Lösungen zu Blatt 8

1. Aufgabe: Sei V ein K-Vektorraum und seien $x_1, \ldots, x_m \in V$ linear unabhängig. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$. Setze $x \overset{def}{=} \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot x_i$. Man zeige: $x - x_1,\ x - x_2, \ldots, x - x_m$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $\sum_{i=1}^m \alpha_i \neq 1$ gilt.

Lösung: Seien $\beta_1, \ldots, \beta_m \in K$ mit $\sum_{j=1}^m \beta_j(x - x_j) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{j=1}^m \beta_j(x - x_j) &\overset{(*)}{=} \left(\sum_{j=1}^m \beta_j\right) \cdot x - \sum_{j=1}^m \beta_j x_j \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \beta_j\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i\right) - \sum_{i=1}^m \beta_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\alpha_i \sum_{j=1}^m \beta_j - \beta_i\right) x_i. \end{aligned}$$

Da $x_1, \ldots, x_m$ linear unabhängig sind, folgt $\alpha_i \sum_{j=1}^m \beta_j = \beta_i$ für alle $i = 1, \ldots, m$. Summiert man über alle $i = 1, \ldots, m$ auf, so ergibt dies

$$\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m \beta_j\right) = \sum_{i=1}^m \beta_i.$$

1. Fall: Gilt nun $\sum_{i=1}^m \alpha_i \neq 1$, so folgt $\sum_{j=1}^m \beta_j = 0$. Aus Gleichheit $(*)$ folgt nun $\sum_{j=1}^m \beta_j x_j = 0$, und weil $x_1, \ldots, x_m$ linear unabhängig sind, folgt $\beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$, also sind $x - x_1, \ldots, x - x_m$ linear unabhängig.

2. Fall: Es gelte $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$. Wähle $\beta_j \overset{def}{=} \alpha_j$ für $j = 1, \ldots, m$. Dann besagt Gleichheit $(*)$, dass

$$\sum_{j=1}^m \beta_j(x - x_j) \overset{(*)}{=} x - \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j = 0$$

ist. Da aber nicht alle $\beta_j = 0$ sind, folgt die lineare Abhängigkeit von $x - x_1, \ldots, x - x_m$.

2. Aufgabe: Sei V ein K-Vektorraum. Seien $x_1, \ldots, x_m \in V$. Definiere $y_1, \ldots, y_m \in V$ durch

$$y_i \overset{def}{=} \sum_{j=1}^i x_j$$

für $i = 1, \ldots, m$. Man zeige:

(a) $\mathrm{Span}(x_1,\ x_2, \ldots, x_m) = \mathrm{Span}(y_1,\ y_2, \ldots, y_m)$.

(b) Genau dann sind $x_1, \ldots, x_m$ linear unabhängig, wenn $y_1, \ldots, y_m$ linear unabhängig sind.

Lösung: Per Induktion sieht man leicht, dass $x_1 = y_1$ und für jedes $j = 2, \ldots, m$

$$x_j = y_j - y_1$$

gilt.

(a) Sei $x \in \mathrm{Span}(x_1,\, x_2, \ldots, x_m)$. Dann gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ mit $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$. Es folgt mit der Vorbemerkung

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = \alpha_1 y_1 + \sum_{i=2}^m \alpha_i (y_i - y_1) \\ &= (\alpha_1 - \sum_{i=2}^m \alpha_i) y_1 + \sum_{i=2}^m \alpha_i y_i \in \mathrm{Span}(y_1,\, y_2, \ldots, y_m). \end{aligned}$$

Sei umgekehrt $y \in \mathrm{Span}(y_1,\, y_2, \ldots, y_m)$. Dann gibt es $\beta_1, \ldots, \beta_m \in K$ mit $y = \sum_{i=1}^m \beta_i y_i$. Es folgt

