II. Übung zu Lineare Algebra I

Abgabe: bis Do, 30. Okt. 2008, 11:00 Uhr in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

`http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-1/`

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar.

1. Aufgabe:

1. Man zeige, dass die Komposition zweier bijektiver Abbildungen bijektiv ist, und zwar auf zwei verschiedene Weisen: Einmal in Termen von injektiv und surjektiv, das andere mal in Termen von Umkehrabbildungen.
2. Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. Man zeige (ebenso auf zwei Weisen), dass wenn $g \circ f$ und eine der Abbildungen f oder g bijektiv ist, auch die andere Abbildung bijektiv ist.

2. Aufgabe: Sei X eine Menge, die mindestens drei verschiedene Elemente x, y und z enthält. Man zeige, dass die Gruppe $S(X)$ nicht abelsch ist.

3. Aufgabe:

1. Sei G eine Gruppe. Seien a, $b \in G$ mit $ab \neq ba$. Man zeige, dass dann $a^{-1}b^{-1} \neq b^{-1}a^{-1}$ gilt.
2. Sei G eine Gruppe in der $a^2 = e$ gilt für jedes $a \in G$. Man zeige, dass G abelsch ist.

4. Aufgabe: Es sei $G = \{(a,b) \mid a,\, b \in \mathbb{Z}\}$. Für alle (a,b), $(a',b') \in G$ definiere

$$(a,b) * (a',b') \overset{def}{=} (a+a', (-1)^{a'} b + b').$$

1. Man zeige, dass G mit der so erklärten Verknüpfung eine Gruppe ist.
2. Man untersuche, ob G abelsch ist.
3. Man untersuche, ob $U_1 = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$, $U_2 = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ und $U_3 = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{Z}\}$ Untergruppen von G sind.

5. Aufgabe: Es sei G eine Gruppe, und U, $V \subseteq G$ seien Untergruppen. Man zeige, dass die Vereinigung $U \cup V$ genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn $U \subseteq V$ oder $V \subseteq U$ gilt.