

**IX. ÜBUNG zu GRUNDZÜGE der ALGEBRA**

Abgabe: MI, 20. DEZ. 2006, 11:00 UHR in den orangenen Kasten Nr. 8

<http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/GZ-Algebra/>

Bitte geben Sie außer Ihrem Namen auch **deutlich** die Übungsgruppe mit an.

**Klausurtermin:** Freitag, 9.2.2007, 16:00 - 19:00 Uhr im Hörsaal C1.

**26. Aufgabe:** Sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung 200. Man zeige, dass  $G$  einen Normalteiler hat, der verschieden ist von  $\{e\}$  und  $G$ . 8 P.

**27. Aufgabe:** a) Sei  $p$  eine Primzahl und  $G$  eine  $p$ -Gruppe, also  $|G| = p^n$ . Sei  $m$  ein Teiler der Ordnung von  $G$ . Man zeige:  $G$  hat eine Untergruppe der Ordnung  $m$ .

(HINWEIS: Induktion nach  $n$ . Man finde einen Normalteiler  $U$  der Ordnung  $p$ .)

b) Sei  $D_4$  die Diedergruppe vom Grad 4, also die Gruppe der Ordnung 8, die durch Erzeugende  $g$  und  $h$  gegeben ist mit Relationen  $g^4 = e = h^2$  und  $hgh^{-1} = g^3$ . Man zeige, dass die Elemente  $g^2$  und  $h$  jeweils eine Untergruppe der Ordnung 2 erzeugen, die nicht konjugiert zueinander sind. 10 P.

**28. Aufgabe:** Sei  $G$  eine endliche Gruppe der Ordnung  $n$ .

a) Man zeige: Sind alle Sylowgruppen von  $G$  Normalteiler, so ist  $G$  isomorph zum Produkt seiner Sylowgruppen.

(HINWEIS: Seien  $U$  und  $V$  nun  $p$ - bzw.  $q$ -Sylowgruppen von  $G$  ( $p \neq q$ ). Man zeige, dass  $uv = vu$  für alle  $u \in U$  und  $v \in V$  gilt. Ansonsten mag es leichter sein, zunächst den Spezialfall zu behandeln, dass es nur zwei verschiedene Primteiler von  $n$  gibt.)

b) Man beschreibe (bis auf Isomorphie) alle Gruppen von der Ordnung 1225. 12 P.

(GENERELLER TIPP zu a) und zu b): Man schaue auf vorherige Übungsblätter.)

## Literaturhinweise

Folgende kleine Liste stellt eine Auswahl an Algebra-Büchern dar, die als Ergänzung zur Vorlesung dienen können. Weder besteht ein Anspruch auf Vollständigkeit, noch kann man sagen, dass eines dieser Bücher perfekt zum Stoff der Vorlesung passt. Generell ist zu sagen, da die Algebra ein riesiges Gebiet innerhalb der Mathematik ist, dass die meisten Bücher sehr umfangreich sind. Die Vorlesung Grundzüge der Algebra behandelt nur einen sehr kleinen (aber grundlegenden) Ausschnitt. Daher sollte man sich nicht von der Fülle des Materials in solchen Büchern ablenken bzw. abschrecken lassen.

- S. Lang: Algebra.

In englischer Sprache. Gibt es in mehreren Auflagen (ältere bei Addison Wesley, neuere bei Springer) und ist immer umfangreicher geworden. Die erste Auflage ist aber mehr als ausreichend.

- M. Artin: Algebra.

Gibt es in englischer (Prentice Hall) und in deutscher Sprache (Birkhäuser).

- G. Scheja und U. Storch: Lehrbuch der Algebra. Teubner.

Mehrbändiges Werk.

- G. Wüstholz: Algebra. Vieweg.