XI. ÜBUNG zu GRUNDZÜGE der ALGEBRA

Abgabe: MI, 17. JAN. 2007, 11:00 UHR in den orangen Kasten Nr. **8**

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/GZ-Algebra/

Bitte geben Sie außer Ihrem Namen auch **deutlich** die Übungsgruppe mit an.

32. Aufgabe: Es soll gezeigt werden, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 144 gibt. Man nehme dazu im folgenden an, dass G einfach ist mit $|G| = 144$. Natürlich ist G dann nicht abelsch.

a) Man zeige: $\alpha(2) = 9$ und $\alpha(3) = 16$.

b) Man zeige: Es gibt zwei 3-Sylowgruppen P und Q von G, so dass $P \cap Q = T$ die Ordnung 3 hat.

c) Es sei $N(T)$ der Normalisator von T in G. (Also, $N(T) = \{g \in G \mid gTg^{-1} = T\}$.) Man zeige: $P \cup Q \subseteq N(T)$ und folgere $|N(T)| = 18$, 36, 72 oder 144.

d) Man schließe $|N(T)| = 144$ aus. (HINWEIS: Warum die Bezeichnung *Normalisator*?)

e) Man schließe $|N(T)| = 18$ aus. (HINWEIS: Wieviele 3-Sylowgruppen hat eine Gruppe der Ordnung 18?)

f) Man führe auch die Fälle $|N(T)| = 36, 72$ zum (gewünschten) Widerspruch. (HINWEIS: Man wende den Satz von Poincaré an.) 12 P.

33. Aufgabe: Sei $n \geq 5$. Es darf (und soll) verwendet werden, dass die Gruppe S_n ein triviales Zentrum hat (vgl. Übungen.)

a) Sei $\varphi : S_n \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ ein nicht-trivialer Gruppenhomomorphismus. Man zeige: $\varphi = \text{sgn}$ (Signatur). (HINWEIS: Man betrachte die Einschränkung $\varphi_{|A_n} : A_n \longrightarrow \mathbb{Z}_2$.)

b) Man zeige: Die einzige Untergruppe in S_n vom Index 2 ist die A_n. (HINWEIS: Gelte $[S_n : U] = 2$. Man betrachte $\nu : S_n \longrightarrow S_n/U,\ \sigma \mapsto U\sigma$.)

c) Man zeige: Die einzigen Normalteiler in S_n sind $\{1\}$, S_n und A_n. (HINWEIS: Sei N Normalteiler in S_n. Man betrachte $N \cap A_n$.) 10 P.

34. Aufgabe: Wir betrachten die alternierende Gruppe A_4 (der Ordnung 12), und die natürliche Aktion von A_4 auf der Menge $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Man zeige, dass die Standuntergruppen $\mathrm{St}(x)$ gerade die vier Untergruppen von A_4 der Ordnung 3 sind.

b) Man zeige, dass A_4 keine Untergruppe der Ordnung 6 besitzt. (Hinweis: Eine solche wäre Normalteiler und enthielte eine Untergruppe der Ordnung 3. Verwende Teil a).) 8 P.