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^m \beta_i y_i = \sum_{i=1}^m \beta_i \sum_{j=1}^i x_j \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i \beta_i x_j \\ &\overset{\text{klar}}{=} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=j}^m \beta_i \right) x_j \in \mathrm{Span}(x_1,\, x_2, \ldots, x_m). \end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$: Seien $x_1, \ldots, x_m$ linear unabhängig. Seien $\beta_1, \ldots, \beta_m \in K$ mit $\sum_{i=1}^m \beta_i y_i = 0$. Nach der gerade durchgeführten Umrechnung bedeutet dies

$$\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=j}^m \beta_i \right) x_j = 0.$$

Da $x_1, \ldots, x_m$ linear unabhängig sind, folgt $\sum_{i=j}^m \beta_i = 0$ für alle $j = 1, \ldots .m$. Dies bedeutet also

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots + \beta_m &= 0 \\ \beta_2 + \beta_3 + \cdots + \beta_m &= 0 \\ \beta_3 + \cdots + \beta_m &= 0 \\ &\vdots \\ \beta_m &= 0 \end{aligned}$$

Wertet man dies sukzessive von unten nach oben aus, so erhält man der Reihe nach $\beta_m = 0,\ \beta_{m-1} = 0, \ldots, \beta_1 = 0$. Also sind $y_1, \ldots, y_m$ linear unabhängig.
$\Leftarrow$: Seien $y_1, \ldots, y_m$ linear unabhängig. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ mit $\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j = 0$. Mit der allerersten Vorbemerkung folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j \\ &= \alpha_1 y_1 + \sum_{j=2}^m \alpha_j (y_j - y_1) \\ &= (\alpha_1 - \sum_{i=2}^m \alpha_i) y_1 + \sum_{i=2}^m \alpha_i y_i. \end{aligned}$$

Weil $y_1, \ldots, y_m$ linear unabhängig sind, folgt $\alpha_1 - \sum_{i=2}^m \alpha_i = 0$, und $\alpha_j = 0$ für jedes $j = 2, \ldots, m$. Dann gilt aber auch $\alpha_1 = 0$. Damit sind $x_1,\, x_2, \ldots, x_m$ linear unabhängig.

3. Aufgabe: Seien

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Man untersuche, ob a_1, a_2, a_3, a_4 linear unabhängig sind.

(b) Man bestimme eine Basis des Unterraums $U \overset{def}{=} \operatorname{Span}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ von $\mathbb{R}^4$.

Lösung: Man bildet die Matrix

$$A = [a_1, a_2, a_3, a_4] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Der Gauß-Algorithmus liefert als zugehörige Treppenmatrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\operatorname{rang}(A) = 3 < 4$ gilt, folgt aus 9.10, dass a_1, a_2, a_3, a_4 linear abhängig sind. Da die charakteristischen Spaltenindizes durch $j(1) = 1$, $j(2) = 2$ und $j(3) = 3$ gegeben sind, folgt aus 9.10, dass $\{a_1, a_2, a_3\}$ eine Basis von $\operatorname{Span}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ ist.

4. Aufgabe: Seien

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Man zeige:

(a) a_1, a_2, a_3, a_4 sind linear unabhängig.

(b) $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$.

Lösung: (a) Man bildet die Matrix

$$A = [a_1, a_2, a_3, a_4] = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Der Gauß-Algorithmus liefert als zugehörige Treppenmatrix $T = E_4$, und daher ist $\operatorname{rang}(A) = 4$, und aus 9.10 folgt, dass a_1, a_2, a_3, a_4 linear unabhängig sind.

(b) Da $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ ist, folgt aus (a) und 9.18 (4), dass $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$, also insbesondere ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$ ist. (Andere – direktere – Lösungen sind möglich.)

5. Aufgabe: (Diese Aufgabe bezieht sich thematisch auf das Ende von Abschnitt 7 der Vorlesung.)

(a) Man zeige: Für jedes $A \in \mathrm{M}(m, n; K)$ gilt

$$\operatorname{rang}({}^tA) = \operatorname{rang}(A).$$

(Hinweis: Satz 7.23.)

