X. Übung zur Linearen Algebra II

Abgabe: bis Mi, 24. Juni 2009, 11:00 Uhr in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-2/

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar. Es bezeichnet K immer den Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

1. Aufgabe: Sei $(V, \langle - \mid - \rangle)$ ein K-Vektorraum mit Skalarprodukt und $e_1, \ldots, e_n$ eine Orthonormalbasis (ONB) von V. Man zeige: Für alle x, $y \in V$ gilt

(a) $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle e_i$.

(b) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x \mid e_i \rangle|^2$.

(c) $\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle \cdot \overline{\langle y \mid e_i \rangle}$.

(Bemerkung: In der Formulierung von 25.13 in der Vorlesung wurde (im Fall $K = \mathbb{C}$) versehentlich die Konjugation vergessen.)

2. Aufgabe: Sei $(V, \langle - \mid - \rangle)$ ein K-Vektorraum mit Skalarprodukt. Seien U, $W \subseteq V$ Unterräume mit

(a) $V = U + W$, und

(b) $\langle U \mid W \rangle = 0$.

Man zeige: Es gilt $W = U^{\perp}$.

3. Aufgabe: Sei $(\mathbb{R}^4, (- \mid -))$ der vierdimensionale euklidische Raum mit dem Standardskalarprodukt. Sei U der Unterraum, der durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.

(a) Man bestimme eine ONB von U.

(b) Man bestimme eine ONB von V, die die ONB aus (a) enthält.

4. Aufgabe: Sei $(\mathbb{R}^4, (- \mid -))$ der vierdimensionale euklidische Raum mit dem Standardskalarprodukt. Sei U der Unterraum, der durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Man bestimme das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U. Man gebe für U und $U^\perp$ jeweils eine ONB an.

5. Aufgabe: Sei $(V, \langle - \mid - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum mit $n = \dim(V)$.

(a) Für $a \in V$ mit $a \neq 0$ definiere $s_a \colon V \to V$ durch

$$s_a(x) \overset{def}{=} x - 2 \cdot \frac{\langle x \mid a \rangle}{\langle a \mid a \rangle} \cdot a \qquad \text{für jedes } x \in V.$$

Man zeige

(i) $s_a \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ist eine orthogonale Abbildung.

(ii) $U_a \overset{def}{=} \{x \in V \mid s_a(x) = x\}$ ist ein $(n-1)$-dimensionaler Unterraum von V.

(iii) Es gilt $(s_a)^* = s_a$.

(b) Sei U ein $(n-1)$-dimensionaler Unterraum von V. Man zeige, dass ein $a \in V$, $a \neq 0$ existiert mit $U = U_a$.

(Bemerkung: Die orthogonalen Abbildungen s_a heißen Spiegelungen. Warum?)