III. Übung zur Linearen Algebra II

Abgabe: bis Mi, 6. Mai 2009, 11:00 Uhr in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-2/

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar. Es bezeichnet K immer einen Körper.

1. Aufgabe: Man zeige, dass für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n; K)$$

das charakteristische Polynom

$$\chi_A = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_1 T + a_0$$

ist.

2. Aufgabe: Man gebe eine quadratische Matrix A mit ganzzahligen Koeffizienten explizit an mit $\chi_A = T^2 + 1$. Außerdem:

(a) Sei $K = \mathbb{R}$. Man zeige: A ist nicht diagonalisierbar.

(b) Sei $K = \mathbb{C}$. Man zeige, dass A diagonalisierbar ist und bestimme $P \in \mathrm{GL}(2; \mathbb{C})$, so dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.

3. Aufgabe:

(a) Es habe $A \in \mathrm{M}(n; \mathbb{C})$ nur 0 als einzigen Eigenwert (in $\mathbb{C}$). Man zeige, dass A nilpotent ist (d. h. es gibt ein $p \in \mathbb{N}$ mit $A^p = 0$).

(b) Man zeige die Umkehrung der Aussage.

(c) Gilt (a) auch für $K = \mathbb{R}$ (statt $\mathbb{C}$)?

4. Aufgabe: Sei $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist beliebig oft differenzierbar}\}$. Sei $\varphi : V \to V$ die Abbildung $f \mapsto f'$ (erste Ableitung).

(a) Man zeige, dass V ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.

(b) Man bestimme alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ und bestimme für jedes solche λ eine Basis von $E(\varphi, \lambda)$.

5. Aufgabe: Seien

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{R}).$$

Man berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und (Basen der) Eigenräume von $A = B$ und $A = C$ und überprüfe, ob Diagonalisierbarkeit vorliegt. Im Falle der Diagonalisierbakeit bestimme man $P \in \mathrm{GL}(3; \mathbb{R})$, so dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.