VIII. ÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Abgabe: bis Mi, 10. Juni 2009, 11:00 Uhr in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-2/

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar. Es bezeichnet K immer einen Körper.

1. Aufgabe: Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Man zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) f ist trigonalisierbar.

(b) Es gibt eine aufsteigende Kette

$$\{0\} = U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_{n-1} \subseteq U_n = V$$

von f-invarianten Unterräumen U_i mit $\dim(U_i) = i$ für alle $i = 0, \ldots, n$.

2. Aufgabe: Sei $A \in \mathrm{M}(4;\mathbb{R})$ die Matrix aus Aufgabe V.1. Man berechne ein $P \in \mathrm{GL}(4;\mathbb{R})$, so dass $P^{-1}AP$ eine Jordanmatrix ist.

3. Aufgabe: Die Jordan-Zerlegung (Satz 23.19) gilt umformuliert auch für (trigonalisierbare) Matrizen A: $A = D + N$ mit D diagonalisierbar, N nilpotent und $DN = ND$.

(a) Beschreiben Sie, wie die Jordan-Zerlegung für eine Jordan-Matrix $J \in \mathrm{M}(n;K)$ aussieht.

(b) Leiten Sie aus (a) ab, wie man die Jordan-Zerlegung einer trigonalisierbaren Matrix A erhält.

(c) Bestimmen Sie (konkret) die Jordan-Zerlegung für die Matrix A aus Aufgabe 2. (bzw. V.1).

(d) Bestimmen Sie die Jordan-Zerlegung für die Matrix A aus Aufgabe VII.1. (Vgl. auch Musterlösung von VII.1.)

4. Aufgabe: Sei $A \in \mathrm{M}(n;K)$, sei $\lambda \in K$. Man zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) A ist ähnlich zu $J_n(\lambda)$.

(b) A ist ähnlich zur Begleitmatrix (vgl. 21.7/21.8) von $(T-\lambda)^n$.

(Hinweis: Der binomische Lehrsatz gilt auch in $K[T]$.)

5. Aufgabe: Sei f ein trigonalisierbarer Endomorphismus mit Jordanscher Normalform $J \in \mathrm{M}(n;K)$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von f. Man zeige: Für jedes $i \in \{1, \ldots, r\}$ und jedes $p \in \mathbb{N}$ ist die Anzahl der in J vorkommenden Jordankästchen der Form $J_p(\lambda_i)$ gegeben durch den Ausdruck

$$\operatorname{rang}\bigl((f-\lambda_i \cdot 1_V)^{p-1}\bigr) - 2\operatorname{rang}\bigl((f-\lambda_i \cdot 1_V)^{p}\bigr) + \operatorname{rang}\bigl((f-\lambda_i \cdot 1_V)^{p+1}\bigr).$$

(Hinweis: Young-Diagramm.)