Universität
Gesamthochschule Paderborn Fachbereich 17 · Mathematik - Informatik

Graduierte Cohen-Macaulay Moduln und ihre Vervollständigungen

Diplomarbeit

von

Dirk Kussin

Paderborn, September 1993

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird der Komplettierungsfunktor

$$\widehat{\cdot} : \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R) \longrightarrow \mathrm{CM}(\widehat{R}),\ M \mapsto \widehat{M}$$

untersucht, der jedem $\mathbb{Z}$-graduierten Cohen-Macaulay Modul über R einen Cohen-Macaulay Modul über $\widehat{R}$ zuordnet. Hierbei ist R eine $\mathbb{Z}$-graduierte Cohen-Macaulay Algebra, die auch nichtkommutativ sein darf.

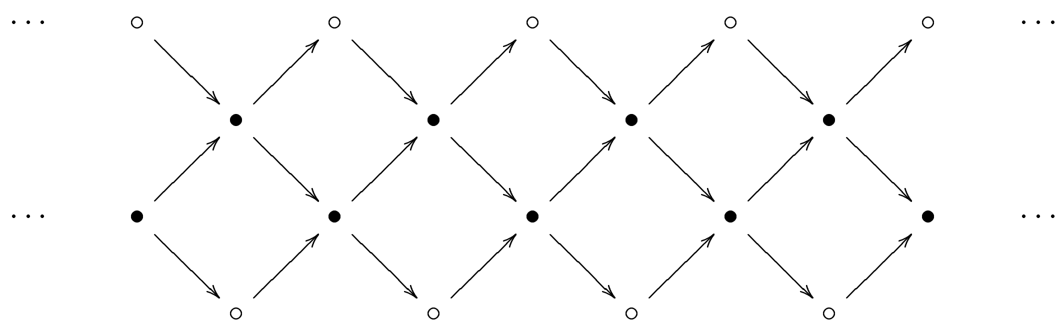
Die darstellungstheoretischen Eigenschaften des Komplettierungsfunktors wurden zuerst von M. Auslander und I. Reiten untersucht (vgl. [8] und [10]). In der vorliegenden Arbeit wird jedoch ein anderer Zugang zum Konzept der Vervollständigung gewählt. Dieser benötigt weder topologische Begriffe noch Kenntnisse von inversen Limiten. Ist $M = \bigoplus M_n$ ein graduierter R-Modul, so wird einfach

$$\widehat{M} := \prod_{n \in \mathbb{Z}} M_n$$

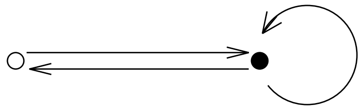
gesetzt. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Graduierungen von R und M nach unten beschränkt sind, kann man $\widehat{R}$ zu einer Algebra und $\widehat{M}$ zu einem $\widehat{R}$-Modul machen.

Eine wichtige Eigenschaft des Komplettierungsfunktors ist, daß er eine Galois-Überlagerung mit Gruppe $\mathbb{Z}$ ist, wenn $\widehat{R}$ endlichen Cohen-Macaulay-Typ hat, d.h. wenn es bis auf Isomorphie nur endlich viele unzerlegbare Cohen-Macaulay Moduln über $\widehat{R}$ gibt. Dies bedeutet, daß sich der Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(\widehat{R})$ von $\widehat{R}$ (das ist ein gerichteter Graph, dessen Knoten die unzerlegbaren Cohen-Macaulay Moduln über $\widehat{R}$ repräsentieren, und dessen Pfeile für spezielle Abbildungen (die sogenannten irreduziblen Morphismen) stehen) aus dem Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(R)$ von R konstruieren läßt, indem man zu dem Köcher $\Gamma(R)/\mathbb{Z}$ der $\mathbb{Z}$-Bahnen übergeht ($\mathbb{Z}$ operiert auf den graduierten R-Moduln mittels Verschiebung).

Dies soll an einem Beispiel verdeutlicht werden: Man möchte den Auslander-Reiten-Köcher der einfachen Kurvensingularität $S = k[[X,Y]]/(X^3+Y^2)$ vom Typ (A_2) über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k bestimmen. Sei $R = k[X,Y]/(X^3+Y^2)$ die $\mathbb{Z}$-graduierte Cohen-Macaulay Algebra, wobei die Graduierung durch $\operatorname{grad} X = 2$ und $\operatorname{grad} Y = 3$ definiert wird. Es gilt $\widehat{R} = S$. Der Auslander-Reiten-Köcher von R hat die Form



(vgl. Simson [24]). Hierbei bilden die schwarzen Punkte eine $\mathbb{Z}$-Bahn, die durchsichtigen eine andere. Übergang zu den Bahnen liefert den Auslander-Reiten-Köcher von S:



Das obige überlagerungstheoretische Ergebnis ist Folge mehrerer Einzelergebnisse, die auch für sich genommen interessant sind. Es gilt unter der Voraussetzung, daß $\widehat{R}$ endlichen Cohen-Macaulay-Typ hat:
— Sind M und N unzerlegbar in $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$, so gilt $\widehat{M} \simeq \widehat{N}$ genau dann, wenn M und N isomorph bis auf Verschiebung sind (wenn also M und N in derselben $\mathbb{Z}$-Bahn im Auslander-Reiten-Köcher liegen).
— Der Komplettierungsfunktor bewahrt Unzerlegbarkeit, Auslander-Reiten-Folgen (eine spezielle Klasse kurzer exakter Sequenzen) und irreduzible Morphismen.
— Der Komplettierungsfunktor ist repräsentativ (d.h. jeder Cohen-Macaulay Modul über $\widehat{R}$ ist von der Form $\widehat{C}$ für einen graduierten Cohen-Macaulay Modul C).
Diese Sätze werden im zweiten und dritten Kapitel bewiesen.
Im vierten Kapitel wird allgemeiner die Vervollständigung entlang einer unendlichen zyklischen Gruppe U definiert. Hierbei ist U eine Untergruppe einer beliebigen abelschen Gruppe H, so daß U von endlichem Index in H ist. H ist dann notwendig endlich erzeugt vom Rang 1. Man erhält den Komplettierungsfunktor

$$\widehat{\cdot}^{U} : \mathrm{CM}^{H}(R) \longrightarrow \mathrm{CM}^{H/U}(\widehat{R}^{U}),\ M \mapsto \widehat{M}^{U}.$$

Jedem H-graduierten Cohen-Macaulay Modul wird also ein H/U-graduierter Cohen-Macaulay Modul zugeordnet. Dieser Funktor hat dieselben Eigenschaften wie der bisher betrachtete, und sie lassen sich aus dem Fall $H = U = \mathbb{Z}$ ableiten. Für diese Verallgemeinerung ist es wichtig, daß man auch nichtkommutative graduierte Algebren zuläßt. Es wird nämlich einer H-graduierten Algebra eine U-graduierte Algebra zugeordnet, die graduiert Morita-äquivalent ist zu der ursprünglichen. Bei diesem Prozeß geht die Kommutativität im allgemeinen verloren.

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bedanken bei Herrn Prof. Helmut Lenzing für die vielen Ratschläge und Hilfestellungen.

Kapitel I
Graduierte Algebren und Moduln

In diesem Kapitel werden grundlegende Fakten über graduierte Algebren und Moduln vorgestellt. Im ersten Paragraphen handelt es sich im wesentlichen um Definitionen. In §2 wird die Existenz von projektiven Hüllen für eine große Klasse graduierter Moduln sichergestellt. In §3 wird gezeigt, daß die Kategorie der graduierten Moduln über einer graduierten Algebra eine Funktorkategorie ist. Im vierten und letzten Abschnitt dieses Kapitels wird der Begriff des graduierten Cohen-Macaulay Moduls eingeführt.

§1 Grundlagen

In diesem Paragraphen sei H eine beliebige Gruppe. Die Verknüpfung werde mit $+$ bezeichnet, und das neutrale Element mit 0. Desweiteren sei k ein kommutativer Ring. Alle vorkommenden Moduln sind Linksmoduln.
In späteren Kapiteln wird H immer abelsch sein. In diesem Kapitel ist es jedoch nicht nötig, dies zu verlangen.

(1.1) Die Kategorie $\mathbf{Mod}^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{R})$. Sei R eine k-Algebra. Es sei

$$R = \bigoplus_{h \in H} R_h$$

direkte Summe von k-Untermoduln und

$$R_h R_{h'} \subset R_{h+h'}$$

für alle $h, h' \in H$. R heißt dann *H-graduierte k-Algebra*.
Ist M ein R-Modul, so ist M ein *H-graduierter R-(Links-)Modul*, wenn

$$M = \bigoplus_{h \in H} M_h$$

direkte Summe von k-Untermoduln ist und

$$R_h M_{h'} \subset M_{h+h'}$$

für alle $h, h' \in H$ gilt. (Zur Definition von *H-graduierten R-Rechtsmoduln* fordert man $M_{h'} R_h \subset M_{h'+h}$.) Sei $h \in H$. Die Elemente von M_h (bzw. R_h) heißen *homogen vom Grad h*. Ist $x \in M_h$, so schreibt man auch $\operatorname{grad} x = h$. Man beachte, daß das

Nullelement in M (bzw. R) jeden Grad hat; für homogene Elemente $\neq 0$ ist der Grad jedoch eindeutig bestimmt.
Seien $M = \bigoplus M_h$ und $N = \bigoplus N_h$ H-graduierte R-Moduln. Sei f ein Homomorphismus von R-Moduln. Ist $h \in H$, so heißt f *(homogen) vom Grad* h, wenn für jedes $g \in H$

$$f(M_g) \subset N_{g+h}$$

gilt. Die Menge aller Homomorphismen vom Grad 0 wird mit

$$\mathrm{Hom}_R(M, N)$$

bezeichnet. Komposition von Homomorphismen vom Grad 0 ist wieder vom Grad 0. Betrachtet man also alle H-graduierten R-Moduln und als Morphismen die Homomorphismen vom Grad 0, so erhält man die Kategorie

$$\mathrm{Mod}^H(R).$$

Wie üblich wird $\mathrm{End}_R(M)$ statt $\mathrm{Hom}_R(M, M)$ geschrieben. Die H-graduierten R-Rechtsmoduln sind gerade die Objekte der Kategorie $\mathrm{Mod}^{H^{op}}(R^{op})$. $\square$

(1.2) Bemerkung: *Sei $R = \bigoplus R_h$ eine H-graduierte k-Algebra. Dann gilt $1_R \in R_0$, und R_0 ist eine k-Unteralgebra von R. Ist $M = \bigoplus M_h$ ein H-graduierter R-Modul, so ist M_h ein R_0-Modul für jedes $h \in H$.*

B e w e i s: (vgl. [21, I.1.1]) Sei

$$1_R = \sum_{h \in H} e_h \quad (e_h \in R_h \text{ fast alle } 0)$$

Zerlegung von 1_R in seine homogenen Bestandteile. Sei $g \in H$. Dann gilt

$$\sum_{h \in H} e_g e_h = e_g 1_R = e_g \in R_g,$$

also (aus Gradgründen) $e_g = e_g e_0$. Aus der Distributivität folgt dann $1_R = 1_R e_0$, also $1_R = e_0$.
Wegen $R_0 R_0 \subset R_0$ und $R_0 M_h \subset M_h$ ist dann klar, daß R_0 eine k-Unteralgebra von R und M_h ein R_0-Modul ist. $\square$

Für den Rest des Paragraphen sei $R = \bigoplus R_h$ eine H-graduierte k-Algebra. Wenn nichts anderes gesagt wird, so sollen Abbildungen, Pfeile und Isomorphismen zwischen graduierten Objekten stets den Grad 0 haben.

(1.3) Unter- und Faktorobjekte in $\mathrm{Mod}^H(R)$. Sei $M = \bigoplus M_h$ ein H-graduierter R-Modul. Für jedes $h \in H$ sei $\pi_h^M : M \longrightarrow M_h$ die natürliche Projektion auf M_h. Für jedes $x \in M$ und $h \in H$ heißt $x_h = \pi_h^M(x)$ die h-te (*homogene*) *Komponente* von x. Ein Untermodul N von M heißt *homogen* (oder *graduiert*), wenn für jedes $h \in H$

$$\pi_h^M(N) \subset N$$

gilt, wenn also die einzelnen homogenen Komponenten von Elementen aus N wieder in N liegen. N ist dann selbst ein H-graduierter R-Modul. Mit $N_h := \pi_h^M(N) = N \cap M_h$ gilt nämlich $N = \bigoplus N_h$. In diesem Fall ist auch der R-Modul M/N ein H-graduierter R-Modul, denn es gilt

$$M/N = \bigoplus_{h \in H} M_h/N_h \ .$$

Sei N ein H-graduierter R-Modul und $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Dann ist $\mathrm{Ker}\, f$ homogener Untermodul von M und $\mathrm{Im}\, f$ homogener Untermodul von N, und damit sind $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ und $\mathrm{Coker}\, f$ H-graduierte R-Moduln. In offensichtlicher Weise wird die direkte Summe von zwei H-graduierten R-Moduln wieder zu einem H-graduierten R-Modul. Es gilt: $\mathrm{Mod}^H(R)$ ist eine abelsche Kategorie (vgl. Paragraph 3). Es gelten die graduierten Versionen der Homomorphie- und Isomorphiesätze. $\square$

(1.4) Direkte Summanden. Unzerlegbarkeit. Seien M und N zwei H-graduierte R-Moduln. N heißt *direkter Summand* von M, wenn es einen H-graduierten R-Modul N' gibt mit

$$N \oplus N' \simeq M$$

(d.h. es gibt einen Grad 0 Isomorphismus von $N \oplus N'$ nach M). Dies ist genau dann der Fall, wenn es einen aufspaltenden Monomorphismus $f \in \mathrm{Hom}_R(N,M)$ (bzw. einen aufspaltenden Epimorphismus $g \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$) gibt.
M heißt *unzerlegbar*, wenn $M \neq 0$, und wenn M keine nichttrivialen direkten Summanden hat, d.h. aus $N \oplus N' \simeq M$ (mit graduierten N und N') folgt $N = 0$ oder $N' = 0$. Dies ist äquivalent zu: $M \neq 0$, und die einzigen Idempotenten von $\mathrm{End}_R(M)$ sind 0 und 1 (analog zu Anderson-Fuller [1, 5.10]). Insbesondere ist M unzerlegbar, wenn $\mathrm{End}_R(M)$ lokal ist. $\square$

H operiert als eine Gruppe von Funktoren auf $\mathrm{Mod}^H(R)$:

(1.5) Die Verschiebungsfunktoren. Sei $M = \bigoplus M_h$ ein H-graduierter R-Modul. Sei $g \in H$. Sei dann $M(g)$ der H-graduierte R-Modul, für dessen h-te Komponente

$$M(g)_h = M_{h+g}$$

gilt. Als R-Moduln sind M und $M(g)$ gleich. Sei auch $N = \bigoplus N_h$ ein H-graduierter R-Modul und $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ ein Homomorphismus vom Grad 0. Dann gilt offenbar auch $f \in \mathrm{Hom}_R(M(g),N(g))$. Setzt man $S_g(M) := M(g)$, und ist $S_g(f)$ der von f induzierte Homomorphismus $M(g) \longrightarrow N(g)$, so erhält man für alle $g \in H$ covariante Funktoren

$$S_g = S_g^H : \mathrm{Mod}^H(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}^H(R),$$

die *Verschiebungsfunktoren*. Diese haben, wie man leicht nachprüft, die folgenden Eigenschaften: Für $g,\ g' \in H$ gilt

$$S_g S_{g'} = S_{g+g'},\ S_{-g}S_g = S_0 = 1 = S_g S_{-g}\ . \qquad \square$$

(1.6) Verschiebungsklassen. Seien $M,\ N \in \mathrm{Mod}^H(R)$. Durch

$$M \sim_H N \ :\Longleftrightarrow \quad \text{es gibt ein } h \in H \text{ mit } M \simeq N(h)$$

wird eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der H-graduierten R-Moduln erklärt. Die Äquivalenzklassen bezüglich $\sim_H$ (d.h. die H-Bahnen) heißen *Verschiebungsklassen*. Für eine Untergruppe U von H wird analog die Äquivalenzrelation $\sim_U$ auf $\mathrm{Mod}^H(R)$ erklärt. $\square$

(1.7) Der Bifunktor $\mathrm{HOM}_R(-,-)$. (1) Seien $M = \bigoplus M_h$ und $N = \bigoplus N_h$ H-graduierte R-Moduln. Sei f ein R-Modulhomorphismus von M nach N, und sei $h \in H$. Dann ist f genau dann homogen vom Grad h, wenn $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N(h))$ gilt. Man definiert

$$\mathrm{HOM}_R(M,N) := \bigoplus_{h\in H} \mathrm{Hom}_R(M, N(h)).$$

Die h-te Komponente von $\mathrm{HOM}_R(M,N)$ besteht also gerade aus den Homomorphismen $M \longrightarrow N$ homogen vom Grad h. Weiter definiert man

$$\mathrm{END}_R(M) := \mathrm{HOM}_R(M,M).$$

$\mathrm{END}_R(M)^{op}$ ist dann eine H-graduierte k-Algebra und $\mathrm{END}_R(M)$ eine H^{op}-graduierte k-Algebra (die Elemente aus $E := \mathrm{END}_R(M)$ faßt man als gewöhnliche Homomorphismen von R-Moduln auf, und die Komposition von Funktionen definiert dann die Multiplikation auf E. Hat $f \in E$ den Grad h und $g \in E$ den Grad h', so hat $fg = f \circ g$ den Grad $h' + h$. Wenn H nicht kommutativ ist, muß man zu der Algebra E^{op} bzw. der Gruppe H^{op} übergehen.). Ist H kommutativ, so ist $\mathrm{END}_R(M)$ selbst eine H-graduierte k-Algebra. Faßt man k selbst als H-graduierte k-Algebra auf (mit der trivialen Graduierung definiert durch $k_0 = k$ und $k_h = 0$ für $h \neq 0$), so ist $\mathrm{HOM}_R(M,N)$ ein H-graduierter k-Modul.
(2) *Ist M endlich erzeugt, so ist* $\mathrm{HOM}_R(M,N)$ *gleich der Menge aller Homomorphismen von R-Moduln $M \longrightarrow N$.*
Diese Aussage findet man in [21, Cor. I.2.11].
(3) Es ist klar, daß wie im ungraduierten Fall

$$\mathrm{Hom}_R(-,-) : \mathrm{Mod}^H(R) \times \mathrm{Mod}^H(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}(k)$$

ein additiver Bifunktor ist. Durch Übergang zur direkten Summe erhält man dann den additiven Bifunktor

$$\mathrm{HOM}_R(-,-) : \mathrm{Mod}^H(R) \times \mathrm{Mod}^H(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}^H(k). \qquad \square$$

(1.8) Lemma: *Sei $M \in \mathrm{Mod}^H(R)$. Es existiert für jedes $h \in H$ eine in M natürliche Isomorphie*

$$\mathrm{Hom}_R(R(h), M) \longrightarrow M_{-h}.$$

Insbesondere gilt für g, $h \in H$

$$\mathrm{Hom}_R(R(g), R(h)) \simeq R_{-g+h}.$$

B e w e i s: Die Isomorphie ist durch $f \mapsto f(1)$ mit zugehöriger Umkehrung $x \mapsto (r \mapsto rx)$ gegeben. □

(1.9) Projektive und freie Objekte. Sei M ein H-graduierter R-Modul.
(1) M heißt *graduiert projektiv*, genau wenn M projektiv in $\mathrm{Mod}^H(R)$ ist. Dies ist nach Definition genau dann der Fall, wenn der Funktor $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ exakt ist. Die volle Unterkategorie von $\mathrm{Mod}^H(R)$ der endlich erzeugten graduiert projektiven R-Moduln wird mit $\mathrm{pro}^H(R)$ bezeichnet. Es gilt folgendes Resultat (vgl. [21, Cor. I.2.2]) : *M ist genau dann graduiert projektiv, wenn M projektiv (in $\mathrm{Mod}(R)$) ist.*
(2) M heißt *(endlich erzeugt) graduiert frei*, wenn es eine (endliche) Basis über R gibt, die nur aus homogenen Elementen besteht. Dies ist genau dann der Fall, wenn es eine (endliche) Indexmenge I und Elemente $h_i \in H$ $(i \in I)$ gibt mit

$$M \simeq \bigoplus_{i \in I} R(h_i).$$

(3) M heißt *graduiert endlich erzeugt*, wenn es ein Erzeugendensystem von M über R gibt, welches nur aus homogenen Elementen besteht. Offenbar ist dies genau dann der Fall, wenn M als R-Modul endlich erzeugt ist, und genau dann, wenn es eine exakte Sequenz der Form

$$\bigoplus_{i=1}^{n} R(h_i) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

gibt.
(4) M ist genau dann (endlich erzeugt) graduiert projektiv, wenn M direkter Summand eines (endlich erzeugten) graduiert freien R-Moduls ist. □

(1.10) Definition: Seien $K = \bigoplus K_h$, $R = \bigoplus R_h$ H-graduierte k-Algebren, K sei kommutativ. R heißt *graduierte K-Algebra*, wenn R eine K-Algebra ist, so daß $K_h 1_R \subset R_h$ für jedes $h \in H$ gilt. R heißt *endliche graduierte K-Algebra*, wenn R zusätzlich endlich erzeugt als (graduierter) K-Modul ist. □

(1.11) Die Kategorie mod^H(R). Sei M ein H-graduierter R-Modul. M heißt *graduiert endlich präsentiert*, wenn es eine exakte Sequenz der Form

$$F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

gibt, mit endlich erzeugten graduiert freien F_1 und F_2. Die volle Unterkategorie von $\mathrm{Mod}^H(R)$, die aus den graduiert endlich präsentierten Objekten besteht, wird mit

$$\mathrm{mod}^H(R)$$

bezeichnet. Mit Hilfe des Kern-Cokern-Lemmas (vgl. Popescu [23, 4.11.9]) zeigt man die folgenden Aussagen:
(1) *$M \in \mathrm{Mod}^H(R)$ ist genau dann graduiert endlich präsentiert, wenn M endlich erzeugt ist und für jede exakte Sequenz in* $\mathrm{Mod}^H(R)$

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

wobei F endlich erzeugt ist, folgt, daß K endlich erzeugt ist (vgl. Bourbaki [13, I.2.8]).
(2) $\mathrm{mod}^H(R)$ *ist gegenüber Bildung von endlichen direkten Summen abgeschlossen, d.h.* $\mathrm{mod}^H(R)$ *ist additiv.* Allgemeiner:
(3) $\mathrm{mod}^H(R)$ *ist gegenüber Erweiterungen abgeschlossen.*
(4) *Seien M, $N \in \mathrm{mod}^H(R)$ und $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Dann gilt* $\mathrm{Coker}\, f \in \mathrm{mod}^H(R)$.
Aus (1) leitet man leicht ab:
(5) $\mathrm{mod}^H(R)$ *ist gegen direkte Summanden abgeschlossen.* □

(1.12) Das homogene Radikal. Nakayama-Lemma. (1) Die homogenen Untermoduln von R heißen *homogene Linksideale*. Die homogenen Rechtsuntermoduln von R heißen *homogene Rechtsideale*. Ein *homogenes Ideal* ist eine Teilmenge von R, die sowohl homogenes Linksideal als auch homogenes Rechtsideal ist. Analog dem ungraduierten Fall definiert man *maximale* homogene (Links-/Rechts-) Ideale von R. Mit dem Lemma von Zorn folgt, daß jedes homogene Linksideal $\neq R$ in einem maximalen homogenen Linksideal enthalten ist. R heißt *graduiert lokal*, wenn R genau ein maximales homogenes Linksideal enthält; dies ist äquivalent dazu, daß R genau ein maximales homogenes Rechtsideal enthält.
R ist ein *graduierter Schiefkörper* oder eine *graduierte Divisionsalgebra*, falls jedes homogene Element $\neq 0$ in R invertierbar ist.
(2) Sei M ein H-graduierter R-Modul. Dann ist der *Annulator*

$$\mathrm{Ann}_R(M) = \{r \in R \mid rM = 0\}$$

von M ein homogenes Ideal in R.
(3) Sei $M \neq 0$ ein H-graduierter R-Modul. M heißt *graduiert einfach*, wenn M keine echten homogenen Untermoduln hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn ein maximales homogenes Linksideal $\mathfrak{m}$ in R und ein $h \in H$ existiert, so daß

$$M \simeq (R/\mathfrak{m})(h)$$

gilt, vgl. [21, Lemma I.7.2].
$M \neq 0$ heißt *konzentriert*, wenn ein $h \in H$ existiert, so daß nur die h-te Komponente von M ungleich 0 ist.
(4) Sei $\operatorname{rad}^H(R)$ der Durchschnitt aller maximalen homogenen Linksideale. Wie im ungraduierten Fall weist man nach, daß $\operatorname{rad}^H(R)$ identisch mit den folgenden Mengen ist:

Durchschnitt aller maximalen homogenen Rechtsideale;
Durchschnitt der Annulatoren von allen graduiert einfachen R-Linksmoduln;
Durchschnitt der Annulatoren von allen graduiert einfachen R-Rechtsmoduln.

Insbesondere ist $\operatorname{rad}^H(R)$ ein homogenes Ideal in R. $\operatorname{rad}^H(R)$ heißt das *homogene (Jacobson-) Radikal* von R. Sei $x_h \in R_h$ für ein $h \in H$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x_h \in \operatorname{rad}^H(R) &\iff 1 - x_h y_{-h} \text{ ist Einheit in } R_0 \text{ für jedes } y_{-h} \in R_{-h} \\ &\iff 1 - y_{-h} x_h \text{ ist Einheit in } R_0 \text{ für jedes } y_{-h} \in R_{-h}. \end{aligned}$$

(Man kann z.B. die Beweise aus Lam [18, (4.1)–(4.5)] auf den graduierten Fall übertragen.) Für $h = 0$ erhält man speziell

$$\operatorname{rad}^H(R) \cap R_0 = \operatorname{rad}(R_0).$$

Ich werde in (1.13) ein allgemeineres Resultat zeigen. Das Nakayama-Lemma für graduierte Algebren lautet:
(5) *Sei $\mathfrak{a}$ ein homogenes Linksideal in R. Folgende Aussagen sind äquivalent:*
(a) $\mathfrak{a} \subset \operatorname{rad}^H(R)$.
(b) *Für jeden endlich erzeugten H-graduierten R-Modul M gilt:*

$$\mathfrak{a}M = M \implies M = 0.$$

(c) *Für alle H-graduierten R-Moduln $N \subset M$ mit M/N endlich erzeugt gilt:*

$$\mathfrak{a}M + N = M \implies N = M.$$

Beweis: Man überträgt den Beweis von Lam [18, (4.22)] auf den graduierten Fall. □

Mit $\max_l(R_0)$ bzw. $\max_l^H(R)$ sei die Menge der maximalen Linksideale von R_0 bzw. die Menge der maximalen homogenen Linksideale in R bezeichnet.

(1.13) Lemma: *Die Abbildung*

$$\begin{cases} \max_l^H(R) & \longrightarrow & \max_l(R_0) \\ \mathfrak{a} & \longmapsto & \mathfrak{a} \cap R_0 \end{cases}$$

ist bijektiv.

B e w e i s : (1) Sei $\mathfrak{a}$ maximales homogenes Linksideal in R. Dann ist $\mathfrak{a}_0 := \mathfrak{a} \cap R_0$ ein Linksideal $\neq R_0$. Dieses ist maximal in R_0: Sei $x \in R_0 \setminus \mathfrak{a}_0$. Dann ist $x \notin \mathfrak{a}$, also gilt $\mathfrak{a} + Rx = R$, es gibt also $a \in \mathfrak{a}$, $r \in R$ mit $a + rx = 1$. Ohne Einschränkung kann man $\operatorname{grad} a = 0$ und $\operatorname{grad} r = 0$ annehmen. Dann folgt $\mathfrak{a}_0 + R_0 x = R_0$, und damit ist $\mathfrak{a}_0$ maximal in R_0 und die obige Abbildung ist wohldefiniert.
(2) Die Abbildung ist injektiv: Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ maximale homogene Linksideale in R. Sei $\mathfrak{a}_0 := \mathfrak{a} \cap R_0$ und $\mathfrak{b}_0 := \mathfrak{b} \cap R_0$, und es gelte $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}_0$. Sei $x \in \mathfrak{a}$ homogen, $\operatorname{grad} x = h$. Angenommen es gilt $x \notin \mathfrak{b}$. Dann gilt $\mathfrak{b} + Rx = R$, also gibt es $b \in \mathfrak{b}$, $r \in R$ mit $b + rx = 1$. Dabei kann man b und r homogen wählen, $\operatorname{grad} b = 0$ und $\operatorname{grad} r = -h$. Dann ist $rx \in \mathfrak{a}_0$ und $1 - rx \in \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{a}_0$, und es folgt $1 \in \mathfrak{a}_0$ im Widerspruch zu (1). Es folgt also $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$. Ebenso folgt $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$.
(3) Die Abbildung ist surjektiv: Sei $\mathfrak{a}_0$ maximales Linksideal in R_0. Sei $\mathfrak{a}$ das von $\mathfrak{a}_0$ in R erzeugte homogene Linksideal. Es gilt dann $\mathfrak{a} \cap R_0 = \mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a} \neq R$. Es gibt ein maximales homogenes Linksideal $\mathfrak{m}$ in R, welches $\mathfrak{a}$ enthält. Dann folgt mit (1): $\mathfrak{m} \cap R_0 = \mathfrak{a}_0$. □

(1.14) Korollar: *R ist graduiert lokal, genau wenn R_0 lokal ist.* □

§2 Krull-Schmidt-Zerlegungen und projektive Hüllen

In diesem Abschnitt sei H eine beliebige Gruppe (additiv geschrieben), k ein kommutativer Ring und $R = \bigoplus R_h$ eine H-graduierte k-Algebra. Es sollen hier Eigenschaften von R untersucht werden, die implizieren, daß sich die endlich präsentierten H-graduierten R-Moduln eindeutig in Unzerlegbare zerlegen lassen. Danach wird ein Kriterium für die Existenz von projektiven Hüllen in $\operatorname{mod}^H(R)$ angegeben.
Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie. $\mathcal{C}$ heißt *Krull-Schmidt-Kategorie*, wenn zu jedem $X \in \mathcal{C}$ Objekte $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{C}$ existieren, so daß $\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(X_i)$ lokal ist $(i = 1, \ldots, n)$ und

$$X \simeq X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$$

gilt. In einer additiven Kategorie ist eine derartige Zerlegung bis auf Isomorphie und Reihenfolge der Summanden eindeutig (der Beweis des Satzes von Krull-Schmidt in Pierce [22, 5.4] läßt sich so modifizieren, daß er für beliebige additive Kategorien richtig ist). Jedes unzerlegbare Objekt in einer Krull-Schmidt-Kategorie hat einen lokalen Endomorphismenring.

