9: ‚Erfindungen‘ zur schriftlichen Addition aus einem 3. Schuljahr (vor der ‚offiziellen‘ Thematisierung) [6]

it‘ is substituted for meaningful teaching. (...) It is thought that one can reduce difficulties by ‚atomizing‘ subject-matter into smaller and smaller portions of knowledge“ (WALTHER 1984; 69).

Der traditionellen Gepflogenheit, bei der zunächst der Algorithmus erarbeitet und dann erst zu seiner Anwendung in Sachsituationen übergegangen wird, wird hier ein Vorgehen gegenübergestellt, das eben *nicht* charakterisiert ist durch das Vorantasten vom Einfachen zum Schweren im Rahmen kleiner und kleinster Schritte. Vielmehr wird den Kindern *sofort eine komplexe, bedeutungshaltige Sachsituation* (‚Kontext‘) angeboten. Zur Lösung steht ihnen dabei frei, *zuerst* ihre *eigenen, spontanen* Lösungsstrategien und Darstellungsweisen zu entwickeln und miteinander zu vergleichen, wobei sie bisher Gelerntes reaktivieren, anwenden und miteinander in Beziehung setzen (vgl. Abb. 4 u. 8). Dadurch wird die Vielfalt gewahrt und dem Kind eröffnen sich individuelle Vorgehensweisen, über die es *selbst* entscheidet und nicht die Lehrkraft. Zudem ist ein derartiges Vorgehen auch sehr viel näher an der Realität: „In the conventional textbook (used in primary school), the task ‚365 x 24‘ is, at best, used to introduce the written algorithm in a direct way, or as an exercise to be performed after its introduction.

[6] Frau Zehnpfennig (Köln) stellte mir eine Reihe erstaunlicher Schülerdokumente aus ihrer 3. Klasse zur Verfügung (eine Auswahl zeigt Abb. 9): Individuelle Lösungen auf dem Weg zum Algorithmus („*Meine Erfindung*“) sowie Rückmeldungen der Kinder über den Unterrichtsstil (vgl. 2.2). Für ihr Engagement und ihren Entschluß, trotz anfänglicher Skepsis ein derartiges Unterrichts-Experiment durchzuführen, bedanke ich mich sehr.

But, in ‚real' mathematics, it is a rare event to find for a new problem a ready-made method of solving it. This is also the case in daily life" (WALTHER 1984; 74).

Das Spektrum legitimer Methoden, auf welche die Kinder zurückgreifen mögen, ist dabei nicht vorschnell dem Kriterium der ‚Eleganz', der Ökonomie und Standardisierung zu unterwerfen. Zuzulassen sind sowohl (aus Erwachsenensicht) ‚umständliche' Verfahren, wie z.B. die sukzessive Addition gleicher Summanden (bei einer multiplikativen Aufgabe), als auch ‚Mischformen', die entweder auf eigene ‚Erfindungen' des Kindes zurückgehen oder bereits fortgeschrittenere Methoden partiell einbeziehen (z.B. zusammenfassende ‚Zehnergriffe'; vgl. Abb. 8). Nach und nach können sich aus diesen informellen Vorgehensweisen Verfahren herausschälen, deren Maß an Verkürzung und Schematisierung langsam zunimmt (‚Prinzip der fortschreitenden Schematisierung'; vgl. Abb. 9).

Entscheidend ist dabei, daß dies alles vor dem Hintergrund *wirklicher Einsichtsprozesse* beim Kind geschieht, indem die Art und Weise der Schematisierung durch geschicktes Rechnen, strategisches Vorgehen und unter Ausnutzung von Rechengesetzen und Regelhaftigkeiten vonstatten geht (vgl. TREFFERS 1983).

Da es auch bei Kindern eine natürliche Tendenz ist, ökonomischere, kürzere, ‚schematischere' Verfahren zu favorisieren und anzuwenden – was sich beim Verstehen-Wollen und Vergleichen der von Mitschülern benutzten Lösungswege in natürlicher Weise ergibt – können sich mit entsprechender Hilfestellung schließlich die konventionalisierten Algorithmen ergeben. Während die Schüler in den ersten Phasen der individuellen und spontanen Lösungsversuche kaum einer Anleitung bedürfen, wird in den späteren Phasen der Schematisierung die Hilfestellung der Lehrkraft erforderlich, denn die letztlich angestrebten Darstellungsweisen ergeben sich nicht zwingend. „The teacher has to mediate between individual knowledge (the different ways of finding a solution) and the common knowledge that is necessary for understanding the next mathematical procedure" (WALTHER 1984; 74). Die *Endformen* der Algorithmen stellen Konventionen dar, die zumindest dann mitgeteilt werden müssen, wenn sie sich nicht im Rahmen der Schülerergebnisse oder -vorschläge ergeben sollten (vgl. WITTMANN/MÜLLER 1992; 136).

