V. ÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Abgabe: bis DO, 20. NOV. 2008, 11:00 UHR in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-1/

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar.

1. Aufgabe: Für alle x, $y \in \mathbb{C}$ sei

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -\overline{y} & \overline{x} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2;\mathbb{C}).$$

Man zeige, dass

$$G \overset{def}{=} \{A(x,y) \mid x,\, y \in \mathbb{C} \text{ mit } (x,y) \neq (0,0)\}$$

eine Untergruppe der Gruppe $\mathrm{GL}(2;\mathbb{C})$ ist. Ist G abelsch?

2. Aufgabe: Für $A = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{M}(n;K)$ definiere

$$\mathrm{sp}(A) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}.$$

Man zeige:

(a) Für alle A, $B \in \mathrm{M}(n;K)$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\mathrm{sp}(A+B) = \mathrm{sp}(A) + \mathrm{sp}(B),\ \ \mathrm{sp}(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \mathrm{sp}(A),\ \ \mathrm{sp}(AB) = \mathrm{sp}(BA).$$

(b) Für alle $A \in \mathrm{M}(n;K)$ und alle $P \in \mathrm{GL}(n;K)$ gilt

$$\mathrm{sp}(P^{-1}AP) = \mathrm{sp}(A).$$

3. Aufgabe:

(a) Sei $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \in \mathrm{M}(m,n;K)$, sei $x = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{M}(n,1;K)$. Man zeige

$$A \cdot x = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot a_j.$$

(b)* Sei $A \in \mathrm{M}(m,n;K)$. Sei $T \in \mathrm{M}(m,n;K)$ eine Treppenmatrix vom Rang r, und es gebe ein $P \in \mathrm{GL}(m;K)$ mit $T = PA$. Man zeige: Ist $r < n$, so gibt es ein $x \in \mathrm{M}(n,1;K)$ mit $x \neq 0$ und $A \cdot x = 0$. (Man überlege sich das zunächst für den Fall $A = T$ an einem konkreten Beispiel; man verwende auch (a).)

4. Aufgabe: Zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4; \mathbb{R})$$

bestimme man eine Matrix $P \in \mathrm{M}(4; \mathbb{R})$, die ein Produkt von Elementarmatrizen ist, und für die PA eine schwache Treppenmatrix ist. Man gebe den Rang sowie die charakteristischen Spaltenindizes von PA an.

5. Aufgabe: Zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{R})$$

bestimme man eine Matrix $P \in \mathrm{M}(3; \mathbb{R})$, die ein Produkt von Elementarmatrizen ist, und für die PA eine Treppenmatrix ist. Man zeige, dass A invertierbar ist und bestimme A^{-1}.