VIII. ÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Abgabe: bis Do, 11. Dez. 2008, 11:00 Uhr in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-1/

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar. Es bezeichnet K immer einen Körper.

1. Aufgabe: Sei V ein K-Vektorraum und seien $x_1, \dots, x_m \in V$ linear unabhängig. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$. Setze $x \overset{def}{=} \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot x_i$. Man zeige: $x - x_1$, $x - x_2, \dots, x - x_m$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $\sum_{i=1}^m \alpha_i \neq 1$ gilt.

2. Aufgabe: Sei V ein K-Vektorraum. Seien $x_1, \dots, x_m \in V$. Definiere $y_1, \dots, y_m \in V$ durch

$$y_i \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{i} x_j$$

für $i = 1, \dots, m$. Man zeige:

(a) $\operatorname{Span}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \operatorname{Span}(y_1, y_2, \dots, y_m)$.

(b) Genau dann sind $x_1, \dots, x_m$ linear unabhängig, wenn $y_1, \dots, y_m$ linear unabhängig sind.

3. Aufgabe: Seien

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Man untersuche, ob a_1, a_2, a_3, a_4 linear unabhängig sind.

(b) Man bestimme eine Basis des Unterraums $U \overset{def}{=} \operatorname{Span}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ von $\mathbb{R}^4$.

4. Aufgabe: Seien

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Man zeige:

(a) $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ sind linear unabhängig.

(b) $\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$.

5. Aufgabe: (Diese Aufgabe bezieht sich thematisch auf das Ende von Abschnitt 7 der Vorlesung.)

(a) Man zeige: Für jedes $A \in \mathrm{M}(m, n; K)$ gilt

$$\mathrm{rang}({}^tA) = \mathrm{rang}(A).$$

(Hinweis: Satz 7.23.)

(b) Man zeige: Für alle $A \in \mathrm{M}(m, n; K)$ und $B \in \mathrm{M}(n, p; K)$ gilt

$$\mathrm{rang}(A \cdot B) \leq \mathrm{rang}(A).$$

(Hinweis: Man zeige dies zunächst für eine Treppenmatrix A und führe dann den allgemeinen Fall darauf zurück.)

(c) Aus (a) und (b) folgere man: Für alle $A \in \mathrm{M}(m, n; K)$ und $B \in \mathrm{M}(n, p; K)$ gilt

$$\mathrm{rang}(A \cdot B) \leq \mathrm{rang}(B).$$

(d) Sei $A \in \mathrm{M}(n; K)$. Man folgere:

- Gibt es ein $B \in \mathrm{M}(n; K)$ mit $A \cdot B = E_n$, so ist A invertierbar, und es gilt $B = A^{-1}$.
- Gibt es ein $C \in \mathrm{M}(n; K)$ mit $C \cdot A = E_n$, so ist A invertierbar, und es gilt $C = A^{-1}$.