4.2 Taschenrechnereinsatz unter dem Primat der Didaktik

In Abbildung 5 sind *zwei* Waagen zu sehen, die noch eine weitere Abhängigkeit repräsentieren: ein stärkeres Gewicht auf halbschriftlichem Rechnen führt einerseits zu einer weniger starken Betonung schriftlicher Algorithmen, was andererseits wiederum zur Folge hat, daß dem Taschenrechner eine wachsende Bedeutung zukommen kann. Wie ist dies zu verstehen?

Der ‚kausale Zusammenhang' (Bild der Waage), der auch in der traditionellen Sichtweise anzutreffen war, muß hier differenzierter verstanden werden: Phänomenologisch mag ein zunehmender Taschenrechner-Einsatz zu Lasten der Anwendungshäufigkeit schriftlicher Rechenverfahren gehen. Nun halten wir dies nicht nur aus den genannten Gründen für opportun, sondern sind zudem der Überzeugung, daß man den Taschenrechner nicht – wie bislang oft geschehen – als Rechenvermeidungs- oder Rechenverdrängungsgerät verstehen darf. Seine Funktionen gehen vielmehr weit darüber hinaus, fortgefallene Rechenanlässe zu kompensieren oder diese gar erst zu verursachen. Mit Nachdruck sei daher darauf hingewiesen, daß wir die Betonung der Kopfrechenpraxis und die Entwicklung eines Gefühls für Größenordnungen (Zahlvorstellungen) für unbedingte Voraussetzungen eines sinnvollen Taschenrechnereinsatzes erachten, wenn man nicht der Gefahr erliegen will, daß sein Einsatz beim blinden ‚Einhacken' von Ergebnissen ohne Kontrollmöglichkeiten stehen bleibt. „Even given the world´s most sophisticated computer, people still maintain a vital role. There is a saying in the computer world: ‚Garbage in, garbage out'. When using a computer or calculator, there is still a vital need for the user to check the results for sensibleness" (LEVIN 1981; 423).

Ein *effektiver Einsatz* des Taschenrechners wird ermöglicht durch Rückgriff auf seine *erweiterten Funktionen*, die stets vor dem *Primat der Didaktik* zu bestehen hätten, und SPIEGEL (1988) hat diesbezügliche Möglichkeiten aufgewiesen, die hier nur schlagwortartig erinnert werden sollen (vgl. dazu auch FLOER 1990). Statt Routinerechnen mit großen Zahlen geht es mehr um die Betonung ...

... der Erfassung von Zahlbeziehungen,

... des Überschlagsrechnens und generell

... der Sensibilität für Zahlen.

Ein Einsatz des Taschenrechners muß didaktisch überzeugend gestaltet und im Dienste klassischer Lernziele des Arithmetikunterrichts durchgeführt werden. Aus dieser Prämisse entwickelt SPIEGEL (1988) unterschiedliche Funktionen, die der Taschenrechner somit übernehmen könnte:

- *Instrument zur Ergebniskontrolle*

Diese Form der Überprüfung kann den Kindern u.U. einen angstfreieren Umgang mit Fehlern ermöglichen, da sie nur dem Kind selbst gemeldet und nicht durch Außenstehende sanktioniert werden. Es ist übrigens möglich, daß der Taschenrechner dabei nur eine *indirekte* Kontrolle liefert. D.h. der Schülerin oder dem Schüler wird zwar die Rückmeldung gegeben, daß etwas falsch gerechnet wurde, ohne daß jedoch das korrekte Ergebnis gleich mitgeliefert wird. Diese Praxis erlaubt und provoziert ein erneutes Nachdenken, Überprüfen und Eindringen in die strukturellen Zusammenhänge, ein allmähliches Annähern an die Lösung.

- *Produktion von Beispielmaterial bzw. Aufgaben zum Entdecken von Gesetzmäßigkeiten*

Im Zusammenhang z.B. mit operativen Veränderungen (‚Was geschieht, wenn...?') von Aufgaben oder Problemstellungen ist es oft recht mühsam und zeitintensiv, eine entsprechende Fülle von Beispielen auf schriftlichem oder halbschriftlichem Wege zu produzieren, um dann eine Erkundung zugrundeliegender Regelhaftigkeiten zu beginnen. Wenn daher Lernziele wie Kreativität oder Argumentationsfähigkeit im Vordergrund stehen, kann der Taschenrechner von der (dann sekundären) reinen Rechenarbeit entlasten und damit geistige Kräfte freihalten für verständigen und begründenden Umgang mit den Gesetzmäßigkeiten.

