XI. ÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Abgabe: bis DO, 15. JAN. 2009, 11:00 UHR in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-1/

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar. Es bezeichnet K immer einen Körper.

1. Aufgabe: Seien

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix}5\\1\\0\\2\end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\ a_4 = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

gegeben. Sei $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$.

(a) Man zeige, dass $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit

$$f(a_1) = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},\ f(a_2) = \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix},\ f(a_3) = \begin{pmatrix}10\\-13\\-11\end{pmatrix},\ f(a_4) = \begin{pmatrix}-9\\18\\12\end{pmatrix}.$$

Man bestimme $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ und $f(e_4)$.

(c) Sei $\mathcal{C}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Man bestimmte $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}}(f)$ und $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$.

(d) Man ermittle eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$ und eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.

2. Aufgabe: Es seien

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix},\ b_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix}-2\\7\\6\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Man zeige, dass $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ Basen von $\mathbb{R}^3$ sind.

(b) Man bestimme $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$.

(c) Sei $x = 2a_1 + 9a_2 - 8a_3$. Man bestimme den Koordinatenvektor von x bzgl. $\mathcal{B}$.

3. Aufgabe:

(a) Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Es gelte $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(f)$. Man zeige, dass $\dim(V)$ gerade ist.

(b) Zu jedem $m \in \mathbb{N}_0$ gebe man einen K-Vektorraum V und eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$ an mit $\dim(V) = 2m$ und $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(f)$.

4. Aufgabe: Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildungen zwischen den endlichdimensionalen K-Vektorräumen V und W. Seien $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ Basen von V und $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ Basen von W. Man gebe zwei unterschiedliche Argumente dafür, dass die Matrizen $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ und $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f)$ denselben Rang haben.

5. Aufgabe: Sei

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f_1} & W_1 \\ \alpha \big\downarrow & & \big\downarrow \beta \\ V_2 & \xrightarrow{f_2} & W_2, \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm linearer Abbildungen zwischen K-Vektorräumen, wobei α und β Isomorphismen sind. Man zeige:

(a) $\mathrm{Kern}(f_1) \simeq \mathrm{Kern}(f_2)$ und $\mathrm{Bild}(f_1) \simeq \mathrm{Bild}(f_2)$.

(b) f_1 ist genau dann injektiv, wenn f_2 injektiv ist.

(c) f_1 ist genau dann surjektiv, wenn f_2 surjektiv ist.