IX. Übung zur Linearen Algebra I

Abgabe: bis Do, 18. Dez. 2008, 11:00 Uhr in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-1/

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar. Es bezeichnet K immer einen Körper.

1. Aufgabe: Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Man zeige, dass jedes Erzeugendensystem von V eine Basis von V enthält.

(Bemerkung: In Satz 9.11 wurde nur gezeigt, dass jedes *endliche* Erzeugendensystem eine Basis enthält. Hier soll dies auch für unendliche Erzeugendensysteme gezeigt werden.)

2. Aufgabe: Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Sei U ein Unterraum von V. Man zeige, dass es einen Unterraum U' von V gibt mit $V = U \oplus U'$. (Ist ein solcher Unterraum U' durch U eindeutig bestimmt?)

3. Aufgabe: Sei V ein K-Vektorraum. Seien $U_1, \ldots, U_m$ Unterräume von V. Für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ sei

$$U'_j \overset{def}{=} U_1 + \cdots + U_{j-1} + U_{j+1} + \cdots + U_m.$$

Man zeige:

(a) Genau dann gilt $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$, wenn $V = U_1 + \cdots + U_m$ und $U_j \cap U'_j = \{0_V\}$ gilt für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$.

(b) Sei V endlichdimensional. Genau dann gilt $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$, wenn $V = U_1 + \cdots + U_m$ und $\dim(V) = \dim(U_1) + \cdots + \dim(U_m)$ gilt.

4. Aufgabe: Seien

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}, \; a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \; a_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_6 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Seien $U_1 = \operatorname{Span}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ und $U_2 = \operatorname{Span}(a_5, a_6)$. Man bestimme für jeden der Unterräume

$$U_1, \; U_2, \; U_1 + U_2, \; U_1 \cap U_2$$

jeweils die Dimension und eine Basis.

5. Aufgabe: Seien

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5.$$

(a) Man zeige, dass a_1, a_2, a_3 linear unabhängig sind.

(b) Man bestimme geeignete i, $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mit $i \neq j$, so dass $\{a_1, a_2, a_3, e_i, e_j\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^5$ ist.