- *Anlaß für neuartige Problemstellungen*

z.B. durch Tastenbeschränkungen (einige Tasten werden als nicht funktionsfähig angenommen bzw. für die Benutzung ‚gesperrt'), durch Korrektur falscher Eingaben.

- *Bestandteil mathematischer Spiele, etwa zum Training von Grundfertigkeiten und kognitiver Strategien*

- *Ergebnisermittlung von (meist Anwendungs-) Aufgaben,*

bei denen der Schwerpunkt eher auf anderen Aspekten ruht als auf dem bloßen Rechnen. Hier fördert der Einsatz des Taschenrechners die Konzentration auf die Sachsituation, auf die Fähigkeit, sie angemessen in arithmetische Operationen umzusetzen und allgemein auf strategische Aspekte von Problemlöseprozessen. Zudem eröffnen sich für die Bearbeitung auch *realistischere* Situationen, die – anders als die oft an Unterricht angepaßten – keine Rücksicht auf bereits thematisierte Zahlenräume zu nehmen pflegen. Sie können vielmehr mit sehr großen/kleinen Zahlen zu tun haben, die nicht unbedingt mit dem arithmetischen Rüstzeug des jeweiligen Kindes in vertretbarer Zeit und mit annehmbaren Aufwand zu lösen sein werden (vgl. MÜLLER 1991).

• *Anlaß zur Auseinandersetzung mit eher metakognitiven Fragestellungen*

z.B.: - Was macht man und warum besser mit einem TR?
- Wie schützt man sich vor falschen Ergebnissen und was muß man dazu gut können?

Solche oder ähnliche Funktionen des Taschenrechners liegen auch dem englischen CAN-Projekt (Calculator-Aware Number curriculum) zugrunde. Ausgehend von der jederzeitigen Verfügbarkeit von Taschenrechnern, die auch für Kinder längst keine unzugänglichen oder etwa schwer handhabbaren Werkzeuge mehr darstellen, werden sie dort bereits von Klasse 1 an eingesetzt (vgl. auch SHUARD et al. 1991).

Die Kinder selbst entscheiden bei CAN, ob sie Rechenanforderungen mit dem Taschenrechner, halbschriftlich (Algorithmen werden nicht mehr unterrichtet) oder im Kopf bewältigen. Die CAN-Philosophie wird wie folgt beschrieben: „It is taken for granted that all children who are working on CAN always have a calculator available to use, whenever it is needed. The emphasis of the number work of the project is on understanding of number and the ability to use numbers in a variety of situations, and in a variety of problem-solving and investigational activities. Children should feel familiar and comfortable with numbers; calculations are done mentally or with the calculator. Much of the work is investigational, or is based on problem solving. Discussion and practical work also make an important contribution. The standard pencil-and-paper methods of calculation are not taught, although children are still encouraged, of course, to use pencil and paper when they need to record their work“ (Projekt-Paper; 5).

Die beschriebenen Effekte des Projekts sind nominell zweifellos begrüßenswert: seitens der Kinder größere kognitive Bewußtheit, bessere Einstellungen zum Fach, mehr Verantwortlichkeit für das eigene Lernen, gewachsenes Selbstvertrauen und Vertrauen in die eigenen Ideen; und für die Lehrer bessere Möglichkeiten, Kinder beim Lernen zu beobachten und Einsicht in ihre Gedankengänge zu gewinnen. Aber sie sind nicht notwendigerweise allein dem möglichst frühzeitigen Taschenrechnereinsatz zu verdanken. Vielmehr sind dies Effekte, die sich bei einem aktiv-entdeckenden Lernen, wie wir es in diesem Beitrag in den Vordergrund gestellt haben, zeigen. „CAN has changed the styles of teaching and learning, but it is not certain how far it is the calculator itself that has produced the changes. (...) It is not just the calculator, it is the approach“ (Projekt-Paper; 22) und der war auch in diesem englischen Projekt ausdrücklich „more than just using the calculator“ (ebd.; 8).