(2.1) Lemma: *Sei k ein Körper. Folgende Aussagen sind äquivalent:*
(1) *Für alle $h \in H$ gilt $\dim_k R_h < \infty$.*
(2) *Für jeden endlich erzeugten H-graduierten R-Modul $M = \bigoplus M_h$ gilt*

$$\dim_k M_h < \infty$$

für alle $h \in H$.
(3) *Für alle endlich erzeugten H-graduierten R-Moduln M und N gilt*

$$\dim_k(\mathrm{Hom}_R(M,N)) < \infty.$$

B e w e i s: (1)⇒(2): Es gibt einen Epimorphismus der Form

$$\bigoplus_{i=1}^{n} R(h_i) \xrightarrow{\sigma} M \longrightarrow 0,$$

mit $h_i \in H$, $i = 1, \ldots, n$. Sei $F := \bigoplus_{i=1}^{n} R(h_i)$, und sei $h \in H$. Die h-te Komponente von F ist

$$F_h = \bigoplus_{i=1}^{n} R_{h+h_i},$$

und nach (1) ist diese endlichdimensional. Durch Einschränkung von σ auf F_h erhält man die exakte Sequenz von k-Vektorräumen

$$F_h \longrightarrow M_h \longrightarrow 0,$$

also ist auch M_h endlichdimensional.
(2)⇒(3): Seien $M = \bigoplus M_h$ und $N = \bigoplus N_h$ endlich erzeugt. Sei $h \in H$. Dann ist

$$\mathrm{Hom}_R(R(h), N) \simeq N_{-h}$$

endlichdimensional, und es folgt, daß auch $\mathrm{Hom}_R(F,N)$ endlichdimensional ist für jeden endlich erzeugten graduiert freien R-Modul F. Es gibt ein solches F, so daß die Sequenz

$$F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

exakt ist. Man erhält die exakte Sequenz von k-Vektorräumen

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F,N),$$

und damit ist auch $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ endlichdimensional über k.
(3)⇒(1): Für jedes $h \in H$ ist

$$R_h \simeq \mathrm{Hom}_R(R, R(h)),$$

also endlichdimensional. □

H-graduierte k-Algebren, wie sie im Lemma beschrieben werden, sind eine natürliche Verallgemeinerung von endlichdimensionalen Algebren.
Die folgende Aussage ist eine Variante von Fittings Lemma.

(2.2) Lemma: *Sei k Körper und M ein H-graduierter R-Modul mit der Eigenschaft $n := \dim_k(\mathrm{End}_R(M)) < \infty$. Für jedes $f \in \mathrm{End}_R(M)$ gilt*

$$M = \mathrm{Ker}\, f^n \oplus \mathrm{Im}\, f^n.$$

Beweis: f^0, $f^1, \ldots, f^n$ sind linear abhängig über k, es gibt also $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in k$, nicht alle 0, mit $\sum_{i=0}^n \alpha_i f^i = 0$. Sei $m := \min\{i \mid \alpha_i \neq 0\} \leq n$. Dann ist

$$f^m = -\sum_{i=m+1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_m} f^i.$$

Es folgt $\mathrm{Im}\, f^m \subset \mathrm{Im}\, f^{m+1}$ und $\mathrm{Ker}\, f^{m+1} \subset \mathrm{Ker}\, f^m$. Der Rest folgt dann wie in Anderson-Fuller [1, 11.6] oder Pierce [22, 5.3]. □

(2.3) Korollar: *Sei k Körper. Es gelte $\dim_k R_h < \infty$ für alle $h \in H$. M sei endlich erzeugter H-graduierter R-Modul. Dann gilt: M ist unzerlegbar in $\mathrm{Mod}^H(R)$, genau wenn $\mathrm{End}_R(M)$ lokal ist.*

Beweis: Ist M unzerlegbar, so ist nach (2.1) und (2.2) jedes $f \in \mathrm{End}_R(M)$ invertierbar oder nilpotent, und $\mathrm{End}_R(M)$ ist dann lokal. □

(2.4) Korollar: *Sei k Körper. Es gelte $\dim_k R_h < \infty$ für jedes $h \in H$. Dann ist $\mathrm{mod}^H(R)$ eine Krull-Schmidt-Kategorie.*

Beweis: Sei $M \in \mathrm{mod}^H(R)$, und es gelte

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_t$$

mit graduierten $M_i \neq 0$. Dann gilt $t \leq \dim_k(\mathrm{End}_R(M))$, denn es ist

$$\mathrm{End}_R(M) \simeq \mathrm{Hom}_R(M_1, M) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hom}_R(M_t, M)$$

und alle $\mathrm{Hom}_R(M_i, M) \neq 0$. Damit läßt sich M in endlich viele Unzerlegbare in $\mathrm{mod}^H(R)$ zerlegen.
Sei M unzerlegbar in $\mathrm{mod}^H(R)$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathrm{mod}^H(R)$ gegen direkte Summanden ist $\mathrm{End}_R(M)$ lokal nach (2.3). □

Alle bisherigen Aussagen dieses Abschnitts bleiben richtig, wenn man den Körper k durch einen kommutativen artinschen Ring und 'endliche Dimension' durch 'endliche Länge' ersetzt.

(2.5) Projektive Hüllen. Sei M ein H-graduierter R-Modul.
(1) Ein homogener Untermodul $K \subset M$ heißt *klein* in M (Notation: $K \ll M$), falls für jeden homogenen Untermodul $L \subset M$ aus $K + L = M$ schon $L = M$ folgt.

(2) Ist M endlich erzeugt, so gilt $\mathrm{rad}^H(R)M \ll M$ nach Nakayama (1.12)(5).
(3) Ein Epimorphismus von H-graduierten R-Moduln $f : M \to N$ heißt *überflüssig*, falls $\mathrm{Ker}\, f \ll M$ gilt.
(4) Ein Epimorphismus

$$P \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

mit graduiert projektivem P heißt eine (*graduiert*) *projektive Hülle* von M, falls f überflüssig ist.
(5) Sei

$$P \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

Epimorphismus mit graduiert projektivem P. Dies ist genau dann eine projektive Hülle von M, falls für jedes graduierte K und jedes $g \in \mathrm{Hom}_R(K, P)$ gilt: Ist fg Epimorphismus, so ist g Epimorphismus, vgl. Anderson-Fuller [1, 5.15].
(6) Sei $f : M \longrightarrow N$ ein überflüssiger Epimorphismus und $p : P \longrightarrow M$ ein Homomorphismus von H-graduierten R-Moduln. Dann ist p projektive Hülle von M, genau wenn fp projektive Hülle von N ist, vgl. [1, 27.5].
(7) Falls projektive Hüllen zu M existieren, so sind sie (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt, vgl. [1, 17.17].
(8) R heißt *graduiert semiperfekt*, falls jeder endlich erzeugte graduierte R-Modul eine projektive Hülle besitzt. □

R heißt *graduiert halbeinfach*, wenn es einfach graduierte R-Untermoduln $S_1, \ldots, S_n$ von R gibt mit $R = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$.
Der nächste Satz impliziert insbesondere, daß $\mathrm{mod}^H(R)$ projektive Hüllen besitzt, falls R graduiert lokal ist oder die Eigenschaften aus Lemma (2.1) besitzt. Der Beweis liefert eine Konstruktion der Objekte in $\mathrm{pro}^H(R)$.

(2.6) Satz: (1) *R ist genau dann graduiert halbeinfach, wenn R_0 halbeinfach und $\mathrm{rad}^H(R) = 0$ ist.*
(2) *R ist genau dann graduiert semiperfekt, wenn R_0 semiperfekt ist; in diesem Fall sind projektive Hüllen endlich erzeugter graduierter R-Moduln graduiert endlich präsentiert.*
(3) *Sei R graduiert lokal. Dann ist jeder endlich erzeugte graduiert projektive R-Modul graduiert frei.*

Beweis: (1) ($\Rightarrow$): Sei $R = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$ mit graduiert einfachen $S_i \subset R$. Es gilt dann $S_i = Re_i$ mit Idempotenten $e_i \in R_0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $e_ie_j = 0$ $(i \neq j)$ und $1 = e_1 + \cdots + e_n$. Es folgt

$$R_0 = R_0e_1 \oplus \cdots \oplus R_0e_n.$$

Es ist $R(1 - e_i)$ maximales homogenes Linksideal in R, also ist $R_0(1 - e_i) = R(1 - e_i) \cap R_0$ maximales Linksideal nach (1.13), und damit ist R_0e_i minimales Linksideal

$(\neq 0)$ in R_0 $(i = 1, \ldots, n)$. Weiter gilt

$$\mathrm{rad}^H(R) \subset \bigcap_{i=1}^{n} R(1 - e_i) = 0.$$

$(\Leftarrow)$: Sei $R_0 = R_0 e_1 \oplus \cdots \oplus R_0 e_n$ mit minimalen Linksidealen $R_0 e_i$ in R_0 und orthogonalen Idempotenten $e_i \in R_0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $1 = e_1 + \cdots + e_n$. Dann gilt

$$R = Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_n.$$

Angenommen, für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist $R(1-e_i)$ nicht maximal homogen. Nach (1.13) existiert ein maximales homogenes Linksideal $\mathfrak{m}_i \supset R(1-e_i)$ mit $\mathfrak{m}_i \cap R_0 = R_0(1-e_i)$, und es gibt $x \in \mathfrak{m}_i$ mit $x \notin R(1 - e_i)$, $\mathrm{grad}\, x = h$. Es ist $x = x(1 - e_i) + xe_i$, und $xe_i \neq 0$. Wegen $\mathrm{rad}^H(R) = 0$ gibt es ein maximales homogenes Linksideal $\mathfrak{m}$, welches xe_i nicht enthält. Dann $\mathfrak{m} + Rxe_i = R$, also gibt es $y \in \mathfrak{m}$, $r \in R$, $\mathrm{grad}\, y = 0$, $\mathrm{grad}\, r = -h$ mit $1 = y + rxe_i$. Es gilt aber

$$rxe_i \in \mathfrak{m}_i \cap Re_i \cap R_0 = R_0(1 - e_i) \cap R_0 e_i = 0,$$

damit $1 \in \mathfrak{m}$, Widerspruch. Es folgt, daß die Re_i einfach graduiert sind, und R ist graduiert halbeinfach.
(2) $(\Rightarrow)$: Sei S_0 einfacher R_0-Modul. Dann existiert ein maximales Linksideal $\mathfrak{m}_0$ in R_0 mit $R_0/\mathfrak{m}_0 \simeq S_0$. Nach (1.13) existiert ein (maximales) homogenes Linksideal $\mathfrak{m}$ in R mit $\mathfrak{m} \cap R_0 = \mathfrak{m}_0$. Sei $S := R/\mathfrak{m}$ und

$$P \xrightarrow{f} S \longrightarrow 0$$

projektive Hülle von S. Da man auch den kanonischen Epimorphismus $R \longrightarrow S$ hat, folgt aus einer graduierten Version von [1, 17.17], daß P ein direkter Summand von R ist, ohne Einschränkung $P = Re$, $e \in R_0$. Dann ist die nullte Komponente $P_0 = R_0 e$ von P direkter Summand von R_0, also projektiv, und die nullte Komponente von f

$$P_0 \xrightarrow{f_0} S_0 \longrightarrow 0$$

ein Epimorphismus. Sei $K := \mathrm{Ker}\, f$ mit nullter Komponente $K_0 = \mathrm{Ker}\, f_0$. Sei X ein Untermodul von P_0 mit $K_0 + X = P_0$. Dann gilt $K + RX = P$, und da $K \ll P$, folgt $RX = P$, also $X = P_0$. Damit $K_0 \ll P_0$, und f_0 ist projektive Hülle von S_0. Nach [1, 27.6] ist R_0 semiperfekt.
$(\Leftarrow)$: Zur Abkürzung sei $J = \mathrm{rad}^H(R)$, $J_0 = \mathrm{rad}(R_0)$, $\overline{R} = R/J$ und $\overline{R}_0 = R_0/J_0$. Es existieren orthogonale Idempotente $e_i \in R_0$ mit einfachen $R_0 e_i / J_0 e_i$ und

$$R_0 = R_0 e_1 \oplus \cdots \oplus R_0 e_n.$$

Seien $\bar{e}_i = e_i + J_0 = e_i + J$ $(i = 1, \ldots, n)$. Es ist dann

$$\overline{R}_0 = \overline{R}_0 \bar{e}_1 \oplus \cdots \oplus \overline{R}_0 \bar{e}_n$$

und $\overline{R}_0\bar{e}_i$ einfach ($i = 1, \ldots, n$), vgl. [1, 17.20+27.6]. Aus Beweisteil (1): Die $\overline{R}\bar{e}_i$ sind einfach graduiert und

$$\overline{R} = \overline{R}\bar{e}_1 \oplus \cdots \oplus \overline{R}\bar{e}_n$$

ist graduiert halbeinfach.
Sei M endlich erzeugter graduierter R-Modul. Dann ist M/JM endlich erzeugter graduierter $\overline{R}$-Modul, also existiert ein Epimorphismus der Form

$$\bigoplus_{j=1}^{m} \overline{R}(h_j) \longrightarrow M/JM \longrightarrow 0.$$

Analog zu [1, 9.4] ist dann

$$\bigoplus_{j=1}^{m} \bigoplus_{i=1}^{n} \overline{R}\bar{e}_i(h_j)^{\varepsilon_{ij}} \simeq M/JM$$

mit Elementen $\varepsilon_{ij} \in \{0, 1\}$. Sei

$$P := \bigoplus_{j=1}^{m} \bigoplus_{i=1}^{n} Re_i(h_j)^{\varepsilon_{ij}}.$$

P ist graduiert projektiv, endlich präsentiert, und es gilt

$$P/JP \simeq M/JM.$$

Nach Nakayama (1.12)(5) ist $P \longrightarrow P/JP \longrightarrow 0$ projektive Hülle und $JM \ll M$. Man erhält das kommutative Diagramm, wobei die vertikalen Pfeile die kanonischen Abbildungen sind:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ P/JP \arrow[r, "\sim"] & M/JM. \end{tikzcd}$$

Aus (2.5)(6) folgt, daß

$$P \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

projektive Hülle von M ist. Also ist R graduiert semiperfekt.
(3) Sei R graduiert lokal. Im letzten Beweisteil kann man $n = 1$ und $e_1 = 1$ wählen. Nach Konstruktion in (2) sind dann projektive Hüllen von endlich erzeugten graduierten R-Moduln graduiert frei und die Behauptung folgt. $\square$

§3 Die Begleitkategorie einer graduierten Algebra

An dieser Stelle soll noch eine andere Beschreibung von graduierten Algebren und Moduln gegeben werden.
In diesem Abschnitt sei k ein kommutativer Ring und H eine beliebige Gruppe (additiv geschrieben).

(3.1) *k*-Kategorien. Eine *k-Kategorie* ist eine Kategorie $\mathcal{C}$, deren Morphismenmengen $\mathcal{C}(X,Y)$ Moduln über k sind, so daß die Kompositionsabbildungen bilinear sind. Ein *k-Funktor* zwischen zwei k-Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist ein covarianter Funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, so daß die Abbildungen

$$F(X,Y) : \mathcal{C}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{D}(F(X), F(Y))$$

Homomorphismen von k-Moduln sind. □

(3.2) Die Begleitkategorie. Sei $R = \bigoplus R_h$ eine H-graduierte k-Algebra. Sei $\mathcal{A}$ die k-Kategorie, die aus der Objektmenge H und den Morphismenmengen[1] $\mathcal{A}(g,h) = R_{h-g}$ für alle g, $h \in H$ besteht. Die Komposition von Morphismen ist durch die Multiplikation in R gegeben. Diese k-Kategorie wird mit $[H;R]$ bezeichnet und heißt die *Begleitkategorie von R*. □

(3.3) Beispiele: (1) Sei $H = \mathbb{Z}$ und $R = k[X]$ mit $\operatorname{grad} X = 1$. Sei Q der Köcher

$$\cdots \longrightarrow -2 \longrightarrow -1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots$$

Die Pfeile stehen hier für die Multiplikation mit X. Die Begleitkategorie $[\mathbb{Z};R]$ ist äquivalent zu der Wegekategorie[2] kQ von Q.
(2) Sei $H = \mathbb{Z}$ und $R = k[X,Y]$ mit $\operatorname{grad} X = 2$, $\operatorname{grad} Y = 3$. Sei Q der Köcher

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] \arrow[drr] & -1 \arrow[r] \arrow[drr] & 1 \arrow[r] \arrow[drr] & 3 \arrow[r] \arrow[drr] & 5 \arrow[r] \arrow[drr] & 7 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] \arrow[ur] & -2 \arrow[r] \arrow[ur] & 0 \arrow[r] \arrow[ur] & 2 \arrow[r] \arrow[ur] & 4 \arrow[r] \arrow[ur] & 6 \arrow[r] \arrow[ur] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Hierbei stehen die horizontalen Pfeile für die Multiplikation mit X, die übrigen für die Multiplikation mit Y. Dann ist $[\mathbb{Z};R]$ äquivalent zu kQ modulo der Kommutativitätsrelation $XY - YX$.
(3) Sei $H = \mathbb{Z}$ und $R = k[X,Y]/(X^3 - Y^2)$ mit $\operatorname{grad} X = 2$, $\operatorname{grad} Y = 3$. Sei Q der Köcher aus Beispiel (2). Dann ist $[\mathbb{Z};R]$ äquivalent zu kQ modulo der Kommutativitätsrelationen $XY - YX$, $X^3 - Y^2$. □

[1] Hier wird nicht verlangt, daß die Morphismenmengen disjunkt sind. Durch Indizierung könnte man dies stets erreichen.

[2] Zur Definition der Wegekategorie eines Köchers vgl. [17, 2.1].

Sei $\mathcal{A}$ eine *kleine* k-Kategorie (d.h. eine k-Kategorie, deren Isomorphieklassen eine Menge bilden[3]). Die Kategorie aller k-Funktoren von $\mathcal{A}$ nach $\mathrm{Mod}(k)$ mit den natürlichen Transformationen als Morphismen wird mit $\mathrm{Mod}\,\mathcal{A}$ bezeichnet. Deren Objekte heißen *$\mathcal{A}$-Moduln*. Übliche modultheoretische Begriffe werden komponentenweise definiert (vgl. [23, 3.4]).

(3.4) Satz: *Sei R eine H-graduierte k-Algebra. Der k-Funktor*

$$\Phi : \begin{cases} \mathrm{Mod}[H;R] & \longrightarrow & \mathrm{Mod}^H(R) \\ F & \mapsto & \bigoplus_{h\in H} F(h) \\ (\eta_h)_{h\in H} & \mapsto & \oplus \eta_h \end{cases}$$

ist eine Äquivalenz von k-Kategorien.

B e w e i s: Dies findet man in [16, 1.1.3]. □

(3.5) Korollar: *Sei R eine H-graduierte k-Algebra.* $\mathrm{Mod}^H(R)$ *ist eine Grothendieck-Kategorie. Insbesondere hat* $\mathrm{Mod}^H(R)$ *injektive Hüllen und beliebige direkte Summen.*

B e w e i s: Dies folgt aus Popescu [23, 3.4.2+3.4.6]. □

§4 Graduierte Cohen-Macaulay Moduln

In diesem Paragraphen sei k ein Körper und H eine beliebige Gruppe.
Die Polynomalgebra $K = k[X_1, \ldots, X_d]$ in d Unbestimmten sei H-graduiert,

$$K = \bigoplus_{h\in H} K_h,$$

so daß folgende Eigenschaften erfüllt sind:
(a) $K_0 = k$, (b) alle Unbestimmten X_i sind homogen und (c) alle Komponenten K_h sind endlichdimensional über k.
K ist kommutativ, noethersch, graduiert lokal und $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_d)$ das einzige maximale homogene Ideal in K, und es gilt $K/\mathfrak{m} = k$.

(4.1) Definition: Sei R eine endliche H-graduierte K-Algebra und M ein endlich erzeugter H-graduierter R-Modul. M heißt *graduierter Cohen-Macaulay Modul*, falls M graduiert freier K-Modul ist. R heißt *graduierte Cohen-Macaulay K-Algebra*, falls R ein graduierter Cohen-Macaulay Modul über R ist. Die volle Unterkategorie von $\mathrm{mod}^H(R)$, die aus den graduierten Cohen-Macaulay Moduln besteht, wird mit

$$\mathrm{CM}^H(R)$$

(genauer: $\mathrm{CM}^H_K(R)$; beachte aber (4.2)) bezeichnet. □

[3]Diese Kategorien heißen häufig auch *skelett-klein*.

In der kommutativen Algebra definiert man für einen endlich erzeugten Modul M über einem kommutativen noetherschen lokalen Ring $(S, \mathfrak{p})$ die Tiefe

$$\operatorname{depth}(M) := \inf\{n \geq 0 \mid \operatorname{Ext}^n_S(S/\mathfrak{p}, M) \neq 0\}.$$

Diese Zahl ist gleich der Länge einer maximalen regulären M-Folge in $\mathfrak{p}$. M heißt *maximal Cohen-Macaulay*, falls $\operatorname{depth} M = \dim S$ (Krulldimension von S) gilt. Ist S regulär, so ist S ein Cohen-Macaulay Ring (ein maximaler Cohen-Macaulay Modul über sich). Mit einer Dimensionsformel von Auslander und Buchsbaum[4] zeigt man, daß ein endlich erzeugter S-Modul über einem regulär lokalen Ring S maximal Cohen-Macaulay ist, genau wenn er frei ist.
Dies läßt sich auf den graduierten Fall übertragen. Der Polynomring K ist ein graduiert regulär lokaler Ring, und es gilt: $\mathrm{CM}^H(R)$ besteht gerade aus den $M \in \mathrm{mod}^H(R)$, die graduierte maximale Cohen-Macaulay Moduln über K sind.
Ferner liefern diese Argumente die folgende Aussage, welche in Kapitel 4 benötigt wird.

(4.2) Lemma: *Sei $K' = k[Y_1, \ldots, Y_d]$ eine H-graduierte Polynomalgebra in d Unbestimmten, die obige Eigenschaften* (a)–(c) *erfüllt. Weiter sei die Polynomalgebra K ein endlich erzeugter graduierter K'-Modul. Ist $M \in \mathrm{mod}^H(K)$, so gilt:*
M ist graduiert frei über K, genau wenn M graduiert frei über K' ist. □

(4.3) Satz: *Es sei R eine endliche H-graduierte K-Algebra. Dann gelten die folgenden Aussagen:*
(1) *Die homogenen Komponenten von R sind endlichdimensional über k.*
(2) *R ist graduiert semiperfekt, d.h. $\mathrm{mod}^H(R)$ besitzt projektive Hüllen.*
(3) $\mathrm{CM}^H(R)$ *ist abgeschlossen bezüglich endlichen direkten Summen, direkten Summanden, Isomorphismen und Verschiebungen.*
(4) $\mathrm{CM}^H(R)$ *ist eine Krull-Schmidt-Kategorie.*
(5) *Ist*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz in $\mathrm{Mod}^H(R)$ mit $C \in \mathrm{CM}^H(R)$, so ist $A \in \mathrm{CM}^H(R)$, genau wenn $B \in \mathrm{CM}^H(R)$ ist. Insbesondere ist $\mathrm{CM}^H(R)$ gegen Erweiterungen abgeschlossen.
(6) *Sei zusätzlich R eine graduierte Cohen-Macaulay K-Algebra. Dann gilt $\mathrm{pro}^H(R) \subset \mathrm{CM}^H(R)$. Sei $C \in \mathrm{CM}^H(R)$. Genau dann ist C (graduiert) projektiv, wenn jede exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

mit A, $B \in \mathrm{CM}^H(R)$ aufspaltet.

Beweis: (1) folgt aus (2.1).
(2) folgt aus (1) und (2.6)(2).

[4] Vgl. Matsumura [19, Thm. 19.1].

(3) Aus (2.6)(3) folgt, daß $\mathrm{CM}^H(R)$ gegen direkte Summanden abgeschlossen ist. Der Rest ist klar.
(4) Da $\mathrm{CM}^H(R)$ gegen direkte Summanden abgeschlossen ist, folgt dies aus (2.4).
(5) Die exakte Sequenz aus (5) des Satzes spaltet über K auf, da C graduiert projektiv über K ist. Also gilt $B \simeq A \oplus C$ als graduierte K-Moduln. Dann ist aber klar, daß B endlich erzeugter graduiert freier (projektiver) K-Modul ist, genau wenn es A ist.
(6) $\mathrm{pro}^H(R) \subset \mathrm{CM}^H(R)$ folgt aus der Voraussetzung $R \in \mathrm{CM}^H(R)$ und (3).
Ist C projektiv, so spaltet natürlich jede exakte Folge wie in (6) auf. Spalten umgekehrt alle exakten Folgen wie in (6) auf, so insbesondere die exakte Folge

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow P \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0,$$

wobei f projektive Hülle von C ist und $A = \ker f$, denn es ist $P \in \mathrm{CM}^H(R)$ und nach (5) auch $A \in \mathrm{CM}^H(R)$. Dann ist aber C als direkter Summand von P selbst projektiv. $\square$

Kapitel II
Vervollständigung $\mathbb{Z}$-graduierter Moduln

In diesem Kapitel wird der Komplettierungsfunktor für $\mathbb{Z}$-graduierte Moduln eingeführt. Hauptergebnis dieses Kapitels ist, daß der Komplettierungsfunktor Unzerlegbarkeit bewahrt.

§5 Grundlegende Eigenschaften

In diesem Paragraphen werden jetzt speziell nur $\mathbb{Z}$-graduierte Algebren und Moduln betrachtet. Für den Rest des Paragraphen sei k ein kommutativer Ring und

$$R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$$

$\mathbb{Z}$-graduierte k-Algebra mit der zusätzlichen Bedingung, daß es ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$R_n = 0 \text{ für alle } n < n_0.$$

Man setzt

$$\widehat{R} := \prod_{n\in\mathbb{Z}} R_n \ .$$

$\widehat{R}$ ist ein k-Modul. Für $r = (r_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \widehat{R}$ verwendet man die Potenzreihenschreibweise

$$r = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r_n T^n \ .$$

Auf $\widehat{R}$ wird eine Multiplikation wie folgt erklärt:

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} r_n T^n\Big)\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} s_n T^n\Big) := \sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{p+q=n} r_p s_q\Big)T^n \ .$$

Man beachte, daß in der inneren Summe nur endlich viele Elemente $\neq 0$ aufsummiert werden. Damit wird $\widehat{R}$ zu einer k-Algebra.

(5.1) Definition: Die k-Algebra $\widehat{R}$ heißt die *Vervollständigung* (oder *Komplettierung*) von R. $\square$

Sei $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ ein $\mathbb{Z}$-graduierter R-Modul, und es gebe ein $m_0 \in \mathbb{Z}$ mit $M_n = 0$ für $n < m_0$. Auch für den k-Modul

$$\widehat{M} := \prod_{n\in\mathbb{Z}} M_n$$

benutzt man die Potenzreihenschreibweise $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n T^n$ für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Auf $\widehat{M}$ erklärt man eine $\widehat{R}$-Modul-Struktur: Für $r = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r_n T^n \in \widehat{R}$, $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n T^n \in \widehat{M}$ setzt man

$$rx := \sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{p+q=n} r_p x_q\Big)T^n \ .$$

Auch hier ist die innere Summe wohldefiniert.

