XIII. ÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Abgabe: bis MI, 15. JULI 2009, 11:00 UHR in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-2/

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar.

1. Aufgabe: Sei $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R})$ symmetrisch. Man zeige die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(a) A ist positiv definit.

(b) Es gibt ein $B \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ mit $A = {}^tBB$.

2. Aufgabe: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 2/3 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 3/4 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4;\mathbb{R}).$$

Man zeige, dass A positiv definit ist.

3. Aufgabe:

(a) Man zeige, dass Komposition von affinen Abbildungen affin ist.

(b) Man zeige, dass eine affine Abbildung $f\colon K^n \to K^m$, gegeben durch $f(x) = Ax + b$, genau dann bijektiv ist, wenn $m = n$ und $A \in \mathrm{GL}(n;K)$ gilt. In dem Fall bestimme man f^{-1} und zeige, dass f^{-1} affin ist.

4. Aufgabe: Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Seien $A \in \mathrm{M}(m,n;K)$ und $b \in K^m$. Dann gilt (mit der vom Standardskalarprodukt auf K^m induzierten Norm):

(a) Das lineare Gleichungssystem $A^*Ax = A^*b$ ist lösbar.

(b) Sei $x_0 \in K^n$ eine Lösung des Systems in (a). Dann gilt für alle $x \in K^n$

$$\|Ax_0 - b\| \leq \|Ax - b\|.$$

Man mache sich klar, was das Ergebnis bedeutet.

5. Aufgabe: Sei
$$P(x,y) = 2x^2 + 6xy + 2y^2 + 6x + 8y - 1$$
und
$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid P(x,y) = 0 \right\}$$
die zugehörige ebene Quadrik. Man untersuche, welcher Typ von Quadrik hier vorliegt. Man führe dazu affine Koordinatentransformationen durch, so dass C in den neuen Koordinaten durch eine möglichst einfache Gleichung beschrieben wird (an der man den Typ abliest). (Vgl. das Vorgehen in 29.14.)