I. ÜBUNG ZUR TOPOLOGIE

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/Topologie/

1. Aufgabe: Sei X ein metrischer Raum.

a) Man zeige: Eine Menge $U \subseteq X$ ist offen genau dann, wenn jeder Punkt $x \in U$ in einer offenen Kugel $K_r(y)$ mit $K_r(y) \subseteq U$ liegt.

b) Man zeige, dass jede offene Kugel eine offene Menge ist.

c) Man zeige, dass jede abgeschlossene Kugel eine abgeschlossene Menge ist.

d) Sei $x \in X$. Man zeige, dass die offenen Kugeln $K_{1/n}(x)$ eine Umgebungsbasis von x bilden.

e) Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Man zeige, dass es offene Mengen U und V gibt mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

2. Aufgabe: Sei $X = \mathbb{R}$ mit der durch den Betrag induzierten Metrik.

a) Sei $A = \mathbb{Q}$ und $B = X \setminus A$. Man zeige: $A^\circ \cup B^\circ = \emptyset$ und $(A \cup B)^\circ = X$.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Man zeige, dass $A = [\,a, b\,[$ weder offen noch abgeschlossen ist.

3. Aufgabe: Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *metrisierbar*, wenn es eine Metrik d auf X gibt, so dass $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ die von d induzierte Topologie ist. Man gebe ein Beispiel für einen nicht-metrisierbaren topologischen Raum. (Hinweis: Aufgabe 1. (e).)

4. Aufgabe: Auf der Menge $C([0,\,1])$ der stetigen Funktionen $f\colon [0,\,1] \to \mathbb{R}$ seien die folgenden Metriken gegeben:

$$d(f,g) = \sup_{x \in [0,\,1]} |f(x) - g(x)|$$
$$e(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx$$

Man zeige, dass eine der Topologien $\mathcal{T}_d$ und $\mathcal{T}_e$ echt feiner als die andere ist.

5. Aufgabe: Sei $X = \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Man zeige, dass durch

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ ist endlich}\}$$

ein Filter auf $\mathbb{N}$ definiert ist. Man gebe eine möglichst einfache Filterbasis an.