XII. ÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Abgabe: bis DO, 22. JAN. 2009, 11:00 UHR in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

`http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-1/`

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar. Es bezeichnet K immer einen Körper.

1. Aufgabe: Man untersuche das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ auf Lösbarkeit und bestimme gegebenenfalls die Lösungsmenge explizit:

$$\begin{array}{rrrrrcl} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & +x_5 & = & 0 \\ x_1 & & +x_3 & +x_4 & & = & 1 \\ & & +2x_3 & +2x_4 & +x_5 & = & 1 \\ x_1 & & & & +x_5 & = & 1 \end{array}$$

2. Aufgabe: Seien V und W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume mit Basen $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ von V und $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ von W. Sei $f\colon V \to W$ die lineare Abbildung mit

$$f(v_1) = 3w_1 + 2w_2 + w_3,\ f(v_2) = 4w_1 + 2w_2 + w_3 + w_4,\ f(v_3) = 3w_1 + 2w_2 + w_3,$$
$$f(v_4) = 2w_2 + w_3 + w_4 \text{ und } f(v_5) = 2w_2.$$

Sei $y = w_1 + 2w_2 \in W$. Man bestimme das Urbild $f^{-1}(y)$.

3. Aufgabe: Sei $A \in \mathrm{M}(n; K)$, sei $b \in K^n$. Man zeige: Genau dann ist A invertierbar, wenn das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in K^n$ hat. (Welche?)

4. Aufgabe:

(a) Seien a, b, $c \in \mathbb{R}$ nicht alle null, sei $d \in \mathbb{R}$. Man löse das lineare Gleichungssystem $ax+by+cz = d$. Was bedeutet die Lösungsmenge geometrisch im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$?

(b) Sei $L \subseteq \mathbb{R}^3$. Man zeige: L ist genau dann eine Gerade (d. h. es gibt v, $w \in \mathbb{R}^3$ mit $w \neq 0$ und $L = \{v + \lambda w \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$), wenn es eine Matrix $A \in \mathrm{M}(2, 3; \mathbb{R})$ vom Rang 2 und ein $b \in \mathbb{R}^2$ gibt, so dass $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = b\}$ gilt. Was bedeutet das geometrisch?

5. Aufgabe: Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4,5;\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Man löse das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

(b) Man bestimme (explizit) alle $c \in \mathbb{R}^4$, für die das lineare Gleichungssystem $Ax = c$ lösbar ist.

(c) Man gebe ein $d \in \mathbb{R}^4$ an, so dass das lineare Gleichungssystem $Ax = d$ nicht lösbar ist.