# VIII. ÜBUNG zu GRUNDZÜGE der ALGEBRA

Abgabe: Mi, 13. Dez. 2006, 11:00 Uhr in den orangen Kasten Nr. **8**

`http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/GZ-Algebra/`

Bitte geben Sie außer Ihrem Namen auch **deutlich** die Übungsgruppe mit an.

**22. Aufgabe:** Sei $K$ ein Körper und $R$ die Teilmenge von $\mathrm{M}_4(K)$, die aus den Matrizen der Form $\begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ besteht, wobei $*$ für beliebige Elemente aus $K$ steht.

**a)** Man zeige: $R$ ist ein Unterring von $\mathrm{M}_4(K)$.

**b)** Ist $R$ nullteilerfrei?

**c)** Man finde drei Ideale $I_1$, $I_2$, $I_3$ in $R$ mit 8 P.

$$\{0\} \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq R.$$

**23. Aufgabe:** Sei $K$ ein Körper und $R$ ein vom Nullring verschiedener Ring, sei $\varphi : \mathrm{M}_n(K) \longrightarrow R$ ein Ringhomomorphismus, wobei $n \geq 2$ sei. Man zeige: $R$ ist nicht nullteilerfrei. 4 P.

**24. Aufgabe:** Sei $U$ eine Untergruppe von $G$, sei $M = G/U$ die Menge der Rechtsnebenklassen von $U$ in $G$. Durch $(u, gU) \mapsto ugU$ wird eine Aktion von $U$ auf der Menge $M$ erklärt.

**a)** Man zeige, dass $U$ Normalteiler in $G$ ist genau dann, wenn jede Bahn bei obiger Aktion nur aus einem Element besteht.

**b)** Sei $G$ eine endliche Gruppe, sei $p$ die kleinste Primzahl, die $|G|$ teilt. Man zeige, dass jede Untergruppe $U$ von $G$ vom Index $p$ ein Normalteiler ist. 10 P.

**25. Aufgabe:** Sei $X = \{1, 2, \ldots, 8\}$, sei $\sigma' \in S_8$ die Permutation mit $\sigma'(1) = 2$, $\sigma'(2) = 3$, $\sigma'(3) = 1$ und $\sigma'(i) = i$ für $i \geq 3$. Sei $\sigma = \sigma' \circ (4\ 5)$ und $\tau = (7\ 8)$, und sei $G$ die von den Permutationen $\sigma$ und $\tau$ erzeugte Untergruppe. Die Gruppe $G$ operiert in natürlicher Weise auf der Menge $X$.

**a)** Man zeige $G \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$.

**b)** Man berechne für jedes $x \in X$

1. die Bahn, die $x$ enthält;
2. die Standuntergruppe von $x$.

**c)** Man berechne für jedes Gruppenelement $g \in G$ die Menge $\mathrm{Fix}(g)$ der Fixpunkte, d. h. die $x \in X$ mit $g.x = x$.

**d)** Man verifiziere für diesen Fall die Formel 8 P.

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\operatorname{Fix}(g)|.$$