WINTERSEMESTER 2008/09 AUSGABE: 21. JAN. 2009

XIII. ÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Abgabe: bis DO, 29. JAN. 2009, 11:00 UHR in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

`http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-1/`

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar. Es bezeichnet K immer einen Körper und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.

1. Aufgabe: Man berechne (über $\mathbb{R}$)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Aufgabe: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Man zeige

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda + 2).$$

3. Aufgabe: Sei $A \in \mathrm{M}(n; K)$ von folgender Blockgestalt ("verallgemeinerte Dreiecksgestalt")

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & * & \dots & * \\ \hline 0 & A_2 & \dots & * \\ \hline 0 & 0 & \ddots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_s \end{array}\right),$$

wobei $A_1, A_2, \dots, A_s$ quadratische Matrizen sind. Man zeige:

$$|A| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_s|.$$

4. Aufgabe: Sei V ein K-Vektorraum von endlicher Dimension n. Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ zwei Basen von V. Sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Man zeige, dass für die Darstellungsmatrizen von f bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{B}'$ folgendes gilt:

$$|M_{\mathcal{B}}(f)| = |M_{\mathcal{B}'}(f)|.$$

5. Aufgabe:

(a) Man zeige, dass (D8) wie behauptet auch für *untere* Dreiecksmatrizen gilt.

(b) Sei $A \in \mathrm{M}(n; K)$. Man zeige:

$$|A| = |{}^tA|.$$