XI. ÜBUNG ZUR TOPOLOGIE

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/Topologie/

46. Aufgabe: Man überlege sich Beispiele von Funktoren (kovariante und kontravariante), die im bisherigen Studium schon vorgekommen sind.

47. Aufgabe: Gilt der Brouwersche Fixpunktsatz auch für die offene Einheitskreisscheibe?

48. Aufgabe: Man zeige, dass jeder Gruppenhomomorphismus $h\colon \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^1)$ ein induzierter Homomorphismus ist, also von der Form $h = f_*$ für eine stetige Abbildung $f\colon S^1 \to S^1$.

49. Aufgabe: Sei X ein topologischer Raum und A ein wegzusammenhängender Teilraum mit $x_0 \in A$. Sei $\iota\colon A \to X$ die Inklusionsabbildung.

a) Ist ι_* injektiv?

b) Man zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) Der induzierte Homomorphismus $\iota_*\colon \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ist surjektiv.

(2) Jeder Weg in X mit Anfangs- und Endpunkten in A is homotop (relativ $\{0, 1\}$) zu einem Weg in A.

50. Aufgabe: Für jeden Weg $h\colon [0,1] \to X$ von x_0 nach x_1 sei

$$\Phi_h\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1),\ [\gamma] \mapsto [\overline{h} * \gamma * h]$$

der Basiswechsel-Homomorphismus. Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Man zeige:

$$\Phi_{f\circ h} \circ f_* = f_* \circ \Phi_h,$$

d. h. das folgende Diagramm von Gruppenhomomorphismen kommutiert.

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\Phi_h} & \pi_1(X, x_1) \\
f_* \big\downarrow & & \big\downarrow f_* \\
\pi_1(Y, f(x_0)) & \xrightarrow{\Phi_{f\circ h}} & \pi_1(Y, f(x_1))
\end{array}$$