

**VIII. ÜBUNG ZU RINGE und MODULN**

Abgabe: DO, 15. DEZEMBER 2005 in der Übung

[http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/Ringe\\_und\\_Moduln/](http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/Ringe_und_Moduln/)

**14. Aufgabe:** Sei  $J = \text{Rad}(A)$ , und  $M$  ein  $A$ -Modul. Man zeige (Lemma 3.2.1 verbessernd), dass  $MJ = \text{Rad}(M)$  gilt. 8 P.

HINWEIS:  $M/MJ$  ist ein  $A/J$ -Modul. Was ist dessen Radikal? Übung 4. (1).

**15. Aufgabe:** Sei  $I$  ein Rechtsideal in  $A$ . Sei  $M$  ein Modul und  $N$  ein Untermodul. Man zeige 4 P.

$$(M/N) \cdot I = (N + MI)/N.$$

**16. Aufgabe:** Man beweise folgende erweiterte Version vom Lemma von Nakayama:

Sei  $I \subset A$  ein Rechtsideal. Dann sind äquivalent:

- (i)  $I \subset \text{Rad}(A)$ .
- (ii) Für jeden (endlich erzeugten)  $A$ -Modul  $M$  gilt: Aus  $MI = M$  folgt  $M = 0$ .
- (iii) Für jeden (endlich erzeugten)  $A$ -Modul  $M$  gilt: Ist  $N \subset M$  ein Untermodul mit  $N + MI = M$ , dann gilt  $N = M$ .

8 P.