(5.2) Definition: Sei $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ ein $\mathbb{Z}$-graduierter R-Modul mit $M_n = 0$ für $n < m_0$. Der $\widehat{R}$-Modul $\widehat{M}$ heißt die *Vervollständigung* (oder *Komplettierung*) von M. □

(5.3) Die Kategorie $\mathbf{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\gg}(R)$. Die volle Unterkategorie von $\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}(R)$, die aus allen $\mathbb{Z}$-graduierten R-Moduln $M = \bigoplus M_n$ besteht, für die es ein $m_0 = m_0(M) \in \mathbb{Z}$ gibt mit $M_n = 0$ für alle $n < m_0$, wird mit

$$\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\gg}(R)$$

bezeichnet. Offensichtlich gilt: *Für eine exakte Sequenz in* $\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}(R)$

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

ist $M_2 \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\gg}(R)$, genau wenn M_1, $M_3 \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\gg}(R)$. □

(5.4) Bemerkung: *Seien M, $N \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}(R)$ endlich erzeugt. Dann gilt:*
(1) $M \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\gg}(R)$.
(2) $\mathrm{HOM}_R(M,N) \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\gg}(k)$.

B e w e i s: (1) Es gibt einen Epimorphismus der Form

$$(*) \qquad \bigoplus_{i=1}^{n} R(m_i) \xrightarrow{\sigma} M \longrightarrow 0,$$

mit ganzen Zahlen m_i. Mit R ist auch $R(m_i) \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\gg}(R)$ für jedes $i \in \{1,\ldots,n\}$, und es folgt $\bigoplus_{i=1}^{n} R(m_i) \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\gg}(R)$. Weil σ ein Epimorphismus ist, folgt die Behauptung.
(2) Mit $(*)$ aus (1) ergibt sich die exakte Sequenz von graduierten k-Moduln

$$0 \longrightarrow \mathrm{HOM}_R(M,N) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{HOM}_R(R(m_i),N).$$

Es genügt also zu zeigen, daß $\mathrm{HOM}_R(R(m), N) \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\gg}(k)$ für jedes $m \in \mathbb{Z}$ gilt. Mit (1.8) folgt

$$\mathrm{HOM}_R(R(m), N) \simeq \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} N_{p-m} = N(-m),$$

und nach (1) folgt, da $N(-m)$ endlich erzeugt ist, die Behauptung. □

(5.5) Der Komplettierungsfunktor. Seien $M = \bigoplus M_n$, $N = \bigoplus N_n \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\gg}(R)$, und sei $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Man definiert ein $\hat{f} \in \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{M}, \widehat{N})$ wie folgt: Sei $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n T^n \in \widehat{M}$. Setze

$$\hat{f}(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x_n) T^n.$$

Man prüft leicht nach, daß $\hat{f}$ wirklich ein Element von $\mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{M}, \widehat{N})$ ist, und daß für f, $g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ die Beziehung

$$\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$$

gilt. Für komponierbare Homomorphismen f und g in $\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\gg}(R)$ gilt

$$\widehat{fg} = \hat{f}\hat{g}.$$

Ferner ist

$$\widehat{1_M} = 1_{\widehat{M}}.$$

Man erhält also einen covarianten additiven Funktor

$$\widehat{\cdot} : \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\gg}(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\widehat{R}),$$

den *Komplettierungsfunktor*. Insbesondere ist

$$\widehat{M \oplus N} \simeq \widehat{M} \oplus \widehat{N}.$$

□

(5.6) Lemma: *Sei $n \in \mathbb{Z}$. Für jedes $M \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\gg}(R)$ gibt es eine natürliche Isomorphie von $\widehat{R}$-Moduln*

$$\widehat{M(n)} \simeq \widehat{M}.$$

Beweis: Sei $M = \bigoplus M_n \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\gg}(R)$, $n \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$\widehat{M(n)} = \prod_{l \in \mathbb{Z}} M_{l+n} \simeq \prod_{l \in \mathbb{Z}} M_l = \widehat{M}.$$

Man prüft leicht nach, daß dies eine natürliche Isomorphie von $\widehat{R}$-Moduln ist. □

(5.7) Lemma: *Der Komplettierungsfunktor ist exakt und treu. Insbesondere gilt: Eine Sequenz*

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$$

in $\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\gg}(R)$ *ist genau dann exakt, wenn die komplettierte Sequenz*

$$\widehat{M_1} \xrightarrow{\hat{f}} \widehat{M_2} \xrightarrow{\hat{g}} \widehat{M_3}$$

in $\mathrm{Mod}(\widehat{R})$ *exakt ist.*

Beweis: Seien M, $N \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\gg}(R)$ und $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ sei $f_n : M_n \longrightarrow N_n$ die Einschränkung von f auf M_n. Dann gilt $f = \bigoplus f_n$ und $\hat{f} = \prod f_n$. Es folgt dann

$$f = 0 \iff \hat{f} = 0,$$

also ist $\widehat{\cdot}$ treu. Weiter gilt

$$\operatorname{Ker} f = \bigoplus \operatorname{Ker} f_n, \quad \operatorname{Im} f = \bigoplus \operatorname{Im} f_n,$$

$$\operatorname{Ker} \hat{f} = \prod \operatorname{Ker} f_n, \quad \operatorname{Im} \hat{f} = \prod \operatorname{Im} f_n,$$

vgl. Anderson-Fuller [1, 6.25], und die Aussage mit den exakten Sequenzen folgt dann sofort. □

(5.8) Korollar: *Sei* $M \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}(R)$ *endlich erzeugt. Ist* $x_1, \ldots, x_n$ *ein endliches homogenes Erzeugendensystem von* M*, so ist dies auch ein Erzeugendensystem des* $\widehat{R}$*-Moduls* $\widehat{M}$*. Insbesondere gilt* $\widehat{R}M = \widehat{M}$*.*

Beweis: Man wendet (5.7) an auf die exakte Sequenz

$$\bigoplus_{i=1}^{n} R(-m_i) \xrightarrow{\sigma} M \longrightarrow 0,$$

wobei $m_i = \operatorname{grad} x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ist $e_1, \ldots, e_n$ die homogene Standardbasis von $\bigoplus_{i=1}^n R(-m_i)$, so gilt $\sigma(e_i) = x_i$, und damit $\hat{\sigma}(e_i) = x_i$. Nun hat man einen $\widehat{R}$-Isomorphismus

$$f : \widehat{R}^n \longrightarrow \widehat{\bigoplus_{i=1}^{n} R(-m_i)},$$

der die Standardbasiselemente von $\widehat{R}^n$ auf die e_i abbildet. Man erhält also den Epimorphismus

$$\widehat{R}^n \xrightarrow{\hat{\sigma} f} \widehat{M} \longrightarrow 0,$$

und die Behauptung folgt. □

(5.9) Korollar: *Sei* $M \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\gg}(R)$*. Dann gilt*:
(1) $M \in \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}(R) \implies \widehat{M} \in \mathrm{mod}(\hat{R})$.
(2) $\widehat{M}$ *unzerlegbar* $\implies$ M *unzerlegbar.*
(3) M *endlich erzeugt graduiert projektiv* $\implies$ $\widehat{M}$ *projektiv.* □

(5.10) Korollar: *Seien* $M,\ N \in \mathrm{Mod}^{H}_{\gg}(R)$ *und* $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$*. Dann gilt*

$$\widehat{\mathrm{Ker}\, f} = \mathrm{Ker}\, \hat{f},\ \ \widehat{\mathrm{Coker}\, f} = \mathrm{Coker}\, \hat{f},\ \ \widehat{\mathrm{Im}\, f} = \mathrm{Im}\, \hat{f}.$$

Ist N *ein homogener Untermodul von* M*, so gilt* $\widehat{M/N} = \widehat{M}/\widehat{N}$*.*

Beweis: Die Aussagen folgen aus der Exaktheit des Komplettierungsfunktors oder aus dem Beweis von (5.7). □

(5.11) Korollar: *Es ist*

$$\widehat{\mathrm{HOM}_R(-,-)} : \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}(R) \times \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}(k)$$

ein additiver Bifunktor, contravariant linksexakt in der ersten und covariant linksexakt in der zweiten Variablen.

Beweis: Nach (1.7), (5.4)(2) und (5.7), da $\widehat{\mathrm{HOM}_R(-,-)}$ die Komposition der Funktoren $\widehat{\cdot}$ und $\mathrm{HOM}_R(-,-)$ ist. □

Seien $M,\ N \in \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$. Nach (5.4) kann man $\mathrm{HOM}_R(M, N)$ komplettieren. Andererseits kann man M und N erst komplettieren und dann die Homomorphismenmenge betrachten. Eine natürliche Frage ist, ob man dabei dasselbe erhält, ob also, grob gesprochen, Homomorphismenbildung und Bildung der Vervollständigung vertauschbar sind. Die Antwort auf diese Frage ist positiv, wie der nächste Satz zeigt. Dazu einige Vorbereitungen.
Sei $f \in \widehat{\mathrm{HOM}_R(M, N)}$. Es ist dann $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n T^n$, wobei f_n Homomorphismen von M nach N vom Grad n sind für jedes $n \in \mathbb{Z}$. Man definiert eine Abbildung $\hat{f} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{N}$ durch

$$\hat{f}(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{p+q=n} f_p(x_q) T^n$$

für jedes $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n T^n \in \widehat{M}$ (man vergleiche (5.5); dort ist $\hat{f}$ in einem anderen Kontext erklärt). Es ist $\hat{f} \in \mathrm{Hom}_{\hat{R}}(\widehat{M}, \widehat{N})$: Klar ist, daß $\hat{f}$ additiv ist. Sei $r = \sum r_n T^n \in \hat{R}$ und $x = \sum x_n T^n \in \widehat{M}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \hat{f}(rx) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{p+q=n} f_p\Big(\sum_{i+j=q} r_i x_j\Big) T^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{p+q=n} \sum_{i+j=q} f_p(r_i x_j) T^n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{p+q=n} \sum_{i+j=q} f_i(r_p x_j) T^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{p+q=n} r_p \Big(\sum_{i+j=q} f_i(x_j)\Big) T^n \end{aligned}$$

$$= \quad r\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{p+q=n} f_p(x_q)T^n\Big) = r\hat{f}(x).$$

Durch die Zuordnung $f \longmapsto \hat{f}$ erhält man also eine Abbildung

$$\phi_{M,N} : \widehat{\mathrm{HOM}_R(M,N)} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{M},\widehat{N}),$$

und ohne Schwierigkeiten sieht man, daß dies ein Homomorphismus von k-Moduln ist. Es wird nun gezeigt, daß $\phi_{M,N}$ ein funktorieller Isomorphismus ist.

(5.12) Satz: *Seien M, $N \in \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$. Es ist*

$$\phi_{M,N} : \widehat{\mathrm{HOM}_R(M,N)} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{M},\widehat{N})$$

eine in M und N natürliche Isomorphie von k-Moduln.

Beweis: (1) Zunächst wird die Natürlichkeit in der ersten Variablen gezeigt. Seien M_1, $M_2 \in \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$ und $f \in \mathrm{Hom}_R(M_1,M_2)$. ${}^*f := \widehat{\mathrm{HOM}_R(f,N)}$ ist definiert durch: Für jedes $h = \sum h_nT^n \in \widehat{\mathrm{HOM}_R(M_2,N)}$ sei

$${}^*f(h) := \sum h_n fT^n \in \widehat{\mathrm{HOM}_R(M_1,N)}.$$

${}_*f := \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\hat{f},\widehat{N})$ wird so definiert: Ist $g \in \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{M_2},\widehat{N})$, so sei

$${}_*f(g) := g\hat{f} \in \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{M_1},\widehat{N})$$

($\hat{f}$ wie in (5.5) definiert). Es ist dann klar, daß das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathrm{HOM}_R(M_2,N)} \arrow[r, "{}^*f"] \arrow[d, "\phi_{M_2,N}"'] & \widehat{\mathrm{HOM}_R(M_1,N)} \arrow[d, "\phi_{M_1,N}"] \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{M_2},\widehat{N}) \arrow[r, "{}_*f"] & \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{M_1},\widehat{N})
\end{tikzcd}$$

(2) Zur Natürlichkeit in der zweiten Variablen. Seien N_1, $N_2 \in \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$ und $f \in \mathrm{Hom}_R(N_1,N_2)$. Es ist dann $f^* := \widehat{\mathrm{HOM}_R(M,f)}$ folgendermaßen definiert: Ist $h = \sum h_nT^n \in \widehat{\mathrm{HOM}_R(M,N_1)}$, so ist

$$f^*(h) := \sum fh_nT^n \in \widehat{\mathrm{HOM}_R(M,N_2)}.$$

Und $f_* := \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{M},\hat{f})$ ist so definiert: Für jedes $g \in \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{M},\widehat{N_1})$ ist

$$f_*(g) = \hat{f}g \in \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{M},\widehat{N_2}).$$

Auch hier folgt dann direkt die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathrm{HOM}_R(M, N_1)} \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\phi_{M,N_1}"'] & \widehat{\mathrm{HOM}_R(M, N_2)} \arrow[d, "\phi_{M,N_2}"] \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{M}, \widehat{N_1}) \arrow[r, "f_*"] & \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{M}, \widehat{N_2})
\end{tikzcd} .$$

(3) $\phi_{M,N}$ ist Isomorphismus:

(a) Sei zunächst $M = R(n)$ mit einem $n \in \mathbb{Z}$. Zur Abkürzung sei $\phi = \phi_{R(n),N}$. Es wird die Umkehrabbildung ψ zu ϕ angegeben. Sei $f : R(n) \longrightarrow R$ der natürliche Isomorphismus vom Grad n (d.h. als Abbildung aufgefaßt von R nach R ist f die Identität). Sei $h \in \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{R(n)}, \widehat{N})$. Für $p \in \mathbb{Z}$ und $x \in R(n)$ sei

$$h_p(x) := f(x)(hf^{-1}(1_R))_{p-n}.$$

Auf der rechten Seite ist dabei die $(p-n)$-te Komponente von $hf^{-1}(1_R)$ in $\widehat{N}$ berechnet worden. Offensichtlich gilt mit dieser Definition $h_p \in \mathrm{Hom}_R(R(n), N(p))$. Setze jetzt

$$\psi(h) := \sum_{p\in\mathbb{Z}} h_p T^p \in \widehat{\mathrm{HOM}_R(R(n), N)}.$$

Sei $x = \sum x_q T^q \in \widehat{R(n)}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\phi\psi(h)(x) &= \widehat{\psi(h)}(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{p+q=l} h_p(x_q)T^l = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{p+q=l} f(x_q)(hf^{-1}(1_R))_{p-n}T^l \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{p+q=l} f(x_{q-n})(hf^{-1}(1_R))_p T^l = \Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}} f(x_{l-n})T^l\Big)\Big(\sum_{p\in\mathbb{Z}} (hf^{-1}(1_R))_p T^p\Big) \\
&= h\Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}} f(x_l)f^{-1}(1_R)T^l\Big) = h(x).
\end{aligned}$$

Sei jetzt $h = \sum h_p T^p \in \widehat{\mathrm{HOM}_R(R(n), N)}$. Dann ist

$$\psi\phi(h) = \psi(\hat{h}) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} h'_p T^p,$$

mit $h'_p(x) = f(x)(\hat{h}f^{-1}(1_R))_{p-n}$ für jedes $x \in R(n)$, $p \in \mathbb{Z}$. Es folgt dann aber $h_p = h'_p$ für jedes $p \in \mathbb{Z}$, und damit $\psi\phi(h) = h$. Insgesamt ist also ψ die Umkehrabbildung zu ϕ, also ein Homomorphismus von k-Moduln, und so ist $\phi = \phi_{R(n),N}$ ein Isomorphismus von k-Moduln.

(b) Sei nun M endlich erzeugt graduiert frei. Hat M eine homogene Basis, die nur aus einem Element besteht, so hat man den Fall (a). Andernfalls geht man induktiv so vor: Man kann M zerlegen in $M = M_1 \oplus M_2$, wobei $\phi_{M_1,N}$ und $\phi_{M_2,N}$ Isomorphismen sind. Man hat dann die aufspaltende exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0,$$

und daraus erhält man aus (1) das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widehat{\mathrm{HOM}_R(M_2, N)} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{M_2,N}"'] & \widehat{\mathrm{HOM}_R(M, N)} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{M,N}"] & \widehat{\mathrm{HOM}_R(M_1, N)} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{M_1,N}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{M_2}, \widehat{N}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{M}, \widehat{N}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{M_1}, \widehat{N}) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Nach dem Fünfer-Lemma ist $\phi_{M,N}$ ein Isomorphismus.

(c) Sei nun M beliebig. Die exakte Sequenz

$$F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

wobei F_1 und F_2 endlich erzeugt graduiert frei, liefert mit (1) das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widehat{\mathrm{HOM}_R(M, N)} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{M,N}"'] & \widehat{\mathrm{HOM}_R(F_1, N)} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{F_1,N}"] & \widehat{\mathrm{HOM}_R(F_2, N)} \arrow[d, "\phi_{F_2,N}"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{M}, \widehat{N}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{F_1}, \widehat{N}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{F_2}, \widehat{N}).
\end{tikzcd}$$

Nach (b) sind $\phi_{F_1,N}$ und $\phi_{F_2,N}$ Isomorphismen, also ist auch $\phi_{M,N}$ ein Isomorphismus, wieder nach dem Fünfer-Lemma. $\square$

Es sei $\phi_M := \phi_{M,M}$ für jedes $M \in \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$.

(5.13) Korollar: *Sei $M \in \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$. Dann ist*

$$\phi_M : \widehat{\mathrm{END}_R(M)} \longrightarrow \mathrm{End}_{\widehat{R}}(\widehat{M})$$

ein Isomorphismus von k-Algebren.

B e w e i s: Eine Rechnung, die der im Vorspann zu Satz (5.12) ähnlich ist, zeigt $\hat{f}\hat{g} = \widehat{fg}$ für $f, g \in (\mathrm{END}_R(M))\widehat{\ }$. $\square$

§6 Unzerlegbarkeit

In diesem Paragraphen sei k ein Körper und

$$R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$$

eine $\mathbb{Z}$-graduierte k-Algebra, und es gebe ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ mit

$$R_n = 0 \text{ für alle } n < n_0.$$

Es soll hier untersucht werden, ob Unzerlegbarkeit unter Vervollständigung erhalten bleibt. Zunächst wird gezeigt, daß zwei unzerlegbare graduierte Moduln genau dann bis auf Verschiebung isomorph sind, wenn ihre Vervollständigungen isomorph sind.

(6.1) Satz: *Es gelte* $\dim_k R_n < \infty$ *für jedes* $n \in \mathbb{Z}$. *Seien* $M, N \in \operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$, M *unzerlegbar, und es sei* $\widehat{M}$ *ein direkter Summand von* $\widehat{N}$. *Dann gibt es ein* $d \in \mathbb{Z}$, *so daß* M *ein direkter Summand von* $N(d)$ *ist.*

Beweis: Seien $f \in \operatorname{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{M}, \widehat{N})$, $g \in \operatorname{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{N}, \widehat{M})$ mit $gf = 1_{\widehat{M}}$. Nach Satz (5.12) hat man $f = \sum f_n T^n$, $g = \sum g_n T^n$. Es folgt

$$1_{\widehat{M}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Big(\sum_{p+q=n} g_p f_q \Big) T^n,$$

und wenn man die nullte Komponente beider Seiten vergleicht:

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} g_{-p} f_p = 1_M.$$

Da $\operatorname{End}_R(M)$ lokal nach (2.4) ist, gibt es ein $d \in \mathbb{Z}$ mit: $g_{-d} f_d$ ist Einheit in $\operatorname{End}_R(M)$. Es existiert also ein $\phi \in \operatorname{End}_R(M)$ mit

$$1_M = (\phi g_{-d}) f_d.$$

Es ist $f_d \in \operatorname{Hom}_R(M, N(d))$, M ist also direkter Summand von $N(d)$. $\square$

(6.2) Korollar: *Es gelte* $\dim_k R_n < \infty$ *für jedes* $n \in \mathbb{Z}$. *Seien* M *und* N *unzerlegbar in* $\operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$ *mit* $\widehat{M} \simeq \widehat{N}$. *Dann gibt es ein* $d \in \mathbb{Z}$ *mit* $M \simeq N(d)$.

Beweis: Nach (6.1) ist M direkter Summand von $N(d)$ für ein $d \in \mathbb{Z}$. Da $M \neq 0$ und $N(d)$ unzerlegbar ist, folgt $M \simeq N(d)$. $\square$

(6.3) Korollar: *Es gelte* $\dim_k R_n < \infty$ *für jedes* $n \in \mathbb{Z}$. *Sei* M *in* $\operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$ *unzerlegbar. Ist* $\widehat{M}$ *projektiv, so ist* M *graduiert projektiv.*

Beweis: Ist $\widehat{M}$ projektiv, also direkter Summand von $\widehat{R}^n$, so gibt es ein $d \in \mathbb{Z}$ mit: M ist direkter Summand von $R(d)^n \simeq R^n(d)$, also ist M projektiv. $\square$

(6.4) Lemma: *Sei* S *ein einfacher* $\mathbb{Z}$*-graduierter* R*-Modul. Dann gilt:*
(1) S *ist einfacher* R*-Modul und* $S = \widehat{S}$.
(2) *Ist* R *graduiert lokal, so ist* S *konzentriert und einfacher* R_0*-Modul.*

B e w e i s: Es gibt ein maximales homogenes Linksideal $\mathfrak{m}$ in R und ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $S \simeq (R/\mathfrak{m})(n)$. Ohne Einschränkung sei $n = 0$ und $S = R/\mathfrak{m}$. Dann gilt $S_m = 0$ für $m < n_0$ und $m > -n_0$. Also hat S nur endlich viele homogene Komponenten $\neq 0$, und damit $S = \widehat{S}$. S ist einfacher R-Modul: Sei $x \in S$, $x \neq 0$,

$$x = \sum_{n=n_0}^{m} x_n T^n$$

mit $x_m \neq 0$, $n_0 \leq m \leq -n_0$. Sei $y := x - x_m \in S$. Wegen $Rx_m = S$ gibt es $r \in R$ mit $y = rx_m$, und man kann r so wählen, daß alle homogenen Komponenten $\neq 0$ von r den Grad < 0 haben. Dann ist r nilpotent, also $1 + r$ Einheit in R, und aus $x = (1 + r)x_m$ folgt $Rx = S$.
Für graduiert lokales R ist $R/\mathfrak{m}$ ein graduierter Schiefkörper mit nilpotentem negativen Anteil, also ist $S = S_0$ einfacher R_0-Modul.

□

(6.5) Korollar: *Es gilt*

$$\operatorname{rad} R \subset \operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} R.$$

B e w e i s: Dies folgt mit (6.4) direkt aus (1.12)(4). □

(6.6) Korollar: *Sei R endlichdimensional. Dann gilt*

$$\operatorname{rad} R = \operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} R.$$

B e w e i s: R ist linksartinsche Algebra. Dann ist $\operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} R$ nilpotent (folgt wie im ungraduierten Fall), und mit [1, 15.19] folgt $\operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} R \subset \operatorname{rad} R$. □

Die Beweise der folgenden beiden Aussagen sind einfach. Ich lasse sie daher weg.

(6.7) Lemma: *Sei R positiv graduiert, d.h. es gelte $R_n = 0$ für $n < 0$. Ist R graduiert lokal mit homogenem Radikal $\mathfrak{m}$, so ist $\widehat{R}$ lokal mit Radikal $\widehat{\mathfrak{m}}$. Es ist $x = \sum x_n T^n \in \widehat{R}$ invertierbar, genau wenn $x_0 \in R_0$ invertierbar ist.* □

(6.8) Lemma: *Sei R kommutativ. Ist R graduiert lokal mit homogenem Radikal $\mathfrak{m}$, so ist $\widehat{R}$ lokal mit Radikal $\widehat{\mathfrak{m}}$.* □

(6.9) Satz: *Sei $K = \bigoplus K_n$ eine kommutative, zentrale $\mathbb{Z}$-graduierte k-Unteralgebra von R mit $K_0 = k$, so daß R endlich erzeugter K-Modul ist. Dann gilt*

$$\widehat{\operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} R} = \operatorname{rad} \widehat{R}.$$

Insbesondere: *Ist R graduiert lokal, so ist $\widehat{R}$ lokal.*

Beweis: K ist graduiert lokal. Sei $\mathfrak{m}$ das maximale homogene Linksideal von K. $K/\mathfrak{m}$ ist ein (kommutativer) graduierter Schiefkörper, dessen negative homogene Komponenten nur nilpotente Elemente enthalten. Also gilt

$$K/\mathfrak{m} = K_0/\mathfrak{m}_0 = k.$$

$\mathfrak{m}R$ ist ein homogenes Ideal in R. Mit dem Nakayama-Lemma (1.12)(5) gilt

$$\mathfrak{m}R \subset \operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} R.$$

$R/\operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} R$ ist endlich erzeugter $K/\mathfrak{m}$-Modul, also endlichdimensionale k-Algebra. Mit (2.6)(1) folgt, daß

$$R/\operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} R = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$$

mit einfach graduierten R-Moduln S_i gilt. Aus (6.4) folgt dann:

$$\widehat{R}/\widehat{\operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} R} = R/\widehat{\operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} R} = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$$

ist halbeinfach, also

$$\operatorname{rad}\left(\widehat{R}/\widehat{\operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} R}\right) = 0,$$

also $\operatorname{rad}\widehat{R} \subset \widehat{\operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} R}$.
$(\operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} R)^{\widehat{}} \subset \operatorname{rad}\widehat{R}$: Sei

$$\Lambda := R/\mathfrak{m}R.$$

Λ ist $\mathbb{Z}$-graduierte k-Algebra und endlichdimensional. $\mathfrak{m}$ ist ein Primideal in K. Es kann also nach $\mathfrak{m}$ lokalisiert werden. Die K-Algebren $k = K/\mathfrak{m}$ und $k_{\mathfrak{m}}$ sind isomorph ($\alpha \mapsto \frac{\alpha}{1}$ ist ein Isomorphismus). Sei

$$\Gamma := R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}.$$

Es folgt

$$\Gamma \simeq \Lambda_{\mathfrak{m}} \simeq R \otimes_K K/\mathfrak{m} \otimes_K K_{\mathfrak{m}} \simeq R \otimes_K K/\mathfrak{m} \simeq \Lambda$$

(Isomorphien von K-Algebren). Man kann also Γ mit einer $\mathbb{Z}$-Graduierung versehen, Γ ist endlichdimensional, und nach (6.6) ist $\operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} \Gamma = \operatorname{rad} \Gamma$. Aus dem Nakayama-Lemma (ungraduiert) folgt $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}} \subset \operatorname{rad} R_{\mathfrak{m}}$. Bezeichnet $\psi : \Lambda \longrightarrow \Gamma$ obigen Isomorphismus, so gilt dann

$$\operatorname{rad}(R_{\mathfrak{m}})/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}} = \operatorname{rad}\Gamma = \psi(\operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} \Lambda) = (\operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} R)_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}},$$

also

$$(\operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} R)_{\mathfrak{m}} = \operatorname{rad} R_{\mathfrak{m}}.$$

Man hat die Ringhomomorphismen

$$R_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\varphi_1} \widehat{R}_{\widehat{\mathfrak{m}}} \xrightarrow{\varphi_2} \widehat{R},$$

wobei φ_1 die kanonische Einbettung ist und $\varphi_2(\frac{x}{s}) = s^{-1}x$ (s^{-1} in $\widehat{K}$ berechnet, siehe (6.8); es gilt $K \setminus \mathfrak{m} \subset \widehat{K} \setminus \widehat{\mathfrak{m}}$.) gilt. Setze $\varphi := \varphi_2\varphi_1$.
Sei nun $x = \sum x_n T^n \in (\operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} R)\widehat{\ }$. Sei $x = y + z$,

$$y = \sum_{n=n_0}^{-n_0} x_n T^n, \; z = \sum_{n=-n_0+1}^{\infty} x_n T^n.$$

Es gilt $y \in \operatorname{rad}^{\mathbb{Z}}(R)$. Dann ist aber

$$\frac{y}{1} \in (\operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} R)_{\mathfrak{m}} = \operatorname{rad} R_{\mathfrak{m}},$$

damit $\frac{1}{1} + \frac{y}{1}$ invertierbar in $R_{\mathfrak{m}}$, also $1 + y = \varphi(\frac{1}{1} + \frac{y}{1})$ invertierbar in $\widehat{R}$. Nach (6.7) sind $1 + rz$ und $1 + zr$ invertierbar in $\widehat{R}$ für alle $r \in \widehat{R}$. Es gilt $1 + x = 1 + y + z$. Seien $r := (1+y)^{-1}$, $u := (1+zr)^{-1}$ und $u' := (1+rz)^{-1}$. Es folgt

$$(1+x)ru = ((1+y)r + zr)u = (1+zr)u = 1$$

und

$$u'r(1+x) = u'(r(1+y) + rz) = u'(1+rz) = 1.$$

Also ist $1 + x$ invertierbar in $\widehat{R}$. Es folgt

$$\widehat{\operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} R} \subset \operatorname{rad} \widehat{R}$$

(vgl. Pierce [22, 4.3 Cor. a]). Insgesamt gilt also die Gleichheit dieser Mengen.
Ist R graduiert lokal, so folgt dann mit (6.4)(2) $R/\operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} R = R_0/\operatorname{rad} R_0$. Dann ist $\widehat{R}/\operatorname{rad}\widehat{R} = R_0/\operatorname{rad} R_0$ einfacher $\widehat{R}$-Modul, also $\widehat{R}$ lokal. □

(6.10) Korollar: *Sei $K = \bigoplus K_n$ eine kommutative und noethersche $\mathbb{Z}$-graduierte k-Unteralgebra von R mit $K_0 = k$, die zentral in R liegt, so daß R endlich erzeugter K-Modul ist. Weiter gelte* $\dim_k R_n < \infty$ *für alle $n \in \mathbb{Z}$. Sei $M \in \operatorname{mod}^{\mathbb{Z}} R$. Dann gilt: Ist M unzerlegbar, so ist* $\operatorname{End}_{\widehat{R}}(\widehat{M})$ *lokal, insbesondere $\widehat{M}$ unzerlegbar.*

B e w e i s: Sei

$$E := \operatorname{END}_R(M).$$

E ist ein $\mathbb{Z}$-graduierter K-Modul. Sei F endlich erzeugt graduiert frei mit der exakten Sequenz

$$F \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Daraus erhält man die exakte Sequenz von K-Moduln

$$0 \longrightarrow \operatorname{HOM}_R(M, M) \longrightarrow \operatorname{HOM}_R(F, M).$$

Mit M ist auch $\operatorname{HOM}_R(F, M)$ endlich erzeugter K-Modul, und weil K noethersch ist, ist auch $E = \operatorname{HOM}_R(M, M)$ endlich erzeugter K-Modul.
Sei nun M unzerlegbar. Dann ist nach (2.4) $\operatorname{End}_R(M)$ lokal und damit E graduiert lokal nach (1.14). Nun kann (6.9) auf E statt R angewandt werden, und es ergibt sich, daß $\widehat{E}$ lokal ist. Mit (5.13) folgt nun, daß $\operatorname{End}_{\widehat{R}}(\widehat{M})$ lokal und damit $\widehat{M}$ unzerlegbarer $\widehat{R}$-Modul ist. □

§7 Vervollständigung $\mathbb{Z}$-graduierter Cohen-Macaulay Moduln

Sei k ein Körper. Sei $K = k[X_1, \dots, X_d]$ eine $\mathbb{Z}$-graduierte Polynomalgebra, $K = \bigoplus K_n$ mit $K_0 = k$ und alle X_i homogen. Ohne Einschränkung seien die Grade der Unbestimmten alle positiv[5]. $\mathfrak{m}$ sei das von den Unbestimmten erzeugte maximale homogene Ideal. Desweiteren sei $R = \bigoplus R_n$ eine endliche $\mathbb{Z}$-graduierte K-Algebra. Ist $\sigma_i := \operatorname{grad} X_i$ $(i = 1, \dots, d)$, so gilt für jedes $n \in \mathbb{Z}$

$$K_n = \langle X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d} \mid \alpha_i \geq 0,\ \sum \alpha_i \sigma_i = n \rangle,$$

insbesondere $\dim_k K_n < \infty$.