Dem Taschenrechner also seine Funktionen absolut zubilligend, plädieren wir jedoch nicht für seinen Einsatz vom ersten Tag der Grundschule an. Auf der Basis der *primären*

... Ausbildung sicherer Zahlvorstellungen,

... Automatisierung eines fest umrissenen Bestandes von Kopfrechenfertigkeiten (‚Blitzrechnen‘) und

... flexiblen Nutzung halbschriftlicher Strategien (vgl. WITTMANN/MÜLLER 1992, S. 3 f.)

in Verbindung mit einem verläßlichen Gefühl für Größenordnungen steht allerdings auch nicht zu erwarten, daß der Taschenrechner überflüssig oder gar kontraproduktiv für einen fundierten Rechenunterricht sein wird, vorausgesetzt er wird unter den genannten Rahmenbedingungen eingesetzt.

Literatur:

Association of Teachers of Mathematics (1970): Modelle für den Mathematikunterricht der Grundschule. Stuttgart

Börger, E. (1986): Berechenbarkeit, Komplexität, Logik. Eine Einführung in Algorithmen, Sprachen und Kalküle unter besonderer Berücksichtigung ihrer Komplexität. Braunschweig

Brown, Margaret (1981): Number Operations. In: Hart, K. M. (ed.); 23-47

Commission of Standards of Mathematics (1989): Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston

Cooney, Thomas J./Hirsch, Christian R. (1990): Teaching and Learning Mathematics in the 1990s. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)

Dähn, G. et al (1974): Algorithmen - Schriftliche Rechenverfahren. Mathematik, Kurs für Grundschullehrer. Heft E 11. Deutsches Institut für Fernstudien. Tübingen

Deschauer, Stefan (1991): ...macht nach Adam Riese. Adam Ries - ein Forschungsprojekt zum 500. Geburtstag des Rechenmeisters. In: AGORA, Zeitschrift der Kath. Universität Eichstätt 7 (2); 3-7

Dörner, Dietrich (1979): Problemlösen als Informationsverarbeitung. Stuttgart

Floer, Jürgen (1990): Taschenrechner in der Grundschule? In: Die Grundschulzeitschrift, H. 31; 26-28

Floer, Jürgen/Schipper, Wilhelm (1989): Schülerarbeitskartei „Spiegelzahlen". In: Die Grundschulzeitschrift, H. 23; 55-59 und H. 24; 53-58

Freudenthal, Hans (1982): Mathematik - eine Geisteshaltung. In: Grundschule, H. 4; 140-142

Gallin, Peter/Ruf , Urs (1990): Sprache und Mathematik in der Schule. Zürich

Ginsburg, Herbert (1977): Children´s Arithmetic – the learning process. New York

Hart, K. M. (ed.; 1981): Children´s Understanding of Mathematics: 11-16. Oxford

Hiebert, James (1990): The Role of Routine Procedures in the Development of Mathematical Competence. In: Cooney, Thomas J./Hirsch, Christian R. (1990); 31-40

Hiebert, James/Lefevre, Patricia (1986): Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In: Hiebert, James (ed.): Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics; 1-27. Hillsdale, N.J

Higgins, Jon S. (1964): Addition and Subtraction. In: Math. Gazette 48; 185-187

Higgins, Jon S. (1988): One Point of View: We Get What we Ask For. In: Arithmetic Teacher, No. 5; 2

Hughes, M. (1986): Children and Number – Difficulties in Learning Mathematics. Oxford

Hope, Jack A. (1985): Unravelling the mysteries of expert mantal calculation. In: Educational Studies in Mathematics 16; 355-374

Ifrah, Georges (1991): Universalgeschichte der Zahlen. Frankfurt/M.

Kühnel, Johannes (1959): Neubau des Rechenunterichts. Düsseldorf

Kühnel, Johannes (1927): Die Problematik der Normalverfahren. In: J. Kühnel: Vier Vorträge über neuzeitlichen Rechenunterricht. Leipzig

Kultusminister des Landes Nordrhein-Westfalen (Hg., 1985): Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. Düsseldorf

Levin, James A. (1981): Estimation techniques for arithmetic: everyday math and mathematics instruction. In: Educational Studies in Mathematics 12; 421-434

Menninger, Karl (1958): Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl. Göttingen

Müller, Gerhard N. /Wittmann Erich Ch. (1990): Beschreiben und Begründen im Rahmen von Rechenübungen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht; 197-200. Bad Salzdetfurth

Müller, Gerhard N. (1991): Mit der Umwelt muß man rechnen. In: Gesing, H./Lob, R.E. (Hg.): Umwelterziehung in der Primarstufe; 225-240. Heinsberg

National Council of Teachers of Mathematics (1980): An Agenda for Action. Reston

Padberg, Friedhelm (1992): Didaktik der Arithmetik. Mannheim

Paulos, John Allen (1990): Zahlenblind. Mathematisches Analphabetentum und seine Konsequenzen. München