(b) Man zeige: Für alle $A \in \mathrm{M}(m, n; K)$ und $B \in \mathrm{M}(n, p; K)$ gilt

$$\operatorname{rang}(A \cdot B) \leq \operatorname{rang}(A).$$

(Hinweis: Man zeige dies zunächst für eine Treppenmatrix A und führe dann den allgemeinen Fall darauf zurück.)

(c) Aus (a) und (b) folgere man: Für alle $A \in \mathrm{M}(m, n; K)$ und $B \in \mathrm{M}(n, p; K)$ gilt

$$\operatorname{rang}(A \cdot B) \leq \operatorname{rang}(B).$$

(d) Sei $A \in \mathrm{M}(n; K)$. Man folgere:

- Gibt es ein $B \in \mathrm{M}(n; K)$ mit $A \cdot B = E_n$, so ist A invertierbar, und es gilt $B = A^{-1}$.
- Gibt es ein $C \in \mathrm{M}(n; K)$ mit $C \cdot A = E_n$, so ist A invertierbar, und es gilt $C = A^{-1}$.

Lösung: (a) Sei $r = \operatorname{rang}(A)$. Nach 7.23 (bzw. Aufgabe VI.4) gibt es $P \in \mathrm{GL}(m; K)$ und $Q \in \mathrm{GL}(n; K)$ mit $PAQ = T_r \in \mathrm{M}(m, n; K)$ (T_r wie in 7.23 definiert). Es folgt dann

$${}^tQ{}^tA{}^tP = {}^t(PAQ) = {}^tT_r = T'_r,$$

wobei T'_r so wie T_r in 7.23 definiert ist, aber hier $T'_r \in \mathrm{M}(n, m; K)$. Da ${}^tQ$ und ${}^tP$ invertierbar sind, folgt

$$\operatorname{rang}(A) = r \overset{\text{klar}}{=} \operatorname{rang}(T'_r) \overset{7.23}{=} \operatorname{rang}({}^tA).$$

(b) Sei $r = \operatorname{rang}(A)$, sei $T \in \mathrm{M}(m, n; K)$ die zugehörige Treppenmatrix. Nach Definition einer Treppenmatrix gilt $T_{i\bullet} = 0$ (Nullzeile) für alle Zeilenindizes $i > r$. Dann gilt offenbar auch $(T \cdot B)_{i\bullet} = 0$ für alle $i > r$. (Man halte sich die Matrizenmultiplikation vor Augen.) Mit dieser Überlegung ergibt sich offenbar

$$\operatorname{rang}(T \cdot B) \leq \operatorname{rang}(T) = r. \tag{1}$$

Es gibt ein $P \in \mathrm{GL}(m; K)$ mit $T = PA$. Es folgt

$$\operatorname{rang}(AB) \overset{7.21(3)}{=} \operatorname{rang}(PAB) = \operatorname{rang}(TB) \overset{(1)}{\leq} \operatorname{rang}(T) = \operatorname{rang}(A).$$

(c) Es folgt

$$\operatorname{rang}(AB) \overset{(a)}{=} \operatorname{rang}{}^t(AB) = \operatorname{rang}({}^tB\,{}^tA) \overset{(b)}{\leq} \operatorname{rang}({}^tB) \overset{(a)}{=} \operatorname{rang}(B).$$

(d) Es seien A, $B \in \mathrm{M}(n; K)$. Es gelte $AB = E_n$. Es folgt

$$n = \operatorname{rang}(E_n) = \operatorname{rang}(AB) \overset{(b)}{\leq} \operatorname{rang}(A) \leq n,$$

also $\operatorname{rang}(A) = n$, und nach 7.24 ist A dann invertierbar. Es existiert also die zu A inverse Matrix A^{-1}. Aus $AB = E_n$ folgt dann weiter

$$A^{-1} = A^{-1}E_n = A^{-1}AB = B.$$

Die zweite Aussage in (d) folgt völlig analog; man benutzt dabei (c) statt (b).