

**VII. ÜBUNG zu GRUNDZÜGE der ALGEBRA**

Abgabe: MI, 6. DEZ. 2006, 11:00 UHR in den orangen Kasten Nr. 8

<http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/GZ-Algebra/>

Bitte geben Sie außer Ihrem Namen auch **deutlich** die Übungsgruppe mit an.

**19. Aufgabe:** Sei  $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$  der Schiefkörper der Quaternionen.  
Seien

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt offenbar:  $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  bilden eine Basis des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $\mathbb{H}$ , und es gilt  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}$  und  $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$ .

a) Man zeige: Jedes  $x \in \mathbb{H}$  mit  $x \neq 0$  ist invertierbar in  $\mathbb{H}$ .

b) Sei  $\text{Im } \mathbb{H}$  der von  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  erzeugte Unterraum. Man zeige: Für alle  $x, y \in \text{Im } \mathbb{H}$  gilt  $x^2 \in \mathbb{R}\mathbf{1}$  und  $xy + yx \in \mathbb{R}\mathbf{1}$ . Man zeige auch:

$$\text{Im } \mathbb{H} = \{x \in \mathbb{H} \mid x^2 \in \mathbb{R}\mathbf{1} \text{ und } x \notin \mathbb{R}\mathbf{1} \setminus \{0\}\}.$$

c) Man zeige: Das Zentrum von  $\mathbb{H}$ , also die Menge  $\{x \in \mathbb{H} \mid xy = yx \text{ für alle } y \in \mathbb{H}\}$ , ist gerade  $\mathbb{R}\mathbf{1}$ . (HINWEIS: Man schreibe jedes Element in  $\mathbb{H}$  eindeutig in der Form  $\alpha\mathbf{1} + u$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $u \in \text{Im } \mathbb{H}$  und verwende Teil b.)

d) Man zeige: Für jedes  $a \in \mathbb{H}$ ,  $a \neq 0$ , ist  $h_a : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $h_a(x) = axa^{-1}$  ein Ringisomorphismus. Außerdem: Für  $a, b \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$  gilt  $h_a = h_b$  genau dann, wenn  $b^{-1}a \in \mathbb{R}\mathbf{1}$  gilt. 12 P.

**20. Aufgabe:** Sei  $S$  die Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Sei  $K$  die Menge aller  $2 \times 2$ -Matrizen  $A$  mit rationalen Einträgen, für die  $AS = SA$  gilt.

a) Mit der Matrizenaddition und -multiplikation ist  $K$  ein Körper. (Man beweise nur die Axiome, auf die es hier ankommt!)

b)  $K$  ist isomorph zu  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ . 6 P.

**21. Aufgabe:** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorraum über dem Körper  $K$  der Dimension  $n \geq 1$ , sei  $R$  der Endomorphismenring  $\text{End}_K(V)$ . Es wird in dieser Aufgabe gezeigt, dass  $R$  nur die trivialen Ideale  $\{0\}$  und  $R$  enthält. (Aber  $R$  ist kein Schiefkörper, falls  $n \geq 2$ .)

Sei  $I \subseteq R$  ein Ideal, welches nicht nur aus dem Nullelement besteht.

**a)** Man zeige: Sind  $v, w \in V \setminus \{0\}$ , so gibt es ein  $f \in I$  mit  $f(v) = w$ . (HINWEIS: Basisergänzungssatz (mehrfach).)

**b)** Sei  $b_1, \dots, b_n$  eine Basis von  $V$ . Man zeige: Zu jedem  $i \in \{1, \dots, n\}$  gibt es ein  $f_i \in I$  mit  $f_i(b_j) = \begin{cases} b_i & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$

**c)** Was ist  $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ ? Man zeige:  $I = R$ .

**d)** (Nur mündlich!) Man formuliere obige Beweisschritte matrizentheoretisch, also im Ring  $M_n(K)$ . 12 P.