(7.1) Lemma: *Die k-Algebren $\widehat{K}$ und $k[[X_1 \dots, X_d]]$ sind isomorph. Insbesondere ist $\widehat{K}$ ein noetherscher, regulär lokaler Ring, der bezüglich der $\widehat{\mathfrak{m}}$-adischen Topologie komplett ist.*

B e w e i s: Durch

$$\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in\mathbb{N}_0^d} \beta_{(\alpha_1,\dots,\alpha_d)} X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d} \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{\sum \alpha_i\sigma_i = n} \beta_{(\alpha_1,\dots,\alpha_d)} X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d} \Big) T^n$$

wird ein Isomorphismus $k[[X_1 \dots, X_d]] \longrightarrow \widehat{K}$ definiert. □

$\widehat{R}$ ist eine endliche $\widehat{K}$-Algebra. Mit $\mathrm{CM}(\widehat{R})$ wird die volle Unterkategorie aller $M \in \mathrm{mod}(\widehat{R})$, die frei über $\widehat{K}$ sind, bezeichnet. Deren Objekte heißen *Cohen-Macaulay $\widehat{R}$-Moduln*. $\mathrm{mod}(\widehat{R})$ und $\mathrm{CM}(\widehat{R})$ sind Krull-Schmidt-Kategorien (vgl. [18, (21.35)]). Durch Einschränkung des Komplettierungsfunktors erhält man den Funktor

$$\widehat{\cdot} : \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R) \longrightarrow \mathrm{CM}(\widehat{R}).$$

Dieser Funktor wird im dritten Kapitel ausführlich untersucht. Erste Aussagen folgen jedoch unmittelbar aus dem vorangegangenen Abschnitt.

(7.2) Satz: (1) *Sei $M \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$ unzerlegbar. Dann ist $\widehat{M} \in \mathrm{CM}(\widehat{R})$ unzerlegbar.*
(2) *Seien M und N unzerlegbar in $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$. Ist $\widehat{M} \simeq \widehat{N}$, so gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $M \simeq N(n)$.* □

R heißt von *endlichem graduierten Cohen-Macaulay-Typ*, falls es nur endlich viele Verschiebungsklassen von unzerlegbaren graduierten Cohen-Macaulay Moduln in $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$ gibt. Ebenso heißt $\widehat{R}$ von *endlichem Cohen-Macaulay-Typ*, falls es nur endlich viele Isomorphieklassen von unzerlegbaren Cohen-Macaulay Moduln in $\mathrm{CM}(\widehat{R})$ gibt. Umformuliert lautet (7.2) dann so:

[5]Die Grade der Unbestimmten sind wegen $K_0 = k$ alle > 0 oder alle < 0.

(7.3) Korollar: *Der Komplettierungsfunktor*

$$\widehat{\cdot} : \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R) \longrightarrow \mathrm{CM}(\widehat{R})$$

induziert eine injektive Abbildung von der Menge aller Verschiebungsklassen unzerlegbarer graduierter Cohen-Macaulay Moduln über R in die Menge aller Isomorphieklassen unzerlegbarer Cohen-Macaulay Moduln über $\widehat{R}$. Ist $\widehat{R}$ von endlichem Cohen-Macaulay-Typ, so ist R von endlichem graduierten Cohen-Macaulay-Typ. $\square$

Die Abbildung aus dem Korollar ist offenbar genau dann bijektiv, wenn der Funktor $\widehat{\cdot} : \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R) \longrightarrow \mathrm{CM}(\widehat{R})$ repräsentativ ist. In Satz (14.5) wird ein hinreichendes Kriterium hierfür angegeben werden.

Kapitel III
Auslander-Reiten-Folgen und ihre Vervollständigung

In diesem Kapitel sei H eine abelsche Gruppe und $K = k[X_1, \ldots, X_d] = \bigoplus K_h$ eine H-graduierte Polynomalgebra über dem Körper k, so daß die Unbestimmten X_i homogen und alle K_h endlichdimensional mit $K_0 = k$ sind. Wenn $H = \mathbb{Z}$ ist, soll K positiv graduiert sein. $R = \bigoplus R_h$ sei eine H-graduierte Cohen-Macaulay K-Algebra. Hauptergebnis dieses Kapitels ist, daß der Komplettierungsfunktor

$$\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R) \longrightarrow \mathrm{CM}(\widehat{R})$$

Auslander-Reiten-Folgen bewahrt. Ein analoges Resultat wird für minimal rechts-fast-aufspaltende Morphismen, die in einem Projektiven enden, bewiesen. Ferner wird untersucht, wann der Komplettierungsfunktor repräsentativ ist, und wie sich der Auslander-Reiten-Köcher von $\mathrm{CM}(\widehat{R})$ aus dem von $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$ berechnen läßt.

§8 Einige Funktoren

Sei

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

eine Folge von Morphismen mit A, B, $C \in \mathrm{CM}^H(R)$. Diese Folge heißt *exakt in* $\mathrm{CM}^H(R)$, wenn sie exakt in $\mathrm{mod}^H(R)$ ist (da R links- und rechtsnoethersch ist, ist $\mathrm{mod}^H(R)$ abelsch).
Sei $A \in \mathrm{CM}^H(R)$. A heißt ein *injektives Objekt in* $\mathrm{CM}^H(R)$ (bzw.: ist $\mathrm{CM}^H(R)$-*injektiv*), wenn jede exakte Sequenz in $\mathrm{CM}^H(R)$ der Form

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

aufspaltet. Analog werden $\mathrm{CM}^H(R)$-*projektive* Objekte definiert. Es gilt aber: $C \in \mathrm{CM}^H(R)$ ist genau dann $\mathrm{CM}^H(R)$-projektiv, wenn C graduiert projektiv ist; dies folgt aus (4.3)(6).

(8.1) Der Funktor $\mathbf{D}^{\boldsymbol{H}}$. Für jedes $M \in \mathrm{mod}^H(R)$ sei

$$\mathrm{D}^H(M) := \mathrm{HOM}_K(M, K).$$

□

(8.2) Lemma: D^H *induziert eine Dualität*

$$\mathrm{D}^H : \mathrm{CM}^H(R) \longrightarrow \mathrm{CM}^H(R^{op}).$$

Diese hat folgende Eigenschaften:
(1) *Für jedes* $C \in \mathrm{CM}^H(R)$ *und* $h \in H$ *gilt*

$$\mathrm{D}^H(C(h)) \simeq \mathrm{D}^H(C)(-h).$$

(2) *Sei* $A \in \mathrm{CM}^H(R)$. *A ist genau dann unzerlegbar, wenn* $\mathrm{D}^H A$ *unzerlegbar ist.*
(3) *Eine Folge*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

ist genau dann exakt in $\mathrm{CM}^H(R)$, *wenn die Folge*

$$0 \longrightarrow \mathrm{D}^H C \xrightarrow{\mathrm{D}^H g} \mathrm{D}^H B \xrightarrow{\mathrm{D}^H f} \mathrm{D}^H A \longrightarrow 0$$

in $\mathrm{CM}^H(R^{op})$ *exakt ist.*
(4) *Sei* $C \in \mathrm{CM}^H(R)$. *C ist genau dann graduiert projektiv, wenn* $\mathrm{D}^H C$ *injektives Objekt in* $\mathrm{CM}^H(R^{op})$ *ist.*
(5) *Sei* $A \in \mathrm{CM}^H(R)$. *A ist genau dann* $\mathrm{CM}^H(R)$*-injektiv, wenn* $\mathrm{D}^H A$ *projektiv über* R^{op} *ist.*

Beweis: Sei $r \in R$ und $f \in \mathrm{Hom}_K(M, K(h))$ für ein $h \in H$. Durch $(fr)(x) := f(rx)$ $(x \in M)$ wird $\mathrm{D}^H(M)$ zu einem H-graduierten R^{op}-Modul. Sei M Cohen-Macaulay, $M \simeq \bigoplus K(h_i)$, $h_1, \ldots, h_n \in H$. Dann ist $\mathrm{D}^H M \simeq \bigoplus K(-h_i)$, also ebenfalls Cohen-Macaulay. Außerdem sieht man so $\mathrm{HOM}_K(\mathrm{HOM}_K(M, K), K) \simeq M$, und daß D^H eine Dualität induziert. Die Eigenschaften (1)–(5) verifiziert man leicht. Man verwendet bei (3)–(5), daß kurze exakte Sequenzen in $\mathrm{CM}^H(R)$ über K aufspalten. □

Die entsprechende Dualität $\mathrm{CM}^H(R^{op}) \longrightarrow \mathrm{CM}^H(R)$ wird ebenfalls mit D^H bezeichnet.

(8.3) Die stabile Kategorie. (Für Einzelheiten siehe etwa Auslander-Reiten [5, §2]). Die *stabile* Kategorie $\underline{\mathrm{Mod}}^H(R)$ hat dieselben Objekte wie $\mathrm{Mod}^H(R)$, und für zwei Objekte M und N ist die Morphismenmenge gegeben durch

$$\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, N) := \mathrm{Hom}_R(M, N)/\, \mathrm{P}(M, N),$$

wobei $\mathrm{P}(M, N)$ der k-Untermodul aller Homomorphismen vom Grad 0 ist, die durch einen graduiert projektiven Modul faktorisieren. Man erhält kanonisch einen vollen Funktor $\mathrm{Mod}^H(R) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}^H(R)$. Ist $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, so wird das Bild von f in $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M, N)$ mit $\underline{f}$ bezeichnet. Seien $M \in \mathrm{Mod}^H(R)$ und

$$P \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0$$

ein Epimorphismus in $\mathrm{Mod}^H(R)$ mit P projektiv. Dann ist ein $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ genau dann in $\mathrm{P}(M,N)$, wenn f durch p faktorisiert. Damit erhält man eine exakte Sequenz

$$\mathrm{Hom}_R(M,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N) \longrightarrow 0.$$

Ist N endlich präsentiert, so kann man P endlich präsentiert wählen (z.B eine projektive Hülle). Mit $\underline{\mathrm{mod}}^H(R)$ wird die volle Unterkategorie von $\underline{\mathrm{Mod}}^H(R)$ bezeichnet, die aus den endlich präsentierten Objekten besteht.
Weiter setzt man $\underline{\mathrm{End}}_R(M) := \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,M)$,

$$\underline{\mathrm{HOM}}_R(M,N) := \bigoplus_{h\in H} \underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N(h)) = \bigoplus_{h\in H} \mathrm{Hom}_R(M,N(h))/\bigoplus_{h\in H} \mathrm{P}(M,N(h))$$

und $\underline{\mathrm{END}}_R(M) := \underline{\mathrm{HOM}}_R(M,M)$. □

(8.4) Der Funktor Tr^H. Sei

$$P_1(M) \longrightarrow P_0(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine minimale projektive Auflösung für jedes M in $\mathrm{mod}^H(R)$. Dann ist $\mathrm{Tr}^H M$ gegeben als Cokern-Term der exakten Sequenz

$$\mathrm{HOM}_R(P_0(M),R) \longrightarrow \mathrm{HOM}_R(P_1(M),R) \longrightarrow \mathrm{Tr}^H M \longrightarrow 0.$$

Aus dieser Darstellung folgt $\mathrm{Tr}^H M \in \mathrm{mod}^H(R^{op})$. Sei $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ ein Morphismus in $\mathrm{mod}^H(R)$. Man erhält ein exaktes kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
P_1(M) \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & P_0(M) \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
P_1(N) \arrow[r] & P_0(N) \arrow[r] & N \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Dies liefert dann ein exaktes kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{HOM}_R(P_0(N),R) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{HOM}_R(P_1(N),R) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Tr}^H N \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Tr}^H_{f_1,f_0}(f)"] & 0 \\
\mathrm{HOM}_R(P_0(M),R) \arrow[r] & \mathrm{HOM}_R(P_1(M),R) \arrow[r] & \mathrm{Tr}^H M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Dieses $\mathrm{Tr}^H_{f_1,f_0}(f)$ ist abhängig von der Auswahl von f_0 und f_1. Wählt man andere f_0', f_1', so gilt

$$\underline{\mathrm{Tr}^H_{f_1,f_0}(f)} = \underline{\mathrm{Tr}^H_{f_1',f_0'}(f)}$$

in der stabilen Kategorie $\underline{\mathrm{mod}}^H(R^{op})$. □

Man erhält (vgl. z.B. [5]):

(8.5) Lemma: Tr^H *induziert eine Dualität*

$$\mathrm{Tr}^H : \underline{\mathrm{mod}}^H(R) \longrightarrow \underline{\mathrm{mod}}^H(R^{op}).$$

□

(8.6) Die Funktoren $\boldsymbol{\Omega^n_H}$. Sei

$$P_n(M) \xrightarrow{f_M} P_{n-1}(M) \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1(M) \longrightarrow P_0(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine minimale projektive Auflösung für jedes M in $\mathrm{mod}^H(R)$ und

$$\Omega^n_H M := \mathrm{Im}\, f_M.$$

Da R linksnoethersch ist, folgt $\Omega^n_H M \in \mathrm{mod}^H(R)$ für jedes $M \in \mathrm{mod}^H(R)$. Sei $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ ein Morphismus in $\mathrm{mod}^H(R)$. Dann hat man ein exaktes kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^1_H M \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & P_0(M) \arrow[r] \arrow[d, "f_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^1_H N \arrow[r] & P_0(N) \arrow[r] & N \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

$\underline{h}$ ist unabhängig von der Wahl von f_0, und man setzt $\Omega^1_H f := \underline{h}$. Induktiv werden dann $\Omega^n_H f$ $(n > 0)$ definiert (und $\Omega^0_H f = f$). Man erhält also Funktoren

$$\Omega^n_H : \underline{\mathrm{mod}}^H(R) \longrightarrow \underline{\mathrm{mod}}^H(R).$$

□

(8.7) Lemma: *Sei $M \in \mathrm{mod}^H(R)$. Dann ist $\Omega^d_H M \in \mathrm{CM}^H(R)$.*

Beweis: Aus einer minimalen projektiven Auflösung von M wie in (8.6) erhält man eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega^d_H M \longrightarrow P_{d-1}(M) \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

in $\mathrm{mod}^H(R)$, also auch in $\mathrm{mod}^H(K)$. Wegen $R \in \mathrm{CM}^H(R)$ sind alle $P_i(M)$ projektiv über K $(i = 0, \ldots, d-1)$. Weil K ein graduiert regulär lokaler Ring ist (und damit die graduierte globale Dimension von K gleich d ist[6]), folgt, daß $\Omega^d_H M$ graduiert projektiv über K ist. □

[6] Vgl. Matsumura [19, Thm. 19.2].

Mit $\tilde{d} := \operatorname{grad} X_1 + \cdots + \operatorname{grad} X_d$ sei für jedes $M \in \operatorname{mod}^H(R)$

$$\tau^H(M) := \mathrm{D}^H\, \Omega_H^d\, \mathrm{Tr}^H(M(-\tilde{d})).$$

τ^H heißt *Auslander-Reiten-Translation*. Deren Bedeutung wird in Paragraph 11 deutlich werden.
Aus dem Lemma folgt: $\tau^H(M) \in \mathrm{CM}^H(R)$ für alle $M \in \operatorname{mod}^H(R)$.
Ferner überprüft man leicht, daß für jedes $M \in \operatorname{mod}^H(R)$ und jedes $g \in H$

$$\tau^H(M(g)) \simeq \tau^H(M)(g)$$

gilt. τ^H induziert einen Funktor

$$\tau^H : \underline{\mathrm{CM}}^H(R) \longrightarrow \overline{\mathrm{CM}}^H(R).$$

Hierbei bezeichnet $\underline{\mathrm{CM}}^H(R)$ die volle Unterkategorie von $\underline{\operatorname{mod}}^H(R)$, deren Objekte in $\mathrm{CM}^H(R)$ sind, und analog wird die Kategorie $\overline{\mathrm{CM}}^H(R)$ modulo $\mathrm{CM}^H(R)$-injektiver Objekte definiert.
Wie im ungraduierten Fall werden die Funktoren Ext_R^n erklärt. Für $A, C \in \operatorname{Mod}^H(R)$, $n > 0$ setzt man

$$\mathrm{EXT}_R^n(C, A) := \bigoplus_{h \in H} \mathrm{Ext}_R^n(C, A(h)).$$

Seien $h,\ g \in H,\ f \in \operatorname{Hom}_R(C, C(g))$ und

$$y : 0 \longrightarrow A(h) \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge in $\operatorname{mod}^H(R)$. Die Äquivalenzklasse von y in $\mathrm{EXT}_R^1(C, A)$ wird mit $[y]$ bezeichnet (dabei heißen zwei kurze exakte Folgen y und y' mit gleichen Endtermen äquivalent, wenn es einen Morphismus von y nach y' gibt, der die Identität auf den Endtermen induziert). Durch das pull-back-Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & A(h+g) \arrow[r] & B(g) \arrow[r] & C(g) \arrow[r] & 0 \\
yf : & 0 \arrow[r] & A(h+g) \arrow[r] \arrow[u, equal] & X \arrow[r] \arrow[u] & C \arrow[r] \arrow[u, "f"'] & 0
\end{tikzcd}$$

und $[y]f := [yf]$ wird $\mathrm{EXT}_R^1(C, A)$ zu einem H-graduierten $\mathrm{END}_R(C)^{op}$-Modul und durch $[y]\underline{f} := [yf]$ zu einem H-graduierten $\underline{\mathrm{END}}_R(C)^{op}$-Modul, denn faktorisiert f durch einen Projektiven, so zerfällt yf nach dem Homotopie-Lemma.
Sei jetzt $H = \mathbb{Z}$.
Ist y eine kurze exakte Folge in $\operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$, so wird die Vervollständigung von y mit $\widehat{y}$ bezeichnet.
Die in diesem Abschnitt eingeführten Begriffe können analog für die komplette Cohen-Macaulay $\widehat{K}$-Algebra $\widehat{R}$ definiert werden. Also z.B.

$$\mathrm{D}(M) := \operatorname{Hom}_{\widehat{K}}(M, \widehat{K})$$

für jedes $M \in \mathrm{mod}(\widehat{R})$, und die Funktoren Tr und Ω^n werden analog zu Tr^H und Ω_H^n definiert, und man setzt $\tau := \mathrm{D}\,\Omega^d\,\mathrm{Tr}$.
Im nächsten Abschnitt wird untersucht, wie sich die in diesem Paragraphen eingeführten Begriffe unter Komplettierung verhalten.

§9 Isomorphiesätze

In diesem Paragraphen sei $H = \mathbb{Z}$.
Seien M, $N \in \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$ und $f = \sum f_n T^n \in (\mathrm{HOM}_R(M,N))\widehat{\ }$. Mit $\underline{f}$ werde die Abbildung $\sum \underline{f_n} T^n \in (\underline{\mathrm{HOM}}_R(M,N))\widehat{\ }$ bezeichnet.

(9.1) Lemma: *Sei* $C \in \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$. *Durch*

$$\underline{\phi}_C(\underline{f}) := \underline{\phi_C(f)} \quad (f \in \widehat{\mathrm{END}_R(C)})$$

wird ein Isomorphismus

$$\underline{\phi}_C : \widehat{\underline{\mathrm{END}}_R(C)} \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\mathrm{End}}_{\widehat{R}}(\widehat{C})$$

von k-Algebren definiert.

Beweis: Sei $P \longrightarrow C \longrightarrow 0$ eine graduierte projektive Hülle. Dann hat man die exakte Sequenz

$$\mathrm{HOM}_R(C,P) \longrightarrow \mathrm{HOM}_R(C,C) \longrightarrow \underline{\mathrm{HOM}}_R(C,C) \longrightarrow 0$$

und ebenso

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{C},\widehat{P}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{C},\widehat{C}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{R}}(\widehat{C},\widehat{C}) \longrightarrow 0.$$

Mit (5.12) erhält man das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathrm{HOM}_R(C,P)} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{C,P}"', "\sim"] & \widehat{\mathrm{HOM}_R(C,C)} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_C"', "\sim"] & \widehat{\underline{\mathrm{HOM}}_R(C,C)} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\phi}_C"] & 0 \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{C},\widehat{P}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{C},\widehat{C}) \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{R}}(\widehat{C},\widehat{C}) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Mit dem Fünfer-Lemma und mit (5.13) folgt die Behauptung. □

Den analog konstruierten Isomorphismus

$$\widehat{\underline{\mathrm{END}}_R(C)}^{op} \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\mathrm{End}}_{\widehat{R}}(\widehat{C})^{op}$$

werde ich ebenfalls mit $\underline{\phi}_C$ bezeichnen.

(9.2) Lemma: *Seien A, $C \in \operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$. Dann gilt*

$$\mathrm{EXT}^1_R(C,A) \in \operatorname{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\gg}(k),$$

und es gibt eine in A und C natürliche Isomorphie

$$\phi^1_{C,A} : \widehat{\mathrm{EXT}^1_R(C,A)} \xrightarrow{\ \sim\ } \operatorname{Ext}^1_{\widehat{R}}(\widehat{C},\widehat{A})$$

mit

$$\phi^1_{C,A}([y]\underline{f}) = [\widehat{y}]\underline{\phi_C(f)}$$

für alle exakten Folgen der Form

$$y : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

und alle $f \in \mathrm{END}_R(C)$.

Beweis: Sei

$$\varepsilon : 0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

exakt mit endlich erzeugtem graduiert projektiven P. Der Epimorphismus $\sum f_n T^n \mapsto \sum f_n[\varepsilon]T^n$

$$\mathrm{HOM}_R(K,A) \longrightarrow \mathrm{EXT}^1_R(C,A) \longrightarrow 0$$

zeigt $\mathrm{EXT}^1_R(C,A) \in \operatorname{Mod}^{\mathbb{Z}}_{\gg}(k)$. Mit dem Fünfer-Lemma erhält man aus dem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widehat{\mathrm{HOM}_R(C,A)} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{C,A}"', "\sim"] & \widehat{\mathrm{HOM}_R(P,A)} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"', "\phi_{P,A}"] & \widehat{\mathrm{HOM}_R(K,A)} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"', "\phi_{K,A}"] & \widehat{\mathrm{EXT}^1_R(C,A)} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{C},\widehat{A}) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{P},\widehat{A}) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\widehat{R}}(\widehat{K},\widehat{A}) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1_{\widehat{R}}(\widehat{C},\widehat{A}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

den natürlichen Isomorphismus $\phi^1_{C,A}$ (der außerdem unabhängig ist von der Auswahl von ε, vgl. etwa [14, III.5.2]).
Sei $n \in \mathbb{Z}$ und

$$y : 0 \longrightarrow A(n) \xrightarrow{f_1} B \xrightarrow{f_2} C \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Folge in $\operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$. Es gibt ein $g \in \operatorname{Hom}_R(K, A(n))$ mit $y = g\varepsilon$. $\phi^1_{C,A}$ ergänzt obiges Diagramm kommutativ, also ist $\phi^1_{C,A}([y]) = \phi_{K,A}(g)[\widehat{\varepsilon}]$. Sei $h : \widehat{A(n)} \longrightarrow \widehat{A}$ der kanonische Isomorphismus. Dann ist $h\widehat{y}$ die exakte Sequenz

$$h\widehat{y} : 0 \longrightarrow \widehat{A} \xrightarrow{\hat{f}_1 h^{-1}} \widehat{B} \xrightarrow{\hat{f}_2} \widehat{C} \longrightarrow 0.$$

Andererseits gilt $\widehat{y} = \hat{g}\widehat{\varepsilon}$ und $h\hat{g} = \phi_{K,A}(g)$, also folgt

$$\phi^1_{C,A}([y]) = [h\widehat{y}].$$

Sei nun $n = 0$. Dann folgt insbesondere $\phi^1_{C,A}([y]) = [\widehat{y}]$.
Sei $m \in \mathbb{Z}$ und $f \in \mathrm{Hom}_R(C, C(m))$. Für jedes $M \in \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$ sei $h_M : \widehat{M(m)} \longrightarrow \widehat{M}$ der kanonische Isomorphismus. Es wird jetzt $[h_A\widehat{yf}] = [\widehat{y}\phi_C(f)]$ gezeigt. Man hat ein pull-back-Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 0 \arrow[r] & A(m) \arrow[r] & B(m) \arrow[r] & C(m) \arrow[r] & 0 \\
yf : 0 \arrow[r] & A(m) \arrow[r, "g_1"] \arrow[u, equal] & X \arrow[r, "g_2"] \arrow[u, "z"'] & C \arrow[r] \arrow[u, "f"'] & 0.
\end{tikzcd}$$

Dann erhält man

$$h_A\widehat{yf} : 0 \longrightarrow \widehat{A} \xrightarrow{\hat{g}_1 h_A^{-1}} \widehat{X} \xrightarrow{\hat{g}_2} \widehat{C} \longrightarrow 0.$$

Andererseits hat man das exakte kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\widehat{y} : 0 \arrow[r] & \widehat{A} \arrow[r, "\hat{f}_1"] & \widehat{B} \arrow[r, "\hat{f}_2"] & \widehat{C} \arrow[r] & 0 \\
\widehat{y}h_C : 0 \arrow[r] & \widehat{A} \arrow[r, "\hat{f}_1"] \arrow[u, equal] & \widehat{B} \arrow[r, "h_C^{-1}\hat{f}_2"] \arrow[u, equal] & \widehat{C(m)} \arrow[r] \arrow[u, "h_C"'] & 0 \\
\widehat{y}\phi_C(f) : 0 \arrow[r] & \widehat{A} \arrow[r, "\hat{g}_1 h_A^{-1}"'] \arrow[u, equal] & \widehat{X} \arrow[r, "\hat{g}_2"'] \arrow[u, "h_B\hat{z}"'] & \widehat{C} \arrow[r] \arrow[u, "\hat{f}"'] & 0,
\end{tikzcd}$$

und es folgt $[\widehat{y}\phi_C(f)] = [h_A\widehat{yf}]$ wegen $\phi_C(f) = h_C\hat{f}$. Damit gilt

$$\phi^1_{C,A}([y]\underline{f}) = \phi^1_{C,A}([yf]) = [h_A\widehat{yf}] = [\widehat{y}]\underline{\phi_C(f)},$$

und die Aussage folgt dann auch für beliebige $f \in \mathrm{END}_R(C)$. $\square$

(9.3) Lemma: *Sei* $M \in \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$ *und*

$$P \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

eine graduierte projektive Hülle. Dann ist

$$\widehat{P} \xrightarrow{\hat{f}} \widehat{M} \longrightarrow 0$$

eine projektive Hülle.