Pimm, David (1988, ed.): Mathematics, teachers and children. London

Plunkett, Stuart (1987): Wie weit müssen Schüler heute noch die schriftlichen Rechenverfahren beherrschen? In: mathematik lehren, H. 21; 43-46

Radatz, Hendrik/Schipper, Wilhelm (1983): Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Hannover

Röhrl, Emanuel (1977): Normierte schriftliche Rechenverfahren - Von der Lächerlichkeit, mit Papier und Bleistift zu rechnen. In: Grundschule, H. 2; 75-81

Selter, Christoph (1992 a): „5 vor 12“ – Zur elementarmathematischen Performanz von angehenden GrundschullehrerInnen. Manuskript. Universität Dortmund

Selter, Christoph (1992 b): Das Tausenderbuch - Struktur und produktive Übungsformen. Manuskript. Universität Dortmund

Shuard, Hilary et al. (1991): Calculators, children, and mathematics. Hemel Hempstead

Skemp, Richard R. (1978): Relational Understanding and Instrumental Understanding. In: Arithmetic Teacher 26 (Nov.); 9-15

Skowronek, Helmut (1968): Psychologische Grundlagen einer Didaktik der Denkerziehung. Hannover

Sorger, Peter (1984): Die Schreibweise der schriftlichen Division mit Rest – ein vertracktes und ach so typisch deutsches Problem! In: Grundschule, H. 4; 50-51

Spiegel, Hartmut (1988): Vom Nutzen des Taschenrechners im Arithmetikunterricht der Grundschule. In: Bender, Peter (Hg.): Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter; 177-189. Bielefeld

Spitta, Gudrun (1991): Sprachliches Lernen - Kommunikation miteinander oder Kommunikation mit der Kartei? In: Die Grundschulzeitschrift, H. 41; 7-12

Streefland, L./Treffers, Adry (1990): Produktiver Rechen-Mathematik-Unterricht. In: Journal für Mathematikdidaktik , H. 4; 297-322

Sundermann, Beate (1993): Halbschriftliche Addition und Subtraktion im Tausenderraum – Entwicklung von informellen Rechenstrategien. Schriftliche Hausarbeit zur 2. Staatsprüfung. Bochum

Treffers, Adry (1983): Fortschreitende Schematisierung, ein natürlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr. In: mathematik lehren, H. 1; 16-20

Trickett, Liz/Sulke, Frankie (1989): Low attainers can do mathematics. In: Pimm (1988, ed.); 109-117

Tropfke, Johannes (1921a): Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Erster Band: Rechnen. Berlin

Tropfke, Johannes (1921b): Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Zweiter Band: Allgemeine Arithmetik. Berlin

Tropfke, Johannes (1980): Geschichte der Elementarmathematik. Bd. 1: Arithmetik und Algebra. Göttingen

Walther, Gerhard (1984): Mathematical activity in an educational context: a guideline for primary mathematics teacher training. In: Morris, Robert (ed.): Studies in mathematics education; 69-88. Paris

Wiegard, Armin F. (1977): Vergleichende Darstellung schriftlicher Subtraktionsverfahren in Deutschland und den USA. In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, H. 12; 608-611

Winter, Heinrich (1978): Zur Division mit Rest. In: Der Mathematikunterricht, H. 4; 38-65

Wittmann, Erich Ch. (1991 a): Das neue Profil der Grundschule im Verbundsystem allgemeine Bildung/ berufliche Bildung/Weiterbildung: Förderung einer aktiv-entdeckenden und sozialen Lernhaltung. In: Grundschule, H. 11; 48-50

Wittmann, Erich Ch. (1991 b): Die weitere Entwicklung des Mathematikunterrichts in der Grundschule - was muß sich bewegen? In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 25. Bundestagung für Didaktik der Mathematik; 41-48. Bad Salzdetfurth

Wittmann, Erich Ch./Müller, Gerhard N. (1990): Handbuch produktiver Rechenübungen, Bd. 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart

Wittmann, Erich Ch./Müller, Gerhard N. (1991): Das Tausenderbuch. Erklärung seiner Struktur und Vorschläge für die Unterrichtspraxis. Stuttgart

Wittmann, Erich Ch./Müller, Gerhard N. (1992): Handbuch produktiver Rechenübungen, Bd. 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Stuttgart

Yackel, Erna et al. (1990): The Importance of Social Interaction in Children's Contribution of Mathematical Knowledge. In: Cooney, Thomas J./Hirsch, Christian R. (1990); 12-21