II. ÜBUNG ZUR TOPOLOGIE

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/Topologie/

6. Aufgabe: Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Wir schreiben aus drucktechnischen Gründen $\mathrm{cl}(A) = \overline{A}$ (engl. closure) und $\mathrm{int}(A) = A^\circ$ (engl. interior).

a) Man zeige:

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)))) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) \quad \text{und} \quad \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)))) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)).$$

b) Man zeige, dass im allgemeinen die Beziehungen $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))) = \mathrm{cl}(A)$ und $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))) = \mathrm{int}(A)$ *nicht* gelten. Welche Teilmengenbeziehungen bleiben erhalten?

7. Aufgabe: Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ die Projektion auf die erste Komponente. Man beweise oder widerlege:

a) Das Bild jeder abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist abgeschlossen.

b) Das Bild jeder offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist offen.

c) f ist stetig.

8. Aufgabe: Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume, sei $X = X_1 \times X_2$. Für $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in X$ sei

$$\begin{aligned} d^1(x, y) &\overset{def}{=} d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \\ d^\infty(x, y) &\overset{def}{=} \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}. \end{aligned}$$

Man zeige, dass d^1 und d^∞ Metriken auf X sind, und dass sie dieselbe Topologie auf X erzeugen.

9. Aufgabe: Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$, (x_n) eine Folge in X und $\mathcal{F}_{el}$ der zugehörige Elementarfilter. Man zeige, welche Implikationen zwischen den folgenden Aussagen gelten bzw. i. a. nicht gelten:

(i) x ist Häufungspunkt von (x_n).

(ii) x ist Häufungspunkt von $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(iii) x ist Berührpunkt von $\mathcal{F}_{el}$.

(iv) x ist Berührpunkt von $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

10. Aufgabe: Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^N$ heißt *Zariski-abgeschlossen*, wenn es eine geeignete Menge P von Polynomfunktionen $p\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$A = \bigcap_{p \in P} p^{-1}(0).$$

Eine Menge heißt *Zariski-offen*, wenn ihr Komplement Zariski-abgeschlossen ist. Man zeige

a) Das System der Zariski-offenen Mengen ist eine Topologie auf $\mathbb{R}^N$.

b) Jede Zariski-offene Menge in $\mathbb{R}^N$ ist offen (bzgl. der üblichen Topologie), d. h. die übliche Topologie auf $\mathbb{R}^N$ ist feiner als die Zariski-Topologie.

c) Im Fall $N = 1$ sind die Zariski-abgeschlossenen Mengen gerade die endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ selbst.