Beweis: Sei $J := \mathrm{rad}^{\mathbb{Z}} R$. Nach Konstruktion der projektiven Hülle in (2.6) gilt $\mathrm{Ker}\, f \subset JP$. Dann ist mit (5.10) $\mathrm{Ker}\, \hat{f} \subset \widehat{JP}$. Nach (5.8) gilt $\widehat{JP} \subset \widehat{J}\widehat{P}$, und wegen $\widehat{J} = \mathrm{rad}\, \widehat{R}$ nach (6.9) folgt $\mathrm{Ker}\, \hat{f} \ll \widehat{P}$, also die Behauptung. $\square$

Insbesondere bleiben minimale projektive Auflösungen bei Vervollständigung erhalten. Es ist dann nicht schwierig, die folgende Aussage einzusehen.

(9.4) Lemma: *Sei $C \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$. Dann gibt es eine natürliche Isomorphie*

$$\widehat{\tau^{\mathbb{Z}} C} \simeq \tau \widehat{C}.$$

□

Das folgende Diagramm veranschaulicht die Aussage des Lemmas.

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{CM}}^{\mathbb{Z}}(R) \arrow[r, "\tau^{\mathbb{Z}}"] \arrow[d, "\widehat{\cdot}"'] & \overline{\mathrm{CM}}^{\mathbb{Z}}(R) \arrow[d, "\widehat{\cdot}"] \\ \underline{\mathrm{CM}}(\widehat{R}) \arrow[r, "\tau"] & \overline{\mathrm{CM}}(\widehat{R}); \end{tikzcd}$$

die vertikalen Pfeile sind hier die vom Komplettierungsfunktor $\widehat{\cdot} : \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R) \longrightarrow \mathrm{CM}(\widehat{R})$ induzierten Funktoren.

§10 Auslander-Reiten-Folgen und fast-aufspaltende Morphismen

Es sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $\mathcal{C}$ eine volle Unterkategorie von $\mathcal{A}$, welche eine Krull-Schmidt-Kategorie ist. Zusätzlich wird angenommen, daß $\mathcal{C}$ klein und gegen Erweiterungen abgeschlossen ist. Es gilt: In $\mathcal{C}$ spalten Idempotente auf (vgl. [17, 3.3]), also ist $\mathcal{C}$ abgeschlossen gegen direkte Summanden in $\mathcal{A}$. Beispiel: $\mathcal{A} = \mathrm{mod}^H(R)$, $\mathcal{C} = \mathrm{CM}^H(R)$.

(10.1) Fast-aufspaltende Morphismen. Sei $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$.
(1) f heißt *rechts-fast-aufspaltend*, wenn f kein aufspaltender Epimorphismus ist und jeder Morphismus in $\mathcal{C}$, der kein aufspaltender Epimorphismus ist und in B endet, notwendig durch f faktorisiert.
(2) Dual heißt f *links-fast-aufspaltend*, wenn f kein aufspaltender Monomorphismus ist und jeder Morphismus in $\mathcal{C}$, der kein aufspaltender Monomorphismus ist und in A startet, sich notwendig über f liften läßt. □

(10.2) Lemma: (1) *Sei $g : B \longrightarrow C$ ein rechts-fast-aufspaltender Morphismus in $\mathcal{C}$. Dann ist C unzerlegbar.*
(2) *Sei $f : A \longrightarrow B$ ein links-fast-aufspaltender Morphismus in $\mathcal{C}$. Dann ist A unzerlegbar.*

Beweis: (1) Ein $h : C \longrightarrow C$ ist genau dann in $\mathrm{Im}(C,g)$, wenn h kein aufspaltender Epimorphismus ist. Deshalb ist $\mathrm{Im}(C,g)$ das einzige maximale Rechtsideal in $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(C)$.
(2) folgt dual. $\square$

Eine Folge von Morphismen in $\mathcal{C}$ heißt *exakt*, falls sie in $\mathcal{A}$ exakt ist. Die abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ induziert also eine *exakte Struktur* auf $\mathcal{C}$, vgl. [17, 9.1].

(10.3) Auslander-Reiten-Folgen. Sei

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge in $\mathcal{C}$. Sie heißt *Auslander-Reiten-Folge*, falls A unzerlegbar und g ein rechts-fast-aufspaltender Morphismus ist.
Dies ist genau dann der Fall, wenn C unzerlegbar und f ein links-fast-aufspaltender Morphismus ist. $\square$

Projektive und *injektive* Objekte in $\mathcal{C}$ werden mittels aufspaltender exakter Sequenzen wie in Paragraph 8 erklärt.

(10.4) Definition: $\mathcal{C}$ *hat Auslander-Reiten-Folgen*, wenn es zu jedem unzerlegbaren $C \in \mathcal{C}$, welches nicht projektiv in $\mathcal{C}$ ist, eine Auslander-Reiten-Folge gibt, die in C endet, und wenn es zu jedem unzerlegbaren $A \in \mathcal{C}$, welches nicht injektiv in $\mathcal{C}$ ist, eine Auslander-Reiten-Folge gibt, die in A startet. $\square$

(10.5) Minimale Morphismen. Sei $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$.
(1) f heißt *rechts-minimal*, falls jeder Endomorphismus $g : A \longrightarrow A$ ein Isomorphismus ist, wenn $fg = f$ gilt.
(2) Dual heißt f *links-minimal*, falls jeder Endomorphismus $g : B \longrightarrow B$ ein Isomorphismus ist, wenn $gf = f$ gilt.
(3) f heißt *minimal rechts-fast-aufspaltend*, falls f rechts-minimal und rechts-fast-aufspaltend ist. f heißt *minimal links-fast-aufspaltend*, falls f links-minimal und links-fast-aufspaltend ist. $\square$

Ist

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

eine Auslander-Reiten-Folge, so ist f links-minimal und g rechts-minimal, wie man leicht zeigt.

(10.6) Lemma: *Sei $g : B \longrightarrow C$ ein rechts-fast-aufspaltender Morphismus in $\mathcal{C}$. Dann sind äquivalent:*

(1) *g ist rechts-minimal.*

(2) *Für jeden aufspaltenden Monomorphismus $i : B' \longrightarrow B$ in $\mathcal{C}$ gilt: Ist gi ein rechts-fast-aufspaltender Morphismus, so ist i ein Isomorphismus.*

Insbesondere gibt es einen aufspaltenden Monomorphismus $i : B' \longrightarrow B$ in $\mathcal{C}$, so daß gi ein minimal rechts-fast-aufspaltender Morphismus ist.

Beweis: (1)⇒(2) ist klar. (2)⇒(1): Aus (2) folgt: Man hat einen Epimorphismus

$$(-,B) \xrightarrow{(-,g)} \mathrm{rad}(-,C) \longrightarrow 0,$$

wobei $(-,-) = \mathcal{C}(-,-)$, und für jeden echten direkten Summanden B' von B ist $(-,g)$ eingeschränkt auf $(-,B')$ kein Epimorphismus. Weil $\mathcal{C}$ eine Krull-Schmidt-Kategorie ist, hat jedes endlich präsentierte Objekt in $\mathrm{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ eine minimale projektive Präsentation, und jedes endlich erzeugte projektive Objekt in $\mathrm{Mod}(\mathcal{C}^{op})$ ist von der Form $(-,A)$ mit einem $A \in \mathcal{C}$. Es gibt also eine projektive Hülle

$$(-,A) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{rad}(-,C) \longrightarrow 0,$$

d.h. jeder Endomorphismus $\beta : (-,A) \longrightarrow (-,A)$ ist ein Isomorphismus, falls $\alpha\beta = \alpha$ (vgl. Auslander [2, §4]). Dann ist auch $(-,g)$ eine projektive Hülle von $\mathrm{rad}(-,C)$. Sei nun $h : B \longrightarrow B$ ein Endomorphismus mit $gh = g$. Dann gilt $(-,g)(-,h) = (-,g)$. Es folgt: $(-,h)$ ist ein Isomorphismus, und damit auch h. Der Zusatz ist klar. □

(10.7) Irreduzible Morphismen. Seien $A, B \in \mathcal{C}$ unzerlegbar und $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus. f heißt *irreduzibel*, falls f kein Isomorphismus ist, und aus $f = hg$ in $\mathcal{C}$ notwendig folgt, daß g ein aufspaltender Monomorphismus oder h ein aufspaltender Epimorphismus ist. □

Irreduzible Morphismen sind gerade die 'unzerlegbaren direkten Summanden' von minimal fast-aufspaltenden Morphismen:

(10.8) Lemma: *Sei $C \in \mathcal{C}$ unzerlegbar, und es existiere ein minimal rechts-fast-aufspaltender Morphismus $E \longrightarrow C$ in $\mathcal{C}$. Sei $g : B \longrightarrow C$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$ mit unzerlegbarem B. g ist irreduzibel genau dann, wenn es einen Morphismus $g' : B' \longrightarrow C$ in $\mathcal{C}$ gibt, so daß $(g,g') : B \oplus B' \longrightarrow C$ minimal rechts-fast-aufspaltend ist.* □

Natürlich gilt auch die duale Aussage mit minimal links-fast-aufspaltenden Morphismen. Einen Beweis findet man in Auslander-Reiten [6, 2.4].

§11 Existenz von Auslander-Reiten-Folgen

Im nächsten Satz wird für jedes nichtmaximale Primideal $\mathfrak{p}$ in K mit $\mathrm{CM}(R_{\mathfrak{p}})$ die volle Unterkategorie von $\mathrm{mod}(R_{\mathfrak{p}})$ bezeichnet, die aus den über $K_{\mathfrak{p}}$ projektiven Moduln besteht.

(11.1) Satz [Auslander-Reiten [10, Theorem 1.6]]: (1) *Sei C unzerlegbar und nicht projektiv in* $\mathrm{CM}^H(R)$. *Dann gibt es eine Auslander-Reiten-Folge*

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

in $\mathrm{CM}^H(R)$, *genau wenn $C_{\mathfrak{p}}$ ein projektiver $R_{\mathfrak{p}}$-Modul ist für jedes nichtmaximale Primideal $\mathfrak{p}$ in K.*
(2) *Sei A unzerlegbar und ein nichtinjektives Objekt in* $\mathrm{CM}^H(R)$. *Dann gibt es eine Auslander-Reiten-Folge $(*)$ in* $\mathrm{CM}^H(R)$, *genau wenn $A_{\mathfrak{p}}$ ein injektives Objekt in* $\mathrm{CM}(R_{\mathfrak{p}})$ *ist für jedes nichtmaximale Primideal $\mathfrak{p}$ in K.*
(3) *Sei $(*)$ eine Auslander-Reiten-Folge in* $\mathrm{CM}^H(R)$. *Dann gilt $A \simeq \tau^H C$.* □

Die Kategorien, die im nächsten Satz vorkommen, werden wie in Paragraph 7 definiert.

(11.2) Satz [Auslander-Reiten [7, 2.1+2.2]]: *Sei K' ein kommutativer, noetherscher, regulär lokaler Ring, der bezüglich seines maximalen Ideals komplett ist. Sei R' eine K'-Algebra, die endlich erzeugter freier K'-Modul ist.*
(1) *Sei C unzerlegbar und nicht projektiv in* $\mathrm{CM}(R')$. *Dann gibt es eine Auslander-Reiten-Folge*

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

in $\mathrm{CM}(R')$, *genau wenn $C_{\mathfrak{p}}$ ein projektiver $R'_{\mathfrak{p}}$-Modul ist für jedes nichtmaximale Primideal $\mathfrak{p}$ in K'.*
(2) *Sei A unzerlegbar und ein nichtinjektives Objekt in* $\mathrm{CM}(R')$. *Dann gibt es eine Auslander-Reiten-Folge $(*)$ in* $\mathrm{CM}(R')$, *genau wenn $A_{\mathfrak{p}}$ ein injektives Objekt in* $\mathrm{CM}(R'_{\mathfrak{p}})$ *ist für jedes nichtmaximale Primideal $\mathfrak{p}$ in K'.*
(3) *Sei $(*)$ eine Auslander-Reiten-Folge in* $\mathrm{CM}(R')$. *Dann gilt $A \simeq \tau C$.* □

Im Falle $H = \mathbb{Z}$ läßt sich dieser Satz auf $\widehat{K}$ und $\widehat{R}$ anwenden.

§12 Vervollständigung von Auslander-Reiten-Folgen

In diesem Abschnitt sei $H = \mathbb{Z}$.

(12.1) Lemma: *Sei $C \in \operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$. Dann sind äquivalent:*
(1) *$C_{\mathfrak{p}}$ ist projektiver $R_{\mathfrak{p}}$-Modul für jedes nichtmaximale Primideal $\mathfrak{p} \subset K$.*
(2) *$C_{(\mathfrak{p})}$ ist graduiert projektiver $R_{(\mathfrak{p})}$-Modul für jedes nichtmaximale homogene Primideal $\mathfrak{p} \subset K$.*
(3) *$\underline{\mathrm{END}}_R(C)$ hat endliche Länge (äquivalent: endliche graduierte Länge) über K.*
(4) $\dim_k \underline{\mathrm{END}}_R(C) < \infty$.
(5) $\dim_k \mathrm{EXT}^1_R(C, A) < \infty$ *für alle $A \in \operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$.*

Beweis: Seien M, $N \in \operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$ und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in K. Dann hat man einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{HOM}_R(M, N)_{\mathfrak{p}} \simeq \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}}).$$

Aus der Exaktheit der Lokalisierung erhält man dann leicht die natürlichen Isomorphismen

$$\mathrm{EXT}^1_R(M, N)_{\mathfrak{p}} \simeq \mathrm{Ext}^1_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}}),\ \underline{\mathrm{HOM}}_R(M, N)_{\mathfrak{p}} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}}).$$

Eine analoge Aussage gilt für homogene $\mathfrak{p}$ und die homogene Lokalisierung.
(1)⇔(3): (1) ist äquivalent zu: $\underline{\mathrm{END}}_R(C)_{\mathfrak{p}} = 0$ für jedes nichtmaximale Primideal $\mathfrak{p}$ in K. Dies ist äquivalent dazu, daß $\underline{\mathrm{END}}_R(C)$ endliche Länge über K hat, nach einer bekannten Aussage in der kommutativen Algebra[7]. $\underline{\mathrm{END}}_R(C)$ hat dann erst recht endliche graduierte Länge über K. Aus dem Beweis von (4)⇔(3) wird folgen, daß dies sogar äquivalent zur endlichen Länge ist.
(2)⇔(3): Graduierte Version von (1)⇔(3).
(3)⇒(4): Hat $\underline{\mathrm{END}}_R(C)$ endliche graduierte Länge über K, so gibt es eine Kompositionsreihe von $\underline{\mathrm{END}}_R(C)$, deren Faktoren dann sogar einfach über $k = K_0$ sind, nach (6.4).
(4)⇒(3): Gilt (4), so hat $\underline{\mathrm{END}}_R(C)$ endliche Länge über K.
(1)⇒(5): Folgt wie (1)⇒(3)⇒(4).
(5)⇒(4): Sei

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow P \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$$

exakt mit projektivem $P \in \operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$. Dies induziert die exakte Sequenz

$$\mathrm{HOM}_R(C, P) \longrightarrow \mathrm{HOM}_R(C, C) \xrightarrow{\delta} \mathrm{EXT}^1_R(C, L).$$

Dann gilt $\operatorname{Ker}\delta = \operatorname{Im}\mathrm{HOM}(C, \pi) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{P}(C, C(n))$, also $\operatorname{Im}\delta \simeq \underline{\mathrm{END}}_R(C)$, und (4) folgt. □

(12.2) Korollar: *Sei $C \in \operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$, so daß $C_{\mathfrak{p}}$ projektiver $R_{\mathfrak{p}}$-Modul für jedes nichtmaximale Primideal $\mathfrak{p} \subset K$ ist. Dann ist $\widehat{C}_{\mathfrak{p}}$ projektiver $\widehat{R}_{\mathfrak{p}}$-Modul für jedes nichtmaximale Primideal $\mathfrak{p} \subset \widehat{K}$.*

[7] Vgl. Bourbaki [13, Ch. IV, §2.5, Prop. 7].

Beweis: Aus der Voraussetzung folgt mit dem Lemma $\dim_k \underline{\mathrm{END}}_R(C) < \infty$. Aus (9.1) folgt dann $\dim_k \underline{\mathrm{End}}_{\widehat{R}}(\widehat{C}) < \infty$, und aus der ungraduierten Version von (12.1), (4)⇒(1), folgt die Behauptung. □

(12.3) Korollar: *Sei $C \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$ unzerlegbar und nicht projektiv. Gibt es eine Auslander-Reiten-Folge in $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$, die in C endet, dann gibt es eine Auslander-Reiten-Folge in $\mathrm{CM}(\widehat{R})$, die in $\widehat{C}$ endet.* □

(12.4) Satz: *Der Komplettierungsfunktor*

$$\widehat{\cdot} : \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R) \longrightarrow \mathrm{CM}(\widehat{R})$$

bewahrt Auslander-Reiten-Folgen.

Beweis: Seien $\tilde{d} := \mathrm{grad}\, X_1 + \cdots + \mathrm{grad}\, X_d$, $\tau^{\mathbb{Z}}(C) = \mathrm{D}^{\mathbb{Z}}\, \Omega^d_{\mathbb{Z}}\, \mathrm{Tr}^{\mathbb{Z}}(C(-\tilde{d}))$ und

$$\eta : 0 \longrightarrow \tau^{\mathbb{Z}}C \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

eine Auslander-Reiten-Folge in $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$. Sei $n \in \mathbb{Z}$ und

$$y : 0 \longrightarrow \tau^{\mathbb{Z}}(C)(n) \longrightarrow D \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

eine nichtaufspaltende exakte Sequenz. Dann gibt es ein $f \in \mathrm{Hom}_R(C, C(-n))$ mit dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \tau^{\mathbb{Z}}(C) \arrow[r] & D(-n) \arrow[r] & C(-n) \arrow[r] & 0 \\ \eta : 0 \arrow[r] & \tau^{\mathbb{Z}}(C) \arrow[r] \arrow[u, equal] & B \arrow[r] \arrow[u] & C \arrow[r] \arrow[u, "f"'] & 0. \end{tikzcd}$$

Also gilt $[\eta] = [y]\underline{f}$. Es folgt: Der $\mathbb{Z}$-graduierte $\underline{\mathrm{END}}_R(C)^{op}$-Modul

$$S := [\eta] \cdot \underline{\mathrm{END}}_R(C)$$

ist graduiert einfach, also konzentriert in der 0-ten Komponente nach (6.4) (denn $\underline{\mathrm{END}}_R(C)^{op}$ ist graduiert lokal, da C unzerlegbar und nicht projektiv ist). Die Vervollständigung

$$\widehat{\eta} : 0 \longrightarrow \widehat{\tau^{\mathbb{Z}}C} \longrightarrow \widehat{B} \longrightarrow \widehat{C} \longrightarrow 0$$

von η ist exakt und nichtaufspaltend in $\mathrm{CM}(\widehat{R})$. Es gibt in $\mathrm{CM}(\widehat{R})$ nach (9.4) und (12.3) eine Auslander-Reiten-Folge

$$\mu : 0 \longrightarrow \widehat{\tau^{\mathbb{Z}}C} \longrightarrow E \longrightarrow \widehat{C} \longrightarrow 0.$$

Zur Abkürzung sei $\phi^1 := \phi^1_{C,\tau^{\mathbb{Z}}C}$. Sei $x \in \mathrm{EXT}^1_R(C, \tau^{\mathbb{Z}}(C))$ mit $\phi^1(x) = [\mu]$. Es gibt ein $u \in \mathrm{END}_R(C)$ mit $[\mu] = [\hat{\eta}]\underline{\phi}_C(\underline{u})$. Es folgt

$$\phi^1(x) = \phi^1([\eta]\underline{u}),$$

also $x = [\eta]\underline{u}$. Mithin ist $x \in S$, also x homogen vom Grad 0, und wegen $x \neq 0$ gibt es ein homogenes $f \in \mathrm{END}_R(C)$ mit $[\eta] = x\underline{f}$. Es folgt

$$[\hat{\eta}] = \phi^1([\eta]) = [\mu]\underline{\phi}_C(\underline{f}) = [\mu\phi_C(f)].$$

$\phi_C(f)$ ist ein Isomorphismus (sonst folgt, da μ Auslander-Reiten-Folge ist, mit dem Homotopie-Lemma $[\hat{\eta}] = 0$, also ein Widerspruch). Somit sind die Folgen μ und $\hat{\eta}$ isomorph, und $\hat{\eta}$ ist Auslander-Reiten-Folge. $\square$

§13 Graduierbare Moduln

In diesem Abschnitt ist $H = \mathbb{Z}$, wenn nichts anderes gesagt wird. Im vorherigen Abschnitt wurde bewiesen, daß minimal rechts-fast-aufspaltende Morphismen, die in einem nicht-projektiven graduierten Modul enden, bei Vervollständigung erhalten bleiben. In diesem Paragraphen wird das analoge Resultat für minimal rechts-fast-aufspaltende Morphismen bewiesen, die in einem projektiven graduierten Modul enden. Gleichzeitig wird die Existenz solcher Morphismen in $\mathrm{CM}^H(R)$ (H abelsch) und $\mathrm{CM}(\hat{R})$ gezeigt.
Sei $M \in \mathrm{mod}(\hat{R})$. M heißt *graduierbar*, falls es einen graduierten Modul $N \in \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$ gibt mit $\widehat{N} \simeq M$.
Weil $\mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$ und $\mathrm{mod}(\hat{R})$ Krull-Schmidt-Kategorien sind und der Komplettierungsfunktor Unzerlegbarkeit bewahrt, gilt:

(13.1) Lemma: *Sei $M \in \mathrm{mod}(\hat{R})$ graduierbar und $N \in \mathrm{mod}(\hat{R})$ ein direkter Summand von M. Dann ist auch N graduierbar.* $\square$

(13.2) Lemma: *Alle endlich erzeugten projektiven $\hat{R}$-Moduln sind graduierbar. Ist $P \in \mathrm{mod}(\hat{R})$ projektiv und $Q \in \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$ mit $\hat{Q} \simeq P$, so ist Q graduiert projektiv.*

Beweis: Die erste Aussage folgt aus (13.1), weil $\hat{R}$ graduierbar ist. Sei $P \in \mathrm{mod}(\hat{R})$ projektiv, $P \simeq \hat{Q}$. Sei $Q = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_n$ Zerlegung von Q in seine unzerlegbaren Bestandteile. Jedes $\widehat{Q_i}$ ist projektiv, also auch jedes Q_i ($i = 1, \ldots, n$) nach (6.3). $\square$

(13.3) Korollar: *Seien $M \in \mathrm{CM}(\hat{R})$ und $C \in \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$ mit $\hat{C} \simeq M$. Dann gilt $C \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$.*

Beweis: Es ist $M \in \operatorname{pro}(\widehat{K})$, $C \in \operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}(K)$. Da es gleichwertig ist, ob man C als graduierten R-Modul oder als graduierten K-Modul vervollständigt, folgt die Aussage aus (13.2) mit K statt R. $\square$

(13.4) Lemma: *Sei $M \in \mathrm{CM}(\widehat{R})$ graduierbar. Dann ist auch $\mathrm{D}\,M$ graduierbar.*

Beweis: Sei $M \simeq \widehat{C}$ mit $C \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$. Dann gilt $\mathrm{D}\,M \simeq \widehat{\mathrm{D}^{\mathbb{Z}}\,C}$. $\square$

Für jedes $M \in \operatorname{Mod}^H(R)$ sei $\operatorname{rad}^H M$ der Durchschnitt aller maximalen homogenen Untermoduln von M.

(13.5) Lemma: *Sei $P \in \operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$ projektiv und unzerlegbar. Dann gilt*

$$\widehat{\operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} P} \simeq \operatorname{rad} \widehat{P}.$$

Beweis: Sei $J := \operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} R$. Aus dem Beweis von (2.6) folgt, daß $P \simeq Re(n)$ gilt mit einem $n \in \mathbb{Z}$ und einem $e \in R_0$, und P/JP ist einfach graduiert. Es ist dann $JP = \operatorname{rad}^{\mathbb{Z}} P$, $\widehat{J}\widehat{P} = \operatorname{rad} \widehat{P}$ und

$$\widehat{JP} \simeq \widehat{Je(n)} \simeq \widehat{Je} = \widehat{J}e = \widehat{J}\widehat{R}e = \widehat{J}\widehat{Re} \simeq \widehat{J}\widehat{P}.$$

$\square$

Sei $\mathcal{I}(R)$ die volle Unterkategorie von $\operatorname{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$, die aus den I besteht, für welche es eine endliche Auflösung der Form

$$0 \longrightarrow I_n \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_0 \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

gibt, wobei die I_j injektive Objekte in $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$ sind ($j = 0, \dots, n$) (dies ist nicht mit einer injektiven Auflösung zu verwechseln! Die Definition ist natürlich für beliebige abelsche Gruppen H sinnvoll.). Analog wird $\mathcal{I}(\widehat{R})$ mit $\mathrm{CM}(\widehat{R})$-injektiven Objekten erklärt.

(13.6) Lemma: (1) *Ist I injektives Objekt in $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$, so ist $\widehat{I}$ injektives Objekt in $\mathrm{CM}(\widehat{R})$.*
(2) $I \in \mathcal{I}(R) \implies \widehat{I} \in \mathcal{I}(\widehat{R})$.
(3) $I \in \mathcal{I}(\widehat{R}) \implies \operatorname{Ext}^1_{\widehat{R}}(-, I)|\,\mathrm{CM}(\widehat{R}) = 0$.

Beweis: (1) Sei I ein injektives Objekt in $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$. Dann ist $\mathrm{D}^{\mathbb{Z}} I$ projektiv, also auch $\mathrm{D}\,\widehat{I}$. Damit ist $\widehat{I}$ injektives Objekt in $\mathrm{CM}(\widehat{R})$.
(2) folgt aus (1) und der Exaktheit der Vervollständigung.
(3) Sei

$$0 \longrightarrow I_n \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_0 \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

eine Auflösung von $I \in \mathcal{I}(\widehat{R})$. Ist $n = 0$, so ist I selbst $\mathrm{CM}(\widehat{R})$-injektiv, und die Aussage (3) geht klar. Ist $n > 0$, so zerlegt man die Auflösung in zwei kürzere exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow I_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_1 \longrightarrow Y \longrightarrow 0, \qquad 0 \longrightarrow Y \longrightarrow I_0 \longrightarrow I \longrightarrow 0,$$

erhält $\mathrm{Ext}^1_{\widehat{R}}(-,Y)|\,\mathrm{CM}(\widehat{R}) = 0$, also auch $\mathrm{Ext}^2_{\widehat{R}}(-,Y)|\,\mathrm{CM}(\widehat{R}) = 0$, und die Aussage folgt für I durch Betrachtung der langen Hom-Ext-Sequenz. $\square$

Der Beweis der folgenden Aussage orientiert sich an Auslander-Buchweitz [4].

(13.7) Lemma: *Sei H eine abelsche Gruppe und $M \in \mathrm{mod}^H(R)$.*
(1) *Es gibt eine exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow C \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

mit $I \in \mathcal{I}(R)$ und $C \in \mathrm{CM}^H(R)$.
(2) *Es gibt eine exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I' \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

mit $I' \in \mathcal{I}(R)$ und $C' \in \mathrm{CM}^H(R)$.

Beweis: Es gibt eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow C_t \longrightarrow C_{t-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

mit $C_i \in \mathrm{CM}^H(R)$ $(i = 0,\ldots,t)$ (vgl. (8.7)). Sei $t \geq 0$ minimal dabei gewählt. Es werden (1) und (2) parallel durch Induktion nach t bewiesen. $t = 0$: Dann ist $M \in \mathrm{CM}^H(R)$, und es folgt (1) mit $C = M$ und $I = 0$. Außerdem gibt es, da D^H eine Dualität ist, eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{D}^H C' \longrightarrow P' \longrightarrow \mathrm{D}^H M \longrightarrow 0$$

mit projektiven $P' \in \mathrm{mod}^H(R^{op})$ und $C' \in \mathrm{CM}^H(R)$, und Dualisieren liefert Aussage (2) mit $\mathrm{CM}^H(R)$-injektivem $I' = \mathrm{D}^H P'$.
$t > 0$: Aus obiger langen exakten Sequenz erhält man die kürzeren

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow C_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow C_t \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow L \longrightarrow 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt (2) mit L statt M: Es gibt eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow Q \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

mit $Q \in \mathcal{I}(R)$ und $B \in \mathrm{CM}^H(R)$. Daraus ergibt sich das push-out-Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & C_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & B \arrow[r, equal] \arrow[d] & B \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Wegen $C_0, B \in \mathrm{CM}^H(R)$ ist auch $X \in \mathrm{CM}^H(R)$. Es folgt Aussage (1). Der Fall $t = 0$ läßt sich auf X statt M anwenden. Dies ergibt eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

mit $\mathrm{CM}^H(R)$-injektivem Y und $A \in \mathrm{CM}^H(R)$. Dann gibt es das push-out-Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & Q \arrow[r, equal] \arrow[d] & Q \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

(vgl. etwa die duale Aussage aus [20, I.16.3]). Es folgt dann $U \in \mathcal{I}(R)$ wegen $Q \in \mathcal{I}(R)$, und weil Y $\mathrm{CM}^H(R)$-injektiv ist. Man erhält also eine exakte Sequenz wie in (2). □

(13.8) Korollar: *Sei $M \in \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}(R)$. Dann gibt es ein $C \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$ und einen Epimorphismus $f : C \longrightarrow M$, so daß die von $\hat{f}$ induzierte Sequenz*

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(-, \widehat{C})|\,\mathrm{CM}(\widehat{R}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(-, \widehat{M})|\,\mathrm{CM}(\widehat{R}) \longrightarrow 0$$

in $\mathrm{Mod}(\mathrm{CM}(\widehat{R})^{op})$ *exakt ist.*

Beweis: Nach (13.7)(1) gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow C \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

mit $I \in \mathcal{I}(R)$ und $C \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$. Vervollständigung und Übergang zur langen Hom-Ext-Sequenz liefert die Behauptung, weil nach (13.6) $\mathrm{Ext}^1_{\widehat{R}}(-,\widehat{I})|\,\mathrm{CM}(\widehat{R})$ der Nullfunktor ist. □

Sei $M \in \mathrm{mod}(\widehat{R})$, $C \in \mathrm{CM}(\widehat{R})$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(C,M)$. Das Paar (C,f) heißt eine *Cohen-Macaulay-Approximation* von M, falls für jedes andere Paar (C',f') mit $C' \in \mathrm{CM}(\widehat{R})$, $f' \in \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(C',M)$ ein $g \in \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(C',C)$ existiert mit $f' = fg$. Das Korollar liefert für ein graduierbares M eine Cohen-Macaulay-Approximation (C,f), wobei C graduierbar ist.
Sei nun $P \in \mathrm{CM}(\widehat{R})$ projektiv und unzerlegbar und $g : B \longrightarrow P$ ein rechts-fast-aufspaltender Morphismus in $\mathrm{CM}(\widehat{R})$. Dann ist g kein Epimorphismus, also gilt $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{rad}\, P$, da $\mathrm{rad}\, P$ der einzige maximale Untermodul von P ist. Bezeichnet i die Inklusion, so faktorisiert g durch i, es gibt also ein eindeutiges $g' \in \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(B, \mathrm{rad}\, P)$ mit $g = ig'$. Dann ist (B, g') eine Cohen-Macaulay-Approximation von $\mathrm{rad}\, P$. Umgekehrt liefert eine Cohen-Macaulay-Approximation von $\mathrm{rad}\, P$ einen rechts-fast-aufspaltenden Morphismus, der in P endet.

