VI. ÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Abgabe: bis DO, 27. NOV. 2008, 11:00 UHR in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-1/

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar.

1. Aufgabe: Man untersuche, ob die folgenden Matrizen in $\mathrm{M}(4;\mathbb{R})$ invertierbar sind und berechne ggfs. deren Inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe: Man ermittle die Treppenmatrix zu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4,6;\mathbb{R}).$$

3. Aufgabe: Seien A, $B \in \mathrm{M}(m,n;K)$. Man nennt A und B *äquivalent*, wenn es $P \in \mathrm{GL}(m;K)$ und $Q \in \mathrm{GL}(n;K)$ gibt mit $B = PAQ$; man schreibt dann $A \sim B$. Man zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathrm{M}(m,n;K)$ ist, d. h. für alle A, B, $C \in \mathrm{M}(m,n;K)$ gilt

(a) $A \sim A$. (Reflexivität)

(b) $A \sim B \quad \Rightarrow \quad B \sim A$. (Symmetrie)

(c) $A \sim B$ und $B \sim C \quad \Rightarrow \quad A \sim C$. (Transitivität)

4. Aufgabe: Sei $A \in \mathrm{M}(m,n;K)$ vom Rang $r = \mathrm{rang}(A)$. Man zeige: Es gibt $P \in \mathrm{GL}(m;K)$ und $Q \in \mathrm{GL}(n;K)$ mit

$$PAQ = T_r \stackrel{def}{=} \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0_{12} \\ \hline 0_{21} & 0_{22} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix},$$

mit $E_r \in \mathrm{M}(r;K)$ die Einheitsmatrix und den Nullmatrizen $0_{12} \in \mathrm{M}(r, n-r;K)$, $0_{21} \in \mathrm{M}(m-r, r;K)$, sowie $0_{22} \in \mathrm{M}(m-r, n-r;K)$ (d. h. in der Matrix auf der rechten Seiten befinden sich "diagonal" r Einsen, die restlichen Einträge sind $= 0$).

5. Aufgabe: Seien A, $B \in \mathrm{M}(m,n;K)$. Man zeige die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(a) $A \sim B$. (vgl. Aufgabe 3.)

(b) $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$.