XIV. ÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Abgabe: bis DO, 5. FEB. 2009, 11:00 UHR in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-1/

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar. Es bezeichnet K immer einen Körper und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.

1. Aufgabe: Man berechne (über $\mathbb{R}$)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

auf zwei verschiedene Weisen:

(a) mit der Leibniz-Formel;

(b) mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen.

Man vergleiche den Aufwand beider Methoden.

2. Aufgabe: Eine Transposition der Form $(k\ k+1) \in S_n$ (mit $k \in \{1, \dots, n-1\}$) heißt *Standardtransposition*. Man zeige, dass jedes $\sigma \in S_n$ sich als ein Produkt $\sigma = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_\ell$ mit *Standard*transpositionen $\tau_1, \dots, \tau_\ell$ schreiben lässt. (Hinweis: Was ist, wenn σ eine Transposition ist?)

3. Aufgabe: Man zerlege

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$$

in

(a) ein Produkt von Transpositionen;

(b) ein Produkt von Standardtranspositionen.

Man bestimme $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

4. Aufgabe: Sei $A = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{M}(n; K)$. Sei $B = (\beta_{ij})$ definiert durch $\beta_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$ für alle i, $j \in \{1, \dots, n\}$. Man zeige, dass $\det(B) = \det(A)$ gilt.

5. Aufgabe: Man berechne

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

möglichst schnell, ohne die Matrix umzuformen.