(13.9) Korollar: (1) *Sei P unzerlegbar und projektiv in $\mathrm{CM}(\widehat{R})$. Dann gibt es ein $E \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$ und einen minimal rechts-fast-aufspaltenden Morphismus $g : \widehat{E} \longrightarrow P$ in $\mathrm{CM}(\widehat{R})$.*
(2) *Sei I ein unzerlegbares und injektives Objekt in $\mathrm{CM}(\widehat{R})$. Dann gibt es ein $F \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$ und einen minimal links-fast-aufspaltenden Morphismus $f : I \longrightarrow \widehat{F}$ in $\mathrm{CM}(\widehat{R})$.*

Beweis: (1) Nach (13.5) ist $\mathrm{rad}\, P$ graduierbar. Mit der Vorbemerkung und (10.6) folgt (1).
(2) $\mathrm{D}\, I$ ist projektiv nach einer ungraduierten Version von (8.2). Mit (1) erhält man einen minimal rechts-fast-aufspaltenden Morphismus $g : \widehat{B} \longrightarrow \mathrm{D}\, I$ in $\mathrm{CM}(\widehat{R}^{op})$ ($B \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R^{op})$). Dann ist $\mathrm{D}\, g : I \longrightarrow \mathrm{D}\, \widehat{B}$ ein minimal links-fast-aufspaltender Morphismus in $\mathrm{CM}(\widehat{R})$, und $\mathrm{D}\, \widehat{B}$ ist graduierbar. □

Mit völlig analogen Mitteln läßt sich zeigen:

(13.10) Satz: *Sei H eine abelsche Gruppe.*
(1) *Sei P projektiv und unzerlegbar in $\mathrm{CM}^H(R)$. Dann gibt es einen minimal rechts-fast-aufspaltenden Morphismus $g : E \longrightarrow P$ in $\mathrm{CM}^H(R)$.*
(2) *Sei I unzerlegbar und $\mathrm{CM}^H(R)$-injektiv. Dann gibt es einen minimal links-fast-aufspaltenden Morphismus $f : I \longrightarrow F$ in $\mathrm{CM}^H(R)$.* □

Allgemeiner kann man sagen, daß $\mathrm{CM}^H(R)$ *contravariant-endlich* in $\mathrm{mod}^H(R)$ ist.

Dies bedeutet nach Definition, daß jeder graduierte Modul $M \in \mathrm{mod}^H(R)$ eine Cohen-Macaulay-Approximation besitzt. Die Aussage (1) im Satz ist dann der Spezialfall $M = \mathrm{rad}^H P$ ($P \in \mathrm{pro}^H(R)$ unzerlegbar). Ebenso folgt wegen (13.7)(2) die duale Aussage: $\mathrm{CM}^H(R)$ ist *covariant-endlich* in $\mathrm{mod}^H(R)$.

(13.11) Satz: (1) *Sei P projektiv und $g : E \longrightarrow P$ ein rechts-fast-aufspaltender Morphismus in $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$. Dann ist $\hat{g} : \widehat{E} \longrightarrow \widehat{P}$ ein rechts-fast-aufspaltender Morphismus in $\mathrm{CM}(\widehat{R})$.*
(2) *Sei I ein injektives Objekt in $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$ und $f : I \longrightarrow F$ ein links-fast-aufspaltender Morphismus in $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$. Dann ist $\hat{f} : \widehat{I} \longrightarrow \widehat{F}$ ein links-fast-aufspaltender Morphismus in $\mathrm{CM}(\widehat{R})$.*

B e w e i s: (1) Zerlege

$$g : E \xrightarrow{g'} \mathrm{rad}^{\mathbb{Z}} P \xrightarrow{i} P.$$

Sei

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow C \xrightarrow{f} \mathrm{rad}^{\mathbb{Z}} P \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz mit $I \in \mathcal{I}(R)$, $C \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$ wie in (13.7). Weil (E, g') eine Cohen-Macaulay-Approximation von $\mathrm{rad}^{\mathbb{Z}} P$ ist, gibt es ein $h \in \mathrm{Hom}_R(C, E)$ mit $g'h = f$. Weil $(\widehat{C}, \hat{f})$ eine Cohen-Macaulay-Approximation von $\mathrm{rad}\,\widehat{P}$ ist, ist $\hat{i}\hat{f} : \widehat{C} \longrightarrow \widehat{P}$ ein rechts-fast-aufspaltender Morphismus. Man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\widehat{E} \arrow[r, "\hat{g}"] & \widehat{P} \arrow[d, equal] \\
\widehat{C} \arrow[u, "\hat{h}"] \arrow[r, "\hat{i}\hat{f}"] & \widehat{P}.
\end{tikzcd}$$

Jeder Morphismus $X \longrightarrow \widehat{P}$, der durch $\hat{i}\hat{f}$ faktorisiert, faktorisiert auch durch $\hat{g}$. Weil $\hat{g}$ außerdem nicht surjektiv ist, ist $\hat{g}$ ein rechts-fast-aufspaltender Morphismus.
(2) per Dualität. □

(13.12) Satz: (1) *Sei $g : B \longrightarrow C$ ein rechts-minimaler Morphismus in $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$ mit C unzerlegbar. Dann ist $\hat{g} : \widehat{B} \longrightarrow \widehat{C}$ ein rechts-minimaler Morphismus in $\mathrm{CM}(\widehat{R})$.*
(2) *Sei $f : A \longrightarrow B$ ein links-minimaler Morphismus in $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$ mit A unzerlegbar. Dann ist $\hat{f} : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ ein links-minimaler Morphismus in $\mathrm{CM}(\widehat{R})$.*

B e w e i s: Es genügt (1) zu zeigen. Sei

$$S := \begin{pmatrix} R & 0 \\ R & R \end{pmatrix}.$$

S ist eine endliche $\mathbb{Z}$-graduierte K-Algebra mit n-ter Komponente

$$S_n = \begin{pmatrix} R_n & 0 \\ R_n & R_n \end{pmatrix}$$

$(n \in \mathbb{Z})$. Sei $X := B \oplus C$. X wird durch

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ z & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} xb \\ zg(b) + yc \end{pmatrix}$$

zu einem endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-graduierten S-Modul. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\mathrm{Hom}_S(X, X(n)) = \{(f,h) \mid f \in \mathrm{Hom}_R(B, B(n)),\ h \in \mathrm{Hom}_R(C, C(n)),\ gf = hg\},$$

wie eine einfache Rechnung zeigt (hierbei steht (f,g) für die Matrix $\mathrm{diag}(f,g)$). Weil g rechts-minimal ist, sind $(0,0)$ und $(1_B, 1_C)$ die einzigen Idempotenten in $\mathrm{End}_S(X)$. Also ist X unzerlegbarer graduierter S-Modul. Nach (6.10) ist $\mathrm{End}_{\widehat{S}}(\widehat{X})$ lokal. Es ist

$$\widehat{S} = \begin{pmatrix} \widehat{R} & 0 \\ \widehat{R} & \widehat{R} \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{End}_{\widehat{S}}(\widehat{X}) = \{(f,h) \mid f \in \mathrm{End}_{\widehat{R}}(\widehat{B}),\ h \in \mathrm{End}_{\widehat{R}}(\widehat{C}),\ \hat{g}f = h\hat{g}\}.$$

Es folgt: Ist $(f, 1_{\widehat{C}}) \in \mathrm{End}_{\widehat{S}}(\widehat{X})$, so ist f ein Isomorphismus, also folgt aus $\hat{g}f = \hat{g}$, daß f ein Isomorphismus ist. Damit ist $\hat{g}$ rechts-minimal. $\square$

§14 Endlicher Cohen-Macaulay-Typ

In diesem Abschnitt ist, wenn nichts anderes gesagt wird, $H = \mathbb{Z}$.
Es wird hier gezeigt, daß, wenn $\widehat{R}$ endlichen Cohen-Macaulay-Typ hat, der Funktor

$$\widehat{\cdot} : \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R) \longrightarrow \mathrm{CM}(\widehat{R})$$

repräsentativ ist, d.h. jeder Cohen-Macaulay $\widehat{R}$-Modul ist graduierbar.
Aus (8.2) folgt, daß R genau dann endlichen graduierten Cohen-Macaulay-Typ hat, wenn R^{op} endlichen graduierten Cohen-Macaulay-Typ hat. Eine analoge Aussage gilt für $\widehat{R}$ und $\widehat{R}^{op}$.

(14.1) Satz: (1) *Sei H eine abelsche Gruppe. Es habe R endlichen graduierten Cohen-Macaulay-Typ. Dann hat $\mathrm{CM}^H(R)$ Auslander-Reiten-Folgen.*
(2) *Es habe $\widehat{R}$ endlichen Cohen-Macaulay-Typ. Dann hat $\mathrm{CM}(\widehat{R})$ Auslander-Reiten-Folgen.*

B e w e i s : Der Beweis für (2) findet sich in [3]. Den analogen Beweis für (1) skizziere ich hier kurz. Seien $U_1, \dots, U_t$ alle unzerlegbaren Moduln aus $\mathrm{CM}^H(R)$ bis auf Verschiebung. Sei $C \in \mathrm{CM}^H(R)$ unzerlegbar und nicht projektiv. Sei $i \in \{1, \dots, t\}$. Dann ist

$$\bigoplus_{h \in H} \mathrm{rad}(U_i, C(h))$$

endlich erzeugter graduierter K-Modul ($\mathrm{rad}(U_i, C(h))$ besteht gerade aus den Nichtisomorphismen in $\mathrm{Hom}_R(U_i, C(h))$ für jedes $h \in H$). Ein endliches homogenes Erzeugendensystem hiervon kann man als Element $g_i \in \mathrm{Hom}_R(B_i, C)$ auffassen, wobei B_i endliche direkte Summe von Verschiebungen von U_i ist. Setze

$$B' := \bigoplus_{i=1}^{t} B_i, \;\; g' := (g_1, \dots, g_t) \in \mathrm{Hom}_R(B', C).$$

Es ist $B' \in \mathrm{CM}^H(R)$, und offenbar faktorisiert jeder Morphismus in $\mathrm{CM}^H(R)$, der in C endet und kein aufspaltender Epimorphismus ist, durch g'. Umgekehrt ist jeder in C endende Morphismus, der durch g' fakorisiert, kein aufspaltender Epimorphismus (weil $\mathrm{End}_R(C)$ lokal ist und alle g_i keine aufspaltenden Epimorphismen sind). Es ergibt sich also für jedes $M \in \mathrm{CM}^H(R)$ die exakte Sequenz in $\mathrm{Mod}(\mathrm{CM}^H(R)^{op})$

$$(-, B') \xrightarrow{(-,g')} (-, C) \longrightarrow (-, C)/\,\mathrm{rad}(-, C) \longrightarrow 0.$$

Setzt man R ein, so folgt, weil C nicht projektiv ist, daß g' ein Epimorphismus ist. Man erhält eine exakte Sequenz in $\mathrm{CM}^H(R)$

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow B' \xrightarrow{g'} C \longrightarrow 0,$$

die nicht aufspaltet (setze in obige Sequenz C ein). Dann gibt es einen unzerlegbaren direkten Summanden A von A', so daß die induzierte exakte Sequenz nicht aufspaltet:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Die untere Folge ist dann eine Auslander-Reiten-Folge in $\mathrm{CM}^H(R)$. Der Rest folgt per Dualität D^H. □

(14.2) Satz: $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$ *habe Auslander-Reiten-Folgen. Seien* M, $N \in \mathrm{CM}(\widehat{R})$ *unzerlegbar, und es existiere ein irreduzibler Morphismus* $f \in \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(M, N)$ *in* $\mathrm{CM}(\widehat{R})$*. Dann ist* M *graduierbar, genau wenn* N *graduierbar ist.*

B e w e i s : (1) Sei zunächst N graduierbar, $N \simeq \widehat{C}$ mit $C \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$ unzerlegbar. Ist N projektiv, so gibt es nach (13.9) einen rechts-fast-aufspaltenden Morphismus

$g : \widehat{E} \longrightarrow N$ mit einem $E \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$. Dann faktorisiert f durch g, es gibt einen aufspaltenden Monomorphismus $f' : M \longrightarrow \widehat{E}$, und M ist dann als direkter Summand von $\widehat{E}$ graduierbar.
Ist N nicht projektiv, so ist C nicht projektiv, also gibt es nach (12.4) eine Auslander-Reiten-Folge

$$0 \longrightarrow \widehat{A} \longrightarrow \widehat{B} \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

mit A, $B \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$. Dann ist wie eben M ein direkter Summand von $\widehat{B}$, also graduierbar.
(2) Sei jetzt M graduierbar. Es ist dann $\mathrm{D}\,M$ graduierbar, und $\mathrm{D}\,f : \mathrm{D}\,N \longrightarrow \mathrm{D}\,M$ ist irreduzibel in $\mathrm{CM}(\widehat{R}^{op})$. Mit (1) folgt dann, daß $\mathrm{D}\,N$ graduierbar ist, also ist es auch $N \simeq \mathrm{D}\,\mathrm{D}\,N$. □

(14.3) Eine präprojektive Partition. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$ bezüglich direkten Summanden abgeschlossene volle Unterkategorien von $\mathrm{CM}(\widehat{R})$. $P \in \mathcal{C}$ heißt *aufspaltend-projektiv* in $\mathcal{C}$, falls für jeden surjektiven Morphismus $f : A \longrightarrow P$ in $\mathcal{C}$ gilt, daß f schon aufspaltender Epimorphismus ist. Mit $\mathrm{P}_0(\mathcal{C})$ wird die Kategorie aller unzerlegbaren aufspaltend-projektiven Objekte in $\mathcal{C}$ bezeichnet.
Mit $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ wird die volle Unterkategorie von $\mathcal{C}$ bezeichnet, deren Objekte keinen direkten Summanden in $\mathcal{A}$ haben, mit $\operatorname{ind}\mathcal{C}$ die volle Unterkategorie aller Unzerlegbaren aus $\mathcal{C}$. Kategorien heißen hier *endlich*, wenn sie nur endlich viele Objekte bis auf Isomorphie enthalten.
Definiere $\mathcal{P}_0 := \mathrm{P}_0(\mathrm{CM}(\widehat{R}))$ und für $i \in \mathbb{N}$ induktiv

$$\mathcal{P}_i := \mathrm{P}_0(\mathrm{CM}(\widehat{R})_{\mathcal{P}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_{i-1}}),$$

und schließlich $\mathcal{P} := \bigcup_{i<\infty} \mathcal{P}_i$ und $\mathcal{P}_\infty := \operatorname{ind}(\mathrm{CM}(\widehat{R})_{\mathcal{P}})$.
Aus den Definitionen folgt:
(a) $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j = \emptyset$ für $i,\, j \leq \infty,\, i \neq j$,
(b) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \mathcal{P}_i = \operatorname{ind}\mathrm{CM}(\widehat{R})$,
(c) $\mathcal{P}_0 = \operatorname{ind}\operatorname{pro}(\widehat{R})$,
(d) $\mathcal{P}_i = \emptyset \;\Rightarrow\; \mathcal{P}_j = \emptyset$ für $i \leq j < \infty$.
Es habe jetzt $\widehat{R}$ endlichen Cohen-Macaulay-Typ. Es ist also $\operatorname{ind}\mathrm{CM}(\widehat{R})$ endlich. Im Rest dieser Nummer wird
(e) $\mathcal{P}_\infty = \emptyset$
gezeigt. Dies folgt wegen der Endlichkeit von $\operatorname{ind}\mathrm{CM}(\widehat{R})$ aus der folgenden Aussage:
(f) *Für jedes* $\mathcal{C}$ *(wie oben) ist* $\mathrm{P}_0(\mathcal{C})$ *eine Generatormenge für* $\mathcal{C}$.
Das bedeutet nach Definition, daß zu jedem $C \in \mathcal{C}$ endlich viele $A_1, \ldots, A_n \in \mathrm{P}_0(\mathcal{C})$ und eine Surjektion

$$\bigoplus_{i=1}^{n} A_i \longrightarrow C$$

existieren. Insbesondere folgt aus (f), daß $\mathcal{P}_\infty$ von jedem $\mathcal{P}_i$ $(i \in \mathbb{N}_0)$ generiert wird. Da aber $\mathcal{P}_i \neq \emptyset$ nur für endlich viele $i \in \mathbb{N}_0$ gelten kann, folgt dann $\mathcal{P}_\infty = \emptyset$.

Beweis der Aussage (f): (vgl. Auslander-Smalø [11, 2.]) Sei $\{B_1,\ldots,B_t\}$ eine Generatormenge für $\mathcal{C}$, wobei alle $B_i \in \operatorname{ind}\mathrm{CM}(\widehat{R})$ sind und t minimal ist. Es gilt $\{B_1,\ldots,B_t\} \subset \mathrm{P}_0(\mathcal{C})$: Denn sei etwa $B_1 \notin \mathrm{P}_0(\mathcal{C})$. Dann gibt es eine Surjektion der Form

$$(f_1,\ldots,f_n,f) : B_1^n \oplus A \longrightarrow B_1,\ A = \bigoplus_{i=2}^{t} B_i^{n_i},$$

welche kein aufspaltender Epimorphismus ist. Dann sind f und die f_i keine Isomorphismen. $\mathrm{End}_{\widehat{R}}(B_1)$ ist lokal, also liegen alle f_i in $\operatorname{rad}\mathrm{End}_{\widehat{R}}(B_1)$. Weil $(f_1,\ldots,f_n,f)$ surjektiv ist, $f_i(B_1) \subset \operatorname{rad}\mathrm{End}_{\widehat{R}}(B_1)$ $(i = 1,\ldots,n)$ gilt und $f(A) \subset \mathrm{tr}_{B_1}(A) := \sum\{\mathrm{Im}\, h \mid h \in \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(A,B_1)\}$ ist, folgt

$$B_1 = (\operatorname{rad}\mathrm{End}_{\widehat{R}}(B_1)) \cdot B_1 + \mathrm{tr}_{B_1}(A).$$

Faßt man B_1 als $\mathrm{End}_{\widehat{R}}(B_1)$-Modul auf, so folgt mit Nakayamas Lemma $\mathrm{tr}_{B_1}(A) = B_1$. Weil B_1 noethersch über $\widehat{R}$ ist, folgt: Es gibt einen surjektiven Homomorphimus der Form $g : A^m \longrightarrow B_1$. Daraus folgt aber, daß $\mathcal{C}$ schon von $\{B_2,\ldots,B_t\}$ generiert wird, Widerspruch zur Minimalität von t.
Es folgt also $\{B_1,\ldots,B_t\} \subset \mathrm{P}_0(\mathcal{C})$, und $\mathrm{P}_0(\mathcal{C})$ generiert damit $\mathcal{C}$. □

(14.4) Lemma: *$\widehat{R}$ habe endlichen Cohen-Macaulay-Typ. Dann gibt es zu jedem unzerlegbaren $C \in \mathrm{CM}(\widehat{R})$ eine Kette von irreduziblen Morphismen*

$$X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow{f_n} X_n$$

mit $n \geq 0$, $X_n = C$, X_0 projektiv, $X_i \in \mathrm{CM}(\widehat{R})$ unzerlegbar $(i = 0,\ldots,n)$.

Beweis: Mit den Bezeichnungen aus (14.3) gilt $\mathcal{P}_\infty = \emptyset$. Sei C unzerlegbar in $\mathrm{CM}(\widehat{R})$. Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}_0$ mit $C \in \mathcal{P}_i$. Ist $i = 0$, so ist nicht zu zeigen. Sei also $i > 0$. Dann ist C nicht projektiv, also gibt es wegen (14.1) eine Auslander-Reiten-Folge

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

in $\mathrm{CM}(\widehat{R})$. Da C aufspaltend-projektiv in $\mathrm{CM}(\widehat{R})_{\mathcal{P}_0\cup\cdots\cup\mathcal{P}_{i-1}}$ und g nicht aufspaltender Epimorphismus ist, muß ein unzerlegbarer direkter Summand E von B in einem $\mathcal{P}_j$ $(0 \leq j < i)$ existieren. Ist f_n die Einschränkung von g auf E, so ist f_n irreduzibel. Die Aussage folgt dann durch Induktion. □

(14.5) Satz: *$\widehat{R}$ habe endlichen Cohen-Macaulay-Typ. Dann ist der Komplettierungsfunktor*

$$\widehat{\cdot} : \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R) \longrightarrow \mathrm{CM}(\widehat{R})$$

repräsentativ.

B e w e i s : Es genügt zu zeigen, daß jedes unzerlegbare $C \in \mathrm{CM}(\widehat{R})$ graduierbar ist. Es sind alle projektiven Objekte in $\mathrm{mod}(\widehat{R})$ graduierbar, und mit (14.2) und (14.4) folgt die Behauptung. □

Zum Schluß dieses Abschnitts wird noch ein Kriterium dafür, daß $\widehat{R}$ endlichen Cohen-Macaulay-Typ hat, hergeleitet. Für Details verweise ich auf die Literatur. Die nächste Aussage ist in Auslander [3] bewiesen.

(14.6) Satz: *Folgende Aussagen sind äquivalent:*
(1) $\mathrm{CM}(\widehat{R})$ *hat Auslander-Reiten-Folgen.*
(2) $\widehat{R}$ *ist eine isolierte Singularität, d.h. es gilt* $\mathrm{gl.dim}\,\widehat{R}_{\mathfrak{p}} = \dim \widehat{K}_{\mathfrak{p}}$ *für jedes nicht-maximale Primideal* $\mathfrak{p} \subset \widehat{K}$. □

Ist $\widehat{R}$ eine isolierte Singularität, so hat $\mathrm{CM}(\widehat{R})$ eine präprojektive Partition wie in (14.3) (d.h. es gilt (a)–(d) und (f) in (14.3)), vgl. Auslander-Smalø [12]. Man erhält damit die folgende Aussage, vgl. Auslander-Reiten [9, Theorem 1.1].

(14.7) Satz: *Sei* $\widehat{R}$ *eine isolierte Singularität und* $\mathcal{C} \subset \mathrm{ind}\,\mathrm{CM}(\widehat{R})$ *eine Klasse von Moduln mit:*
(a) $\mathcal{C}$ *enthält alle Moduln in* $\mathrm{ind}\,\mathrm{pro}(\widehat{R})$
(b) $\mathcal{C}$ *ist endlich*
(c) $\mathcal{C}$ *ist abgeschlossen gegen irreduzible Morphismen.*
Dann enthält $\mathcal{C}$ *alle* $M \in \mathrm{ind}\,\mathrm{CM}(\widehat{R})$.

B e w e i s : Sei $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_\infty$ eine präprojektive Partition von $\mathrm{CM}(\widehat{R})$ wie in (14.3). Mit dem Beweis von (14.4) folgt dann $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{C}$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\cup_{i<\infty}\mathcal{P}_i$ endlich, und es folgt $\mathcal{P}_\infty = \emptyset$, also $\mathcal{C} = \mathrm{ind}\,\mathrm{CM}(\widehat{R})$. □

Ist also $\mathcal{C}$ die Klasse aller unzerlegbaren, graduierbaren Cohen-Macaulay Moduln über $\widehat{R}$, so folgt aus (14.7):

(14.8) Korollar: *R habe endlichen graduierten Cohen-Macaulay-Typ, und es sei $\widehat{R}$ eine isolierte Singularität*[8]*. Dann hat $\widehat{R}$ endlichen Cohen-Macaulay-Typ.* □

§15 Auslander-Reiten-Köcher

In diesem Paragraphen sei $H = \mathbb{Z}$, und es gelte: Die Kategorien $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$ und $\mathrm{CM}(\widehat{R})$ haben Auslander-Reiten-Folgen.

[8] Mir ist nicht klar, ob man hier auf die Voraussetzung, daß $\widehat{R}$ eine isolierte Singularität ist, verzichten kann.

Die nächste Aussage folgt aus dem Zusammenhang zwischen irreduziblen und minimal fast-aufspaltenden Morphismen, vgl. (10.8).

(15.1) Satz: *Der Komplettierungsfunktor*

$$\widehat{\cdot} : \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R) \longrightarrow \mathrm{CM}(\widehat{R})$$

bewahrt irreduzible Morphismen. □

(15.2) Auslander-Reiten-Köcher. Der *bewertete Auslander-Reiten-Köcher* $\Gamma(R)$ von $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$ besteht aus folgenden Daten:
(1) Die Knoten von $\Gamma(R)$ sind die Isomorphieklassen $[A]$ ($A \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$ unzerlegbar).
(2) Es gibt einen Pfeil $[A] \longrightarrow [B]$ ($A,\ B \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$ unzerlegbar), genau wenn ein irreduzibler Morphismus von A nach B existiert.
(3) Jeder Pfeil $[A] \longrightarrow [B]$ in $\Gamma(R)$ wird mit einem Zahlenpaar (s_{AB}, r_{AB}) beschriftet. Dieses Paar ist wie folgt definiert: Sei

$$A \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{t} E_i$$

minimal links-fast-aufspaltend mit unzerlegbaren E_i ($i = 1, \ldots, t$). Dann wird

$$s_{AB} := \#\{1 \leq i \leq t \mid B \simeq E_i\}$$

gesetzt. Sei

$$\bigoplus_{i=1}^{s} F_i \longrightarrow B$$

minimal rechts-fast-aufspaltend mit unzerlegbaren F_i ($i = 1, \ldots, s$). Dann wird

$$r_{AB} := \#\{1 \leq i \leq s \mid A \simeq F_i\}$$

gesetzt. Es gilt: $r_{AB} = 0$ ist äquivalent zu $s_{AB} = 0$, und beides ist äquivalent dazu, daß es keinen irreduziblen Morphismus $A \longrightarrow B$ gibt.
Die Gruppe $\mathbb{Z}$ operiert via Verschiebung auf der Knoten- und der Pfeilmenge von $\Gamma(R)$, und es gilt

$$s_{A(n)B(n)} = s_{AB},\ r_{A(n)B(n)} = r_{AB} \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

$\Gamma(R)$ ist *lokal-endlich*, d.h. in jedem Knoten starten und landen nur endlich viele Pfeile. Desweiteren gibt es keine mehrfachen Pfeile zwischen zwei Knoten in eine Richtung. □

Analog wird der Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(\widehat{R})$ von $\mathrm{CM}(\widehat{R})$ definiert.

(15.3) Satz: *Seien A, $B \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$ unzerlegbar. Dann gibt es einen irreduziblen Morphismus $\widehat{A} \longrightarrow \widehat{B}$ genau dann, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ und einen irreduziblen Morphismus $A \longrightarrow B(n)$ gibt. Desweiteren gelten die Formeln*

$$r_{\widehat{A}\widehat{B}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r_{A(n)B}, \ \ s_{\widehat{A}\widehat{B}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s_{AB(n)}.$$

Beweis: Sei

$$\bigoplus_{i=1}^{s} F_i \longrightarrow B$$

minimal rechts-fast-aufspaltend mit unzerlegbaren F_i. Dann ist

$$\bigoplus_{i=1}^{s} \widehat{F_i} \longrightarrow \widehat{B}$$

minimal rechts-fast-aufspaltend, und es gilt

$$r_{\widehat{A}\widehat{B}} = \#\{1 \leq i \leq s \mid \widehat{A} \simeq \widehat{F_i}\} = \#\{1 \leq i \leq s \mid A \sim_{\mathbb{Z}} F_i\} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r_{A(n)B}.$$

(Beachte: $A(n) \not\simeq A$ für $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.) Die analoge Formel für $s_{\widehat{A}\widehat{B}}$ folgt genauso. Weiter folgt

$$r_{\widehat{A}\widehat{B}} > 0 \iff \text{es gibt } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } r_{A(n)B} > 0. \qquad \square$$

Sei $\widehat{\Gamma}(R)$ der volle Teilköcher von $\Gamma(\widehat{R})$, dessen Knoten gerade die graduierbaren unzerlegbaren Objekte in $\mathrm{CM}(\widehat{R})$ sind (nach (14.2) ist kein graduierbarer Knoten in $\Gamma(\widehat{R})$ mit einem nichtgraduierbaren Knoten durch einen Pfeil verbunden). Der Satz zeigt auf, wie $\widehat{\Gamma}(R)$ aus $\Gamma(R)$ konstruiert werden kann.
Hat R endlichen graduierten Cohen-Macaulay-Typ, so gilt $\widehat{\Gamma}(R) = \Gamma(\widehat{R})$, wie aus den Sätzen (14.5) und (14.8) folgt.
Sei $\Gamma(R)/S^{\mathbb{Z}}$ der folgende Köcher: Die Knoten sind gerade die $\mathbb{Z}$-Bahnen (d.h. die Verschiebungsklassen) $[A]_{\mathbb{Z}}$ der Knoten aus $\Gamma(R)$, es gibt einen Pfeil $[A]_{\mathbb{Z}} \longrightarrow [B]_{\mathbb{Z}}$ genau dann, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ und einen Pfeil $[A] \longrightarrow [B(n)]$ in $\Gamma(R)$ gibt, und für die Bewertung gilt

$$r_{[A]_{\mathbb{Z}}[B]_{\mathbb{Z}}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r_{A(n)B}, \ \ s_{[A]_{\mathbb{Z}}[B]_{\mathbb{Z}}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s_{AB(n)}.$$

Dann lautet (15.3) in Kurzform:

$$\Gamma(R)/S^{\mathbb{Z}} \simeq \widehat{\Gamma}(R).$$

Abschließend werden die Ergebnisse dieses Abschnitts in überlagerungstheoretischer Sprechweise gedeutet.
Es wird nun angenommen, daß die Bewertungen der Auslander-Reiten-Köcher *symmetrisch* sind, d.h. es gelte $r_{AB} = s_{AB}$ für alle unzerlegbaren A, $B \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}(R)$ (bzw. $\mathrm{CM}(\widehat{R})$). Es kann gezeigt werden, daß dies gilt, wenn der Körper k algebraisch abgeschlossen ist. Pfeile werden jetzt der Bewertung entsprechend mehrfach eingezeichnet.

(15.4) Überlagerungen. Seien $\Gamma' = (\Gamma'_0, \Gamma'_1)$ (Knotenmenge: Γ'_0, Pfeilmenge: Γ'_1) und $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ beliebige Köcher (evtl. unendlich, mit mehrfachen Pfeilen, Schlaufen ...).
(1) $F = (F_0, F_1) : \Gamma' \longrightarrow \Gamma$ ist ein *Morphismus von Köchern*, wenn $F_0 : \Gamma'_0 \longrightarrow \Gamma_0$ und $F_1 : \Gamma'_1 \longrightarrow \Gamma_1$ Abbildungen sind, so daß ein Pfeil

$$x \xrightarrow{\alpha} y$$

abgebildet wird auf den Pfeil

$$F_0(x) \xrightarrow{F_1(\alpha)} F_0(y).$$

(2) Ein Morphismus von Köchern $F = (F_0, F_1) : \Gamma' \longrightarrow \Gamma$ heißt *Überlagerung* von Γ, wenn F_1 für jeden Knoten $x \in \Gamma'_0$ eine bijektive Abbildung zwischen den Pfeilen, die in x starten (bzw. landen) und den Pfeilen, die in $F_0(x)$ starten (bzw. landen) induziert.
(3) Sind $F : \Gamma' \longrightarrow \Gamma$ und $F' : \Gamma'' \longrightarrow \Gamma$ Überlagerungen, so heißt ein Morphismus von Köchern $E : \Gamma'' \longrightarrow \Gamma'$ ein *Überlagerungsmorphismus*, wenn $FE = F'$ gilt. Die Überlagerungen von Γ bilden dann eine Kategorie $/\Gamma$.
(4) Sei $F = (F_0, F_1) : \Gamma' \longrightarrow \Gamma$ eine Überlagerung und G eine Gruppe. Das Paar (F, G) heißt eine *Galois-Überlagerung*, wenn folgendes gilt:
(a) F_0 ist surjektiv
(b) G operiert auf Γ' als Gruppe von Automorphismen von F in $/\Gamma$
(c) G operiert transitiv und frei auf den Fasern $F_0^{-1}(y)$ $(y \in \Gamma_0)$. □

(15.5) Korollar: *Sei k algebraisch abgeschlossen. Dann induzieren der Funktor $\widehat{\cdot}$ und die Gruppe $\mathbb{Z}$ eine Galois-Überlagerung $\Gamma(R) \longrightarrow \widehat{\Gamma}(R)$.* □

Die folgenden Beispiele illustrieren, wie $\Gamma(\widehat{R})$ aus $\Gamma(R)$ konstruiert wird.

(15.6) Beispiele: (1) Sei $R = k[X_1, \ldots, X_d]$ mit $\operatorname{grad} X_i = 1$ $(i = 1, \ldots, d)$. Dann ist $\Gamma(R)$ von der Gestalt

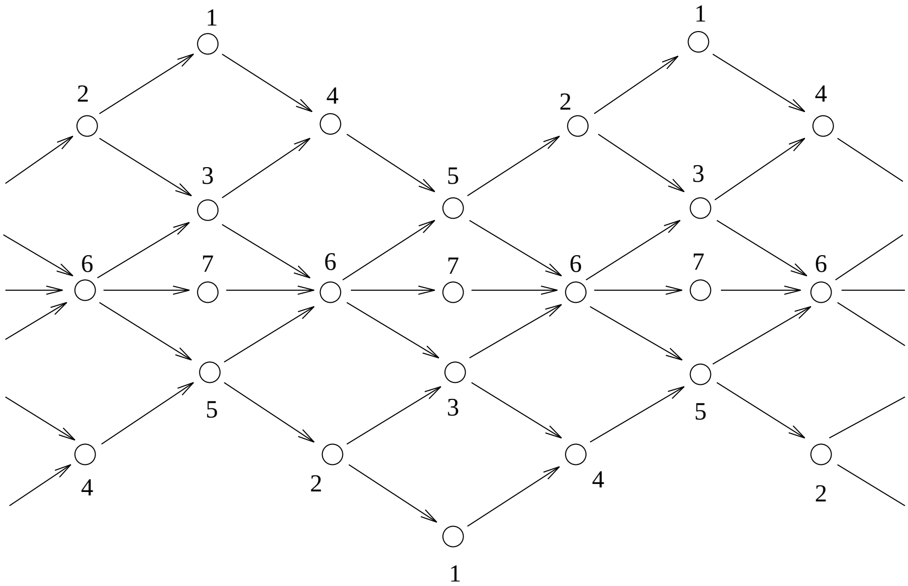
$$\cdots \longrightarrow \circ \xrightarrow{d} \circ \xrightarrow{d} \circ \xrightarrow{d} \circ \xrightarrow{d} \circ \longrightarrow \cdots$$

Vervollständigung liefert $\Gamma(\widehat{R})$:

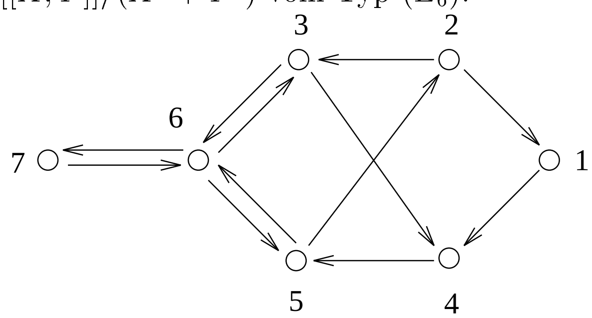
$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[loop right, "d"] \end{tikzcd}$$

(2) Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 und $R = k[X,Y]/(X^3 + Y^4)$ mit $\operatorname{grad} X = 4$, $\operatorname{grad} Y = 3$. $\Gamma(R)$ hat die Form[9]:

[9] Vgl. Simson [24].



Vervollständigung liefert den Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(\widehat{R})$ der einfachen Kurvensingularität[10] $\widehat{R} = k[[X,Y]]/(X^3 + Y^4)$ vom Typ (E_6):



□

[10]Die Auslander-Reiten-Köcher aller einfachen Kurvensingularitäten findet man in [15] und [25]; in [24, Example 13.28] ist der Köcher von $k[[X,Y]]/(X^3 + Y^4)$ fehlerhaft abgebildet.

Kapitel IV
Vervollständigung entlang einer unendlichen zyklischen Gruppe

In diesem letzten Kapitel wird das Konzept der Vervollständigung ausgedehnt auf allgemeinere Klassen Gruppen-graduierter Moduln. Die Hauptergebnisse der vorherigen beiden Kapitel für $\mathbb{Z}$-Graduierungen werden mittels Morita-theoretischer Aussagen verallgemeinert.

§16 Definitionen

Sei H eine abelsche Gruppe, sei U eine unendliche zyklische Untergruppe von H, also $U \simeq \mathbb{Z}$. U habe endlichen Index in H. (Aus diesen Voraussetzungen folgt insbesondere, daß H eine endlich erzeugte abelsche Gruppe vom Rang 1 ist.) Sei weiter k ein kommutativer Ring und $R = \bigoplus R_h$ eine H-graduierte k-Algebra. Es wird in diesem Paragraphen die Vervollständigung von R entlang U definiert.
Sei $\Delta \subset H$ eine *Transversale*, d.h. ein Repräsentantensystem für die Nebenklassen von U. Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{Z}$ ein Gruppenisomorphismus (der einzige andere Isomorphismus ist $-f$). Auf U wird eine Ordnung definiert durch

$$u \leq v \quad :\Longleftrightarrow \quad f(u) \leq f(v) \quad (u,\, v \in U).$$

Definiere

$$\mathrm{Mod}^H_{U\gg}(R) := \{M \in \mathrm{Mod}^H(R) \mid M_{h+u} = 0,\, u \in U \;\text{ klein},\, h \in \Delta\}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß diese Definition unabhängig ist von der Auswahl von Δ. Man erhält also eine volle Unterkategorie $\mathrm{Mod}^H_{U\gg}(R)$ von $\mathrm{Mod}^H(R)$.
Im Rest dieses Paragraphen gelte

$$R \in \mathrm{Mod}^H_{U\gg}(R).$$

(16.1) Lemma: *Sei $M \in \mathrm{Mod}^H(R)$ endlich erzeugt. Dann gilt $M \in \mathrm{Mod}^H_{U\gg}(R)$.*

Beweis: Für jedes $h \in H$ ist $R(h)$ in $\mathrm{Mod}^H_{U\gg}(R)$, weil mit Δ auch $\Delta + \{h\}$ eine Transversale ist. Die Behauptung folgt dann wie in (5.4). $\square$

Für jedes $M \in \mathrm{Mod}^H_{U\gg}(R)$ wird definiert:

$$\widehat{M}^U := \bigoplus_{X\in H/U} \prod_{x\in X} M_x.$$

$\widehat{R}^U$ wird zu einer H/U-graduierten k-Algebra: Für alle Nebenklassen X, $Y \in H/U$ wird gesetzt (in naheliegender Potenzreihenschreibweise[11] mit der Unbestimmten T):

$$\Big(\sum_{x\in X} r_x T^x\Big)\Big(\sum_{y\in Y} s_y T^y\Big) := \sum_{z\in X+Y}\Big(\sum_{x+y=z} r_x s_y\Big)T^z.$$

Durch distributive Fortsetzung erhält man eine Multiplikation, die $\widehat{R}^U$ zu einer H/U-graduierten k-Algebra macht. Nach demselben formalen Schema wird $\widehat{M}^U$ zu einem H/U-graduierten $\widehat{R}$-Modul für jedes $M \in \mathrm{Mod}^H_{U\gg}(R)$.

(16.2) Definition: Die H/U-graduierte k-Algebra $\widehat{R}^U$ heißt die *Vervollständigung* (oder *Komplettierung*) *entlang* U von R. Für jedes $M \in \mathrm{Mod}^H_{U\gg}(R)$ heißt der H/U-graduierte $\widehat{R}^U$-Modul $\widehat{M}^U$ die *Vervollständigung* (oder *Komplettierung*) *entlang* U von M. □

(16.3) Der Komplettierungsfunktor. Seien M, $N \in \mathrm{Mod}^H_{U\gg}(R)$, $M = \bigoplus M_h$, $N = \bigoplus N_h$. Sei $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Dann sei

$$\hat{f}^U := \bigoplus_{X\in H/U} \hat{f}_{|X},$$

wobei für jede Nebenklasse $X \in H/U$

$$\hat{f}_{|X} : \prod_{x\in X} M_x \longrightarrow \prod_{x\in X} N_x$$

definiert wird durch

$$\hat{f}_{|X}\Big(\sum_{x\in X} m_x T^x\Big) = \sum_{x\in X} f(m_x) T^x.$$

Auf diese Weise erhält man einen additiven Funktor

$$\widehat{\cdot}^U : \mathrm{Mod}^H_{U\gg}(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}^{H/U}(\widehat{R}^U),$$

den *Komplettierungsfunktor*. □

(16.4) Sei $M \in \mathrm{Mod}^H(R)$ und $X \in H/U$ eine Nebenklasse.

$$M_{|X} := \bigoplus_{x\in X} M_x$$

[11] Die innere Summe auf der rechten Seite der Gleichung ist wegen $R \in \mathrm{Mod}^H_{U\gg}(R)$ endlich.

ist die *Einschränkung* von M auf X. Es ist

$$M = \bigoplus_{X \in H/U} M_{|X}$$

wegen

$$H = \coprod_{X \in H/U} X.$$

Offensichtlich ist $R_{|U}$ eine U-graduierte k-Algebra, die man auch als H-graduierte k-Algebra auffassen kann (durch Fortsetzen mit Nullen). Wählt man $h \in X$ fest, so ist

$$M_{|X} = \bigoplus_{u \in U} M_{u+h}$$

ein U-graduierter $R_{|U}$-Modul. □

§17 Graduierte Morita-Äquivalenzen

Sei k stets ein kommutativer Ring.
Ist $\mathcal{A}$ eine k-Kategorie, so wird die *additive Hülle*

$$\oplus\mathcal{A}$$

von $\mathcal{A}$ so definiert: Die Objekte von $\oplus\mathcal{A}$ sind endliche Tupel der Form $(X_1 \ldots, X_n)$ $(X_i \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N}_0)$, und die Morphismen

$$f : (X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow (Y_1, \ldots, Y_m)$$

sind gerade Matrizen $(f_{ij})_{ij}$ mit $f_{ij} \in \mathcal{A}(X_j, Y_i)$. Komposition von Morphismen ist durch Matrizenmultiplikation gegeben.

(17.1) Lemma: (1) *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ k-Kategorien, $\mathcal{B}$ additiv, $i : \mathcal{A} \longrightarrow \oplus\mathcal{A}$ die natürliche Einbettung $A \mapsto (A)$ und $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein k-Funktor. Dann gibt es genau einen k-Funktor $\overline{\varphi} : \oplus\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ mit $\overline{\varphi} i = \varphi$. Dieser ist durch*

$$\overline{\varphi}(A_1, \ldots, A_n) = \bigoplus_{i=1}^{n} \varphi(A_i)$$

gegeben.
(2) *Sei $\mathcal{A}$ klein. Durch die Zuordnung $F \mapsto \overline{F}$ aus* (1) *wird eine Äquivalenz*

$$\operatorname{Mod} \mathcal{A} \longrightarrow \operatorname{Mod} \oplus\mathcal{A}$$

definiert. □

Sei $\mathcal{A}$ klein. Die *Yoneda-Einbettung*

$$\mathcal{A}^{op} \longrightarrow \operatorname{Mod}\mathcal{A},\ X \mapsto \mathcal{A}(X,-)$$

ist ein voller und treuer k-Funktor. Mit deren Hilfe bettet man $\oplus(\mathcal{A}^{op}) = (\oplus\mathcal{A})^{op}$ in $\operatorname{Mod}\mathcal{A}$ ein. Diese volle Unterkategorie besteht gerade aus den *endlichen freien* $\mathcal{A}$-Moduln.
Die volle Unterkategorie aller direkten Summanden von endlichen freien $\mathcal{A}$-Moduln wird mit

$$\operatorname{pro}\mathcal{A}$$

bezeichnet. Deren Objekte heißen *endliche projektive* $\mathcal{A}$-Moduln. Die volle Unterkategorie $\operatorname{mod}\mathcal{A}$ von $\operatorname{Mod}\mathcal{A}$ besteht aus den *endlich präsentierten* $\mathcal{A}$-Moduln, also den Cokernen von Morphismen zwischen endlichen freien Moduln.

(17.2) Lemma: *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ kleine k-Kategorien und*

$$\Phi : \operatorname{Mod}\mathcal{A} \longrightarrow \operatorname{Mod}\mathcal{B}$$

eine Äquivalenz von k-Kategorien. Φ induziert durch Einschränkung Äquivalenzen

$$\operatorname{mod}\mathcal{A} \longrightarrow \operatorname{mod}\mathcal{B} \quad \textit{und} \quad \operatorname{pro}\mathcal{A} \longrightarrow \operatorname{pro}\mathcal{B}.$$

□

(17.3) Lemma: *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ kleine k-Kategorien und $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \oplus\mathcal{B}$ ein voller und treuer k-Funktor. Die additive Fortsetzung $\overline{\varphi} : \oplus\mathcal{A} \longrightarrow \oplus\mathcal{B}$ ist voll und treu. Äquivalent sind:*
(1) *Der k-Funktor*

$$\Phi : \begin{cases} \operatorname{Mod}\mathcal{B} & \longrightarrow & \operatorname{Mod}\mathcal{A} \\ F & \mapsto & \overline{F}\varphi \\ (\eta_B)_{B\in\mathcal{B}} & \mapsto & (\overline{\eta}_{\varphi(A)})_{A\in\mathcal{A}} \end{cases}$$

ist eine Äquivalenz von k-Kategorien.
(2) *Zu jedem $B \in \oplus\mathcal{B}$ gibt es $A \in \oplus\mathcal{A}$ und $B' \in \oplus\mathcal{B}$ mit $\overline{\varphi}(A) \simeq B \oplus B'$.*

Beweis: (1)⇒(2): Sei $B \in \oplus\mathcal{B}$. Dann ist $\oplus\mathcal{B}(B,-) \in \operatorname{pro}\oplus\mathcal{B}$. Φ induziert eine Äquivalenz $\operatorname{Mod}\oplus\mathcal{B} \longrightarrow \operatorname{Mod}\oplus\mathcal{A}$, $F \mapsto F\overline{\varphi}$. Also gibt es ein $A \in \oplus\mathcal{A}$, so daß $\oplus\mathcal{B}(B,\overline{\varphi}(-))$ ein direkter Summand von $\oplus\mathcal{A}(A,-)$ in $\operatorname{Mod}\oplus\mathcal{A}$ ist. Es gibt also ein $F \in \operatorname{Mod}\oplus\mathcal{B}$ mit

$$\oplus\mathcal{B}(B,\overline{\varphi}(-)) \oplus F\overline{\varphi} \simeq \oplus\mathcal{A}(A,-) \simeq \oplus\mathcal{B}(\overline{\varphi}(A),\overline{\varphi}(-)).$$

Es folgt

$$\oplus\mathcal{B}(B,-) \oplus F \simeq \oplus\mathcal{B}(\overline{\varphi}(A),-).$$

Weil die Yoneda-Einbettung $(\oplus\mathcal{B})^{op} \longrightarrow \operatorname{Mod}\oplus\mathcal{B}$ voll und treu ist, ist B ein direkter Summand von $\overline{\varphi}(A)$ in $(\oplus\mathcal{B})^{op}$, also auch in $\oplus\mathcal{B}$.

(2)⇒(1): Sei $\overline{\Phi} : \operatorname{Mod} \oplus\mathcal{B} \longrightarrow \operatorname{Mod} \oplus\mathcal{A}$ der von $\overline{\varphi}$ induzierte k-Funktor. Es genügt zu zeigen, daß $\overline{\Phi}$ eine Äquivalenz ist, denn dann ist es offensichtlich auch

$$\Phi : \operatorname{Mod} \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mod} \oplus\mathcal{B} \xrightarrow{\overline{\Phi}} \operatorname{Mod} \oplus\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mod} \mathcal{A}.$$

Wähle zu jedem $B \in \oplus\mathcal{B}$ ein $A_B \in \oplus\mathcal{A}$, so daß B ein direkter Summand von $\overline{\varphi}(A_B)$ in $\oplus\mathcal{B}$ ist. Seien $p_B : \overline{\varphi}(A_B) \to B$ und $i_B : B \to \overline{\varphi}(A_B)$ die kanonischen Projektionen bzw. Injektionen. Sei $F : \oplus\mathcal{A} \longrightarrow \operatorname{Mod}(k)$ ein k-Funktor. Zu F wird ein k-Funktor $H : \oplus\mathcal{B} \longrightarrow \operatorname{Mod}(k)$ mit $H\overline{\varphi} \simeq F$ angegeben, so daß also $\overline{\Phi}$ repräsentativ ist. Seien B, $B' \in \oplus\mathcal{B}$ und $h : B \longrightarrow B'$ ein Morphismus. Es gibt eindeutig bestimmte $f : A_B \to A_B$, $f' : A_{B'} \to A_{B'}$ und $g : A_B \to A_{B'}$ mit $\overline{\varphi}(f) = i_B p_B$, $\overline{\varphi}(f') = i_{B'} p_{B'}$ und $\overline{\varphi}(g) = i_{B'} h p_B$. Es gilt $(1 - f')g = 0 = g(1 - f)$. Dann hat man das Cokern-Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
F(A_B) & \xrightarrow{F(1-f)} & F(A_B) & \longrightarrow & H(B) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle F(g)} & & \downarrow{\scriptstyle F(g)} & & \downarrow{\scriptstyle H(h)} & & \\
F(A_{B'}) & \xrightarrow[F(1-f')]{} & F(A_{B'}) & \longrightarrow & H(B') & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

und das darin definierte H induziert einen k-Funktor $H : \oplus\mathcal{B} \longrightarrow \operatorname{Mod}(k)$ mit $H\overline{\varphi} \simeq F$. Es ist nicht schwierig zu zeigen, daß $\overline{\Phi}$ voll und treu ist. □

(17.4) Satz: *Sei H eine abelsche Gruppe und U eine Untergruppe von H von endlichem Index. $\Delta = (h_1, \ldots, h_t)$ sei eine Transversale für U in H. $R = \bigoplus R_h$ sei eine H-graduierte k-Algebra. Sei $S = \bigoplus S_u$ die durch*

$$S_u = \begin{pmatrix} R_u & R_{(h_1-h_2)+u} & \cdots & R_{(h_1-h_t)+u} \\ R_{(h_2-h_1)+u} & R_u & \cdots & R_{(h_2-h_t)+u} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{(h_t-h_1)+u} & R_{(h_t-h_2)+u} & \cdots & R_u \end{pmatrix}$$

definierte U-graduierte Matrix-Algebra. Dann induziert die Zuordnung

$$\bigoplus_{h\in H} M_h \mapsto \bigoplus_{u\in U} \bigoplus_{i=1}^{t} M_{u+h_i}$$

eine Äquivalenz von k-Kategorien

$$\Psi : \operatorname{Mod}^H(R) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mod}^U(S).$$

Für jedes $M \in \operatorname{Mod}^H(R)$ und jedes $u \in U$ gilt

$$\Psi(M(u)) = \Psi(M)(u).$$

Beweis: Definiere $\varphi : [U; S] \longrightarrow \oplus[H; R]$ durch $\varphi(u) := (u + h_1, \ldots, u + h_t)$ für jedes $u \in U$. φ ist voll und treu, und es ist offensichtlich, daß (17.3)(2) erfüllt ist, also induziert φ eine Äquivalenz

$$\Phi : \mathrm{Mod}[H; R] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}[U; S].$$

Mit (3.4) erhält man die Äquivalenz Ψ. Für jedes $u \in U$ und $M = \bigoplus M_h \in \mathrm{Mod}^H(R)$ gilt

$$\Psi(M(u)) = \bigoplus_{v \in U} \bigoplus_{i=1}^{t} M_{h_i+v+u} = \Psi(M)(u). \qquad \square$$

Sei $\Psi : \mathrm{Mod}^H(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}^U(S)$ die Äquivalenz aus dem Satz. Es gilt insbesondere: Für M, $N \in \mathrm{Mod}^H(R)$ gilt

$$M \sim_U N \iff \Psi(M) \sim_U \Psi(N).$$

Die analoge Aussage gilt für eine Quasi-Inverse von Ψ.

§18 Vervollständigung graduierter Cohen-Macaulay Moduln

In diesem Paragraphen sei H eine abelsche Gruppe und $U \simeq \mathbb{Z}$ eine Untergruppe in H von endlichem Index t, $\Delta = (h_1, \ldots, h_t)$ sei eine Transversale von U in H. $K = k[X_1, \ldots, X_d] = \bigoplus K_h$ sei H-graduiert, wobei alle Komponenten endlichdimensional mit $K_0 = k$ ein Körper und alle Unbestimmten X_i homogen sind. Zusätzlich gelte

$$K \in \mathrm{Mod}^H_{U\gg}(K).$$

$R = \bigoplus R_h$ sei eine H-graduierte Cohen-Macaulay K-Algebra.
Für jedes $i \in \{1, \ldots, d\}$ gilt $\mathrm{grad}\, X_i^t = t \cdot \mathrm{grad}\, X_i \in U$. Sei $K' = k[Y_1, \ldots, Y_d] \subset K$ die Polynomalgebra in den Unbestimmten $Y_i = X_i^t$ $(i = 1, \ldots, d)$. Es gilt

$$K' \subset K_{|U} \subset K.$$

K' und $K_{|U}$ kann man als U-graduierte und als H-graduierte k-Algebren auffassen.

(18.1) Satz: *Die U-graduierte Matrix-Algebra $S = \bigoplus S_u$, die durch*

$$S_u = \begin{pmatrix} R_u & R_{(h_1-h_2)+u} & \cdots & R_{(h_1-h_t)+u} \\ R_{(h_2-h_1)+u} & R_u & \cdots & R_{(h_2-h_t)+u} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{(h_t-h_1)+u} & R_{(h_t-h_2)+u} & \cdots & R_u \end{pmatrix}$$

definiert wird, ist eine U-graduierte Cohen-Macaulay K'-Algebra. Die Äquivalenz aus (17.4) *induziert eine Äquivalenz*

$$\Psi : \mathrm{CM}_K^H(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CM}_{K'}^U(S),$$

und es gilt für jedes $M \in \mathrm{CM}^H(R)$ und $u \in U$

$$\Psi(M(u)) = \Psi(M)(u).$$

B e w e i s: Division mit Rest zeigt

$$K = \bigoplus_{0 \le a_i < t} K' \cdot X_1^{a_1} \cdots X_d^{a_d}.$$

K ist also endlich erzeugt (graduiert) frei über K', und damit ist es auch R. Es ist

$$R = \bigoplus_{X \in H/U} R_{|X}.$$

Also ist für jede Nebenklasse $X \in H/U$ die Einschränkung $R_{|X}$ von R auf X endlich erzeugt projektiv über K', also auch endlich erzeugt projektiv als U-graduierter K'-Modul, vgl. (1.9)(1). Weil K' graduiert lokal ist, ist jedes $R_{|X}$ sogar endlich erzeugt graduiert frei über K'. Es folgt: S ist endlich erzeugt graduiert freier K'-Modul, denn es ist als graduierter K'-Modul

$$S \simeq \begin{pmatrix} R_{|U} & R_{|U+(h_1-h_2)} & \cdots & R_{|U+(h_1-h_t)} \\ R_{|U+(h_2-h_1)} & R_{|U} & \cdots & R_{|U+(h_2-h_t)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{|U+(h_t-h_1)} & R_{|U+(h_t-h_2)} & \cdots & R_{|U} \end{pmatrix} \simeq \bigoplus_{1 \le i,j \le t} R_{|U+(h_i-h_j)}.$$

Also ist S eine U-graduierte Cohen-Macaulay K'-Algebra.
Sei $M \in \mathrm{mod}^H(R)$. Es ist M endlich erzeugt H-graduiert frei über K ist, genau wenn (nach (4.2)) M endlich erzeugt H-graduiert frei über K' ist, genau wenn $\Psi(M)$ endlich erzeugt frei über K' ist, und dies gilt genau dann, wenn $\Psi(M)$ endlich erzeugt U-graduiert frei über K' ist. Es gilt also

$$M \in \mathrm{CM}^H(R) \iff \Psi(M) \in \mathrm{CM}^U(S).$$

Die Äquivalenz Ψ läßt sich damit einschränken zu einer Äquivalenz zwischen graduierten Cohen-Macaulay Moduln. □

(18.2) Lemma: *Sei $\pi : H \longrightarrow H/U$ die kanonische Surjektion. Für jedes $g \in H$ kommutiert das Diagramm von Funktoren*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mod}^H_{U\gg}(R) \arrow[r, "\widehat{\cdot}^U"] \arrow[d, "S_g^H"'] & \mathrm{Mod}^{H/U}(\widehat{R}^U) \arrow[d, "S_{\pi(g)}^{H/U}"] \\ \mathrm{Mod}^H_{U\gg}(R) \arrow[r, "\widehat{\cdot}^U"] & \mathrm{Mod}^{H/U}(\widehat{R}^U). \end{tikzcd}$$

Für jedes $M \in \mathrm{Mod}^H_{U\gg}(R)$ und $g \in H$ gilt also

$$\widehat{M(g)}^U \simeq \widehat{M}^U(\pi(g)).$$

Beweis: Es gilt

$$\widehat{M(g)}^U = \bigoplus_{X\in H/U}\prod_{x\in X} M_{x+g} \simeq \bigoplus_{X\in H/U}\prod_{z\in X+\pi(g)} M_z = \widehat{M}^U(\pi(g)),$$

denn es ist $\{x+g \mid x \in X\} = X+\pi(g)$ für jede Nebenklasse $X \in H/U$. Die Isomorphie ist eine natürliche Isomorphie von H/U-graduierten $\widehat{R}^U$-Moduln. $\square$

Aus dieser Eigenschaft folgt zum Beispiel: Für alle M, $N \in \mathrm{Mod}^H_{U\gg}(R)$ gilt

$$M \sim_H N \implies \widehat{M}^U \sim_{H/U} \widehat{N}^U.$$

Mit $\mathrm{CM}^{H/U}(\widehat{R}^U) = \mathrm{CM}^{H/U}_{\widehat{K}^U}(\widehat{R}^U)$ wird die volle Unterkategorie derjenigen Moduln in $\mathrm{mod}^{H/U}(\widehat{R}^U)$ bezeichnet, die graduiert frei über $\widehat{K}^U$ sind. Die Potenzreihenalgebra $k[[X_1,\dots,X_d]]$ läßt sich H/U-graduieren (für jedes $X \in H/U$ ist

$$\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in\mathbb{N}_0^d} \beta_{(\alpha_1,\dots,\alpha_d)} X_1^{\alpha_1}\cdots X_d^{\alpha_d} \in k[[X_1,\dots,X_d]]_X$$

genau dann, wenn $\beta_{(\alpha_1,\dots,\alpha_d)} \neq 0$ nur für $\sum \alpha_i \operatorname{grad} X_i \in X$ gilt), und die H/U-graduierten k-Algebren $\widehat{K}^U$ und $k[[X_1,\dots,X_d]]$ sind isomorph. Durch Einschränkung erhält man den Komplettierungsfunktor

$$\widehat{\cdot}^U : \mathrm{CM}^H(R) \longrightarrow \mathrm{CM}^{H/U}(\widehat{R}^U).$$

Wegen $U \simeq \mathbb{Z}$ kann man kanonisch (d.h. wie im Fall $U = \mathbb{Z}$) den Funktor

$$\widehat{\cdot} : \mathrm{CM}^U(S) \longrightarrow \mathrm{CM}(\widehat{S})$$

für eine U-graduierte Cohen-Macaulay Algebra S definieren. Offenbar hat dieser Funktor dieselben Eigenschaften wie der in den vorangegangenen Kapiteln. Die Vervollständigung entlang U wird nun auf diesen Funktor zurückgeführt.

(18.3) Satz: *Sei $S = \bigoplus S_u$ die durch*

$$S_u = \begin{pmatrix} R_u & R_{(h_1-h_2)+u} & \cdots & R_{(h_1-h_t)+u} \\ R_{(h_2-h_1)+u} & R_u & \cdots & R_{(h_2-h_t)+u} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{(h_t-h_1)+u} & R_{(h_t-h_2)+u} & \cdots & R_u \end{pmatrix}$$

definierte U-graduierte Matrix-Algebra. Es gibt eine Äquivalenz

$$\Phi : \mathrm{CM}^{H/U}_{\widehat{K}^U}(\widehat{R}^U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CM}_{\widehat{K'}}(\widehat{S}),$$

so daß mit der Äquivalenz

$$\Psi : \mathrm{CM}_K^H(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CM}_{K'}^U(S)$$

aus (18.1) *gilt*: *Es kommutiert das Diagramm von Funktoren*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CM}^H(R) \arrow[r, "\widehat{\cdot}^U"] \arrow[d, "\Psi"'] & \mathrm{CM}^{H/U}(\widehat{R}^U) \arrow[d, "\Phi"] \\ \mathrm{CM}^U(S) \arrow[r, "\widehat{\cdot}"] & \mathrm{CM}(\widehat{S}). \end{tikzcd}$$

Beweis: Satz (17.4) liefert die Äquivalenz

$$\Phi : \mathrm{Mod}^{H/U}(\widehat{R}^U) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\widehat{S}).$$

Denn $(U + \{h_1\}, \ldots, U + \{h_t\})$ ist eine Transversale von 0 in H/U, und bildet man zu $\widehat{R}^U$ die Matrix-Algebra wie in (17.4), so ist diese dann zu $\widehat{S}$ isomorph.
Sei $M \in \mathrm{mod}^H(R)$. Dann gilt

$$\Phi(\widehat{M}^U) = \bigoplus_{X \in H/U} \prod_{x \in X} M_x \simeq \bigoplus_{i=1}^{t} \prod_{u \in U} M_{u+h_i} \simeq \prod_{u \in U} \bigoplus_{i=1}^{t} M_{u+h_i} = \widehat{\Psi(M)}.$$

Weil K endlich erzeugt frei als H-graduierter K'-Modul ist, ist $\widehat{K}^U$ endlich erzeugt frei als H/U-graduierter $\widehat{K'}$-Modul, wegen $\widehat{K'}^U = \widehat{K'}$. Dann folgt für $M \in \mathrm{mod}^{H/U}(\widehat{R}^U)$

$$M \in \mathrm{CM}^{H/U}(\widehat{R}^U) \iff \Phi(M) \in \mathrm{CM}(\widehat{S})$$

wie in (18.1) (benutze ein zu (4.2) analoges Resultat für Potenzreihenringe). □

R (bzw. $\widehat{R}^U$) hat *endlichen graduierten Cohen-Macaulay-Typ*, wenn es in $\mathrm{CM}^H(R)$ (bzw. $\mathrm{CM}^{H/U}(\widehat{R}^U)$) nur endlich viele Verschiebungsklassen bezüglich $\sim_H$ (bzw. $\sim_{H/U}$) gibt.

(18.4) Lemma: (1) *R hat genau dann endlichen graduierten Cohen-Macaulay-Typ, wenn es in* $\mathrm{CM}^H(R)$ *nur endliche viele unzerlegbare Moduln bis auf U-Verschiebung gibt.*
(2) *$\widehat{R}^U$ hat genau dann endlichen graduierten Cohen-Macaulay-Typ, wenn es bis auf Isomorphie nur endlich viele unzerlegbare Moduln in* $\mathrm{CM}^{H/U}(\widehat{R}^U)$ *gibt.*

Beweis: Folgt direkt aus der Endlichkeit einer Transversalen von U in H. □

Aus diesem Lemma folgt, daß die Äquivalenzen aus (18.3) mit endlichem graduierten Cohen-Macaulay-Typ verträglich sind:
R (bzw. $\widehat{R}^U$) hat genau dann endlichen graduierten Cohen-Macaulay-Typ, wenn S (bzw. $\widehat{S}$) endlichen (graduierten) Cohen-Macaulay-Typ hat.
Es sind nun alle Mittel bereitgestellt, die Ergebnisse der vorangegangen Kapitel zu verallgemeinern.

(18.5) Satz: *Der Komplettierungsfunktor*

$$\widehat{\cdot}^U : \mathrm{CM}^H(R) \longrightarrow \mathrm{CM}^{H/U}(\widehat{R}^U)$$

hat folgende Eigenschaften:
(1) $\widehat{\cdot}^U$ *ist exakt und treu.*
(2) $\widehat{\cdot}^U$ *bewahrt Unzerlegbarkeit und Auslander-Reiten-Folgen.*
(3) *Seien* $M,\ N \in \mathrm{CM}^H(R)$ *unzerlegbar. Dann gilt*

$$\widehat{M}^U \simeq \widehat{N}^U \iff M \sim_U N.$$

(4) *Wenn* $\widehat{R}^U$ *endlichen graduierten Cohen-Macaulay-Typ hat, so hat auch* R *endlichen graduierten Cohen-Macaulay-Typ, und* $\widehat{\cdot}^U$ *ist repräsentativ.*
(5) $M \in \mathrm{CM}^H(R)$ *ist genau dann projektiv (bzw.* $\mathrm{CM}^H(R)$*-injektiv), wenn* $\widehat{M}^U$ *projektiv (bzw.* $\mathrm{CM}^{H/U}(\widehat{R}^U)$*-injektiv) ist.*

Beweis: (18.3) liefert das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CM}^H(R) \arrow[r, "\widehat{\cdot}^U"] \arrow[d, "\Psi"'] & \mathrm{CM}^{H/U}(\widehat{R}^U) \arrow[d, "\Phi"] \\ \mathrm{CM}^U(S) \arrow[r, "\widehat{\cdot}"] & \mathrm{CM}(\widehat{S}). \end{tikzcd}$$

Die behaupteten Eigenschaften gelten für den Funktor

$$\widehat{\cdot} : \mathrm{CM}^U(S) \longrightarrow \mathrm{CM}(\widehat{S}).$$

Die Äquivalenzen sind mit Verschiebungen verträglich. Die Behauptungen folgen dann unmittelbar. Bei (1) beachte man, daß die Äquivalenzen Φ und Ψ Exaktheit von Folgen von Cohen-Macaulay Moduln bewahren. (5) folgt aus (5.9), (13.2) und per Dualität. Exemplarisch zeige ich (3) ausführlicher: Aus $M \sim_U N$ folgt $\widehat{M}^U \simeq \widehat{N}^U$ mit (18.2). Ist umgekehrt $\widehat{M}^U \simeq \widehat{N}^U$, so gilt

$$\widehat{\Psi(M)} \simeq \Phi(\widehat{M}^U) \simeq \Phi(\widehat{N}^U) \simeq \widehat{\Psi(N)}.$$

$\Psi(M)$ und $\Psi(N)$ sind unzerlegbar, also folgt $\Psi(M) \sim_U \Psi(N)$ aus (7.2). Dann ist aber $M \sim_U N$ (vgl. Bemerkung nach (17.4)). □

(18.6) Satz: *Der Komplettierungsfunktor* $\widehat{\cdot}^U : \mathrm{CM}^H(R) \longrightarrow \mathrm{CM}^{H/U}(\widehat{R}^U)$ *bewahrt minimal fast-aufspaltende Morphismen. Es gilt also:*
(1) *Sei* $g : B \longrightarrow C$ *ein minimal rechts-fast-aufspaltender Morphismus in* $\mathrm{CM}^H(R)$*. Dann ist* $\hat{g}^U : \widehat{B}^U \longrightarrow \widehat{C}^U$ *ein minimal rechts-fast-aufspaltender Morphismus in* $\mathrm{CM}^{H/U}(\widehat{R}^U)$.
(2) *Sei* $f : A \longrightarrow B$ *ein minimal links-fast-aufspaltender Morphismus in* $\mathrm{CM}^H(R)$*. Dann ist* $\hat{f}^U : \widehat{A}^U \longrightarrow \widehat{B}^U$ *ein minimal links-fast-aufspaltender Morphismus in* $\mathrm{CM}^{H/U}(\widehat{R}^U)$.

B e w e i s: (1) Nach (10.2) ist C unzerlegbar. Ist C nicht projektiv, so ist g ein Epimorphismus, weil z.B. eine projektive Hülle von C durch g faktorisiert. Es ist dann

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} g \longrightarrow B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Auslander-Reiten-Folge. Die Behauptung folgt somit aus (18.5)(2). Ist C projektiv, so folgt die Behauptung aus dem Fall $H = \mathbb{Z}$ (vgl. (13.11) und (13.12)) und aus (18.3).
(2) per Dualität. $\square$

$C \in \mathrm{CM}^{H/U}(\hat{R}^U)$ heißt *graduierbar*, falls es ein $M \in \mathrm{CM}^H(R)$ gibt mit $\widehat{M}^U \simeq C$. Die Auslander-Reiten-Köcher von $\mathrm{CM}^H(R)$ und $\mathrm{CM}^{H/U}(\hat{R}^U)$ werden wie in Paragraph 15 definiert.

(18.7) Korollar: *Es gelte: Die beiden Kategorien $\mathrm{CM}^H(R)$ und $\mathrm{CM}^{H/U}(\hat{R}^U)$ haben Auslander-Reiten-Folgen. Dann gilt:*
(1) *Der Komplettierungsfunktor $\widehat{\cdot}^U : \mathrm{CM}^H(R) \longrightarrow \mathrm{CM}^{H/U}(\hat{R}^U)$ bewahrt irreduzible Morphismen.*
(2) *Genau dann hat R endlichen graduierten Cohen-Macaulay-Typ, wenn $\hat{R}^U$ endlichen graduierten Cohen-Macaulay-Typ hat.*
(3) *Seien $M,\ N \in \mathrm{CM}^{H/U}(\hat{R}^U)$ unzerlegbar und $f : M \longrightarrow N$ irreduzibel. Dann ist M graduierbar, genau wenn N graduierbar ist.*
(4) *Für den Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(R)$ von $\mathrm{CM}^H(R)$ und den vollen Teilköcher $\hat{\Gamma}^U(R)$ des Auslander-Reiten-Köchers $\Gamma(\hat{R}^U)$ von $\mathrm{CM}^{H/U}(\hat{R}^U)$, der aus den graduierbaren Moduln besteht, gilt*

$$\Gamma(R)/S^U \simeq \hat{\Gamma}^U(R),$$

d.h. sind A und B unzerlegbar in $\mathrm{CM}^H(R)$, so gibt es einen irreduziblen Morphismus von $\widehat{A}^U$ nach $\widehat{B}^U$ genau dann, wenn es ein $u \in U$ und einen irreduziblen Morphismus von A nach $B(u)$ gibt, und es gelten die Formeln

$$r_{\widehat{A}^U \widehat{B}^U} = \sum_{u\in U} r_{A(u)B}, \quad s_{\widehat{A}^U \widehat{B}^U} = \sum_{u \in U} s_{AB(u)}.$$

Ist k algebraisch abgeschlossen, so induzieren der Funktor $\widehat{\cdot}^U$ und die Gruppe U eine Galois-Überlagerung $\Gamma(R) \longrightarrow \hat{\Gamma}^U(R)$.
(5) *R habe endlichen graduierten Cohen-Macaulay-Typ. Dann gilt*

$$\Gamma(R)/S^U \simeq \Gamma(\hat{R}^U).$$

Ist k algebraisch abgeschlossen, so induzieren der Funktor $\widehat{\cdot}^U$ und die Gruppe U eine Galois-Überlagerung $\Gamma(R) \longrightarrow \Gamma(\hat{R}^U)$. $\square$

Sei auch V eine unendliche zyklische Untergruppe von H, und es gelte $V \supset U$. Dann ist V/U endlich, und V hat genau dann endlichen Index in H, wenn dies für U gilt. Ist $f : U \longrightarrow \mathbb{Z}$ der Isomorphismus, bezüglich welchem eine Ordnung auf

U definiert wird (vgl. §16), so sei $g : V \longrightarrow \mathbb{Z}$ der durch $g(v) := f(nv)$ $(v \in V)$ definierte Isomorphismus, wobei $n = [V : U]$ ist. Wird bezüglich g eine Ordnung auf V definiert, so ist die hierdurch induzierte Ordnung auf der Untergruppe U gerade die via f erklärte Ordnung. Es folgt dann

$$K \in \mathrm{Mod}^H_{V\gg}(K) \iff K \in \mathrm{Mod}^H_{U\gg}(K).$$

Die nächste Aussage beschreibt den Zusammenhang zwischen der Vervollständigung entlang U und der Vervollständigung entlang V bezogen auf Auslander-Reiten-Köcher.

(18.8) Korollar: *Sei V eine Untergruppe von H mit $H \supset V \supset U$.*
(1) *Seien M und N unzerlegbar in $\mathrm{CM}^H(R)$. Dann gilt*

$$\widehat{M}^U \sim_{V/U} \widehat{N}^U \iff M \sim_V N.$$

(2) *Es gelte: $V \simeq \mathbb{Z}$, und es haben $\mathrm{CM}^H(R)$, $\mathrm{CM}^{H/U}(\widehat{R}^U)$ und $\mathrm{CM}^{H/V}(\widehat{R}^V)$ Auslander-Reiten-Folgen. Dann operiert V/U via Verschiebung frei auf $\widehat{\Gamma}^U(R)$, und es gilt*

$$\widehat{\Gamma}^V(R) \simeq \widehat{\Gamma}^U(R)/S^{V/U},$$

und wenn R endlichen graduierten Cohen-Macaulay-Typ hat

$$\Gamma(\widehat{R}^V) \simeq \Gamma(\widehat{R}^U)/S^{V/U}.$$

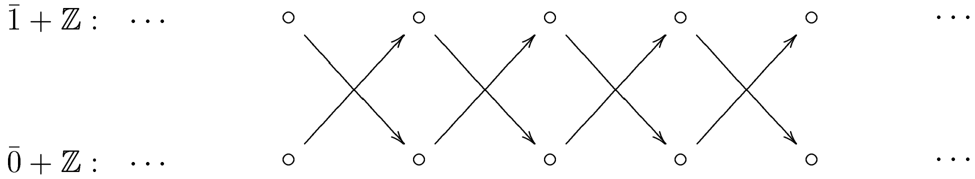
Beweis: (1) Gilt $\widehat{M}^U \sim_{V/U} \widehat{N}^U$, so gibt es ein $v \in V$ mit $\widehat{M}^U \simeq \widehat{N(v)}^U$; nach (18.5)(3) gilt $M \sim_U N(v)$, und damit $M \sim_V N$. Die Umkehrung folgt aus (18.2).
(2) Sei $M \in \mathrm{CM}^H(R)$, $M \neq 0$. Es sei $v \in V$ mit $\widehat{M}^U \simeq \widehat{M}^U(\bar{v})$, wobei $\bar{v}$ die Restklasse von $v \in V$ ist. Dann gibt es nach (18.5)(3) ein $u \in U$ mit $M \simeq M(u+v)$. Dann gilt aber $u + v = 0$, also $v \in U$, $\bar{v} = 0$. Also operiert V/U frei auf der Knotenmenge von $\widehat{\Gamma}^U(R)$.
Durch $[\widehat{M}^U]_{V/U} \mapsto [\widehat{M}^V]$ wird nach (1) und (18.5)(3) eine bijektive Abbildung von der Knotenmenge von $\widehat{\Gamma}^U(R)/S^{V/U}$ auf die Knotenmenge von $\widehat{\Gamma}^V(R)$ definiert. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Transversale von V/U in V. Dann gilt

$$r_{\widehat{A}^V \widehat{B}^V} = \sum_{v \in V} r_{A(v)B} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{u \in U} r_{A(v_i)(u)B} = \sum_{i=1}^{n} r_{\widehat{A}^U(\overline{v_i})\widehat{B}^U} = r_{[\widehat{A}^U]_{V/U}[\widehat{B}^U]_{V/U}},$$

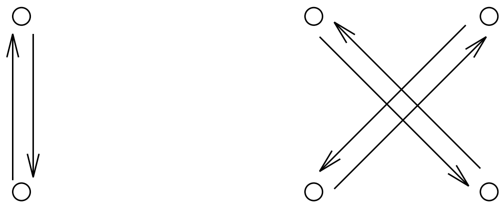
und ebenso folgt $s_{\widehat{A}^V \widehat{B}^V} = s_{[\widehat{A}^U]_{V/U}[\widehat{B}^U]_{V/U}}$. □

In der Situation von (18.8) induziert also bei algebraisch abgeschlossenem Körper die Zuordnung $[\widehat{M}^U] \mapsto [\widehat{M}^V]$ eine Galois-Überlagerung $\widehat{\Gamma}^U(R) \longrightarrow \widehat{\Gamma}^V(R)$ mit Gruppe V/U.

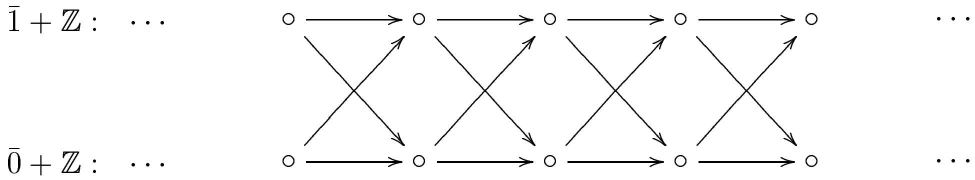
(18.9) Beispiele: (1) Sei $H = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$, $R = k[X]$, $\operatorname{grad} X = (\bar{1}, 1)$. Es hat $\Gamma(R)$ die Gestalt



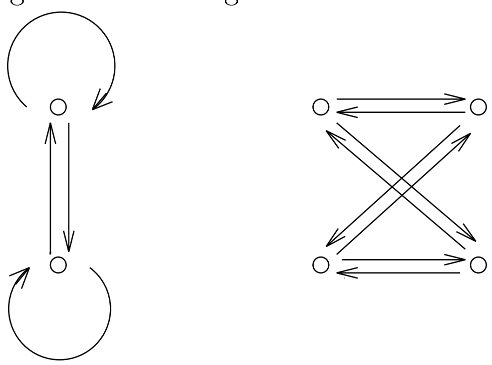
$\mathbb{Z}$ und $2\mathbb{Z}$ werden als Untergruppen von H aufgefaßt. Vervollständigung entlang $\mathbb{Z}$ bzw. entlang $2\mathbb{Z}$ liefert:



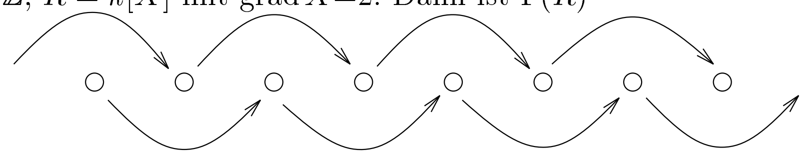
(2) Sei $H = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$, $R = k[X, Y]$ mit $\operatorname{grad} X = (\bar{1}, 1)$, $\operatorname{grad} Y = (\bar{0}, 1)$. $\Gamma(R)$ hat die Form



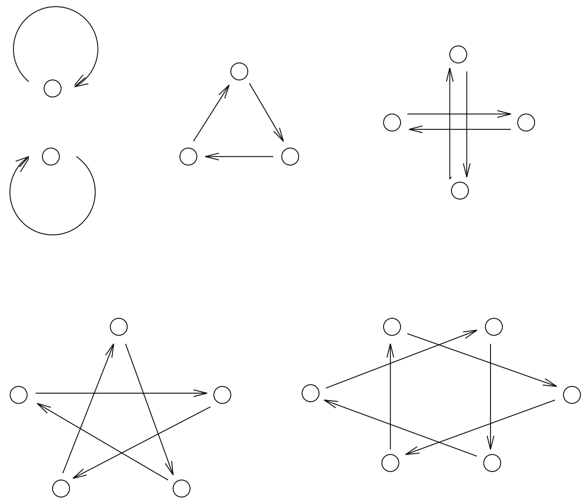
Vervollständigung entlang $\mathbb{Z}$ bzw. entlang $2\mathbb{Z}$ liefert:



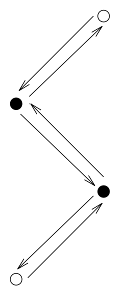
(3) Sei $H = \mathbb{Z}$, $R = k[X]$ mit $\operatorname{grad} X{=}2$. Dann ist $\Gamma(R)$



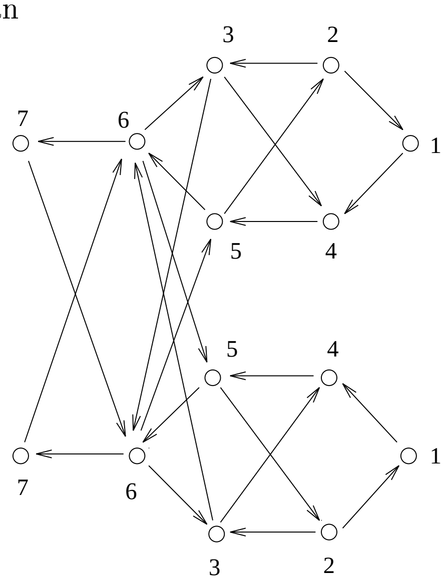
$\Gamma(\widehat{R}^{\mathbb{Z}})$ ist ein Punkt mit einer Schlaufe. $\Gamma(\widehat{R}^{2\mathbb{Z}}), \ldots, \Gamma(\widehat{R}^{6\mathbb{Z}})$ sind der Reihe nach



(4) Sei $R = k[X,Y]/(X^3+Y^2)$ das Beispiel aus der Einleitung, also mit $\operatorname{grad} X = 2$, $\operatorname{grad} Y = 3$, wobei k ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. Die Köcher $\Gamma(R)$ und $\Gamma(\widehat{R}^{\mathbb{Z}})$ sind in der Einleitung abgebildet. Vervollständigung entlang $2\mathbb{Z}$ liefert den Köcher $\Gamma(\widehat{R}^{2\mathbb{Z}})$:



(5) Sei $R = k[X,Y]/(X^3+Y^4)$ das Beispiel aus (15.6)(2), also mit $\operatorname{grad} X = 4$, $\operatorname{grad} Y = 3$, wobei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 ist. In (15.6) wird entlang $\mathbb{Z}$ vervollständigt. Wenn man stattdessen entlang $2\mathbb{Z}$ vervollständigt, so erhält man



□

Literaturverzeichnis

[1] F. W. Anderson, K. R. Fuller: *Rings and Categories of Modules. Second Edition*, GTM 13, Springer-Verlag (1992)

[2] M. Auslander: *Representation Theory of Artin Algebras I*, Communications in Algebra **1** (1974), 177-268

[3] M. Auslander: *Isolated Singularities and Existence of Almost Split Sequences*, Proc. ICRA IV, Springer Lecture Notes in Mathematics **1178** (1986), 194-242

[4] M. Auslander, R. O. Buchweitz: *The Homological Theory of Maximal Cohen-Macaulay Approximations*, Supplément au Bulletin de la Société Mathématique de France, Mémoire **38** (1989), 5-37

[5] M. Auslander, I. Reiten: *Representation Theory of Artin Algebras III*, Communications in Algebra **3** (1975), 239-294

[6] M. Auslander, I. Reiten: *Representation Theory of Artin Algebras IV*, Communications in Algebra **5** (1977), 443-518

[7] M. Auslander, I. Reiten: *Almost Split Sequences for Cohen-Macaulay-Modules*, Mathematische Annalen **277** (1987), 345-349

[8] M. Auslander, I. Reiten: *Cohen-Macaulay Modules for Graded Cohen-Macaulay Rings and their Completions*, Commutative Algebra, Proceedings of a Microprogram (Berkeley 1987), Springer-Verlag (1989), 21-31

[9] M. Auslander, I. Reiten: *The Cohen-Macaulay Type of Cohen-Macaulay Rings*, Advances in Mathematics **73** (1989), 1-23

[10] M. Auslander, I. Reiten: *Graded Modules and their Completions*, Banach Center Publications Vol. 26, Part 1 (1990), 181-192

[11] M. Auslander, S. O. Smalø: *Preprojective Modules over Artin Algebras*, Journal of Algebra **66** (1980), 61-122

[12] M. Auslander, S. O. Smalø: *Lattices over Orders: Finitely Presented Functors and Preprojective Partitions*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. **273**, Number 2 (1982), 433-446

[13] N. Bourbaki: *Commutative Algebra Ch. I-VII*, Springer-Verlag (1989)

[14] H. Cartan, S. Eilenberg: *Homological Algebra*, Princeton University Press (1956)

[15] E. Dieterich, A. Wiedemann: *The Auslander-Reiten Quiver of a Simple Curve Singularity*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. **294**, Number 2 (1986), 455-475

[16] P. Dowbor, W. Geigle, H. Lenzing: *Graded Sheaf Theory and Group Quotients with Applications to Representations of Finite Dimensional Algebras*, Arbeitsversion Dezember 1988

[17] P. Gabriel, A. V. Roiter, B. Keller: *Representations of Finite-Dimensional Algebras*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol. 73, Springer-Verlag (1992)

[18] T. Y. Lam: *A First Course in Noncommutative Rings*, GTM 131, Springer-Verlag (1991)

[19] H. Matsumura: *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press (1986)

[20] B. Mitchell: *Theory of Categories*, Academic Press (1965)

[21] C. Năstăsescu, F. Van Oystaeyen: *Graded Ring Theory*, North-Holland Publishing Company (1982)

[22] R. S. Pierce: *Associative Algebras*, GTM 88, Springer-Verlag (1982)

[23] N. Popescu: *Abelian Categories with Applications to Rings and Modules*, Academic Press (1973)

[24] D. Simson: *Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories*, Gordon and Breach Science Publishers (1992)

[25] Y. Yoshino: *Cohen-Macaulay Modules over Cohen-Macaulay Rings*, London Mathematical Society Lecture Notes Series **146**, Cambridge University Press (1990)