

I. ÜBUNG ZUR DARSTELLUNGSTHEORIE

Abgabe: DO, 13. APRIL 2006 in der Vorlesung

<http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/Darstellungstheorie/>

1. Aufgabe: Sei $Q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ eine ganzzahlige quadratische Form, die positiv semidefinit ist. Sei $x \in \mathbb{Z}^n$. Man zeige

a) $Q(x) = 0 \Leftrightarrow (x | y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{Z}^n$.

(HINWEIS: Betrachte $\alpha x + y$ für alle $\alpha \in \mathbb{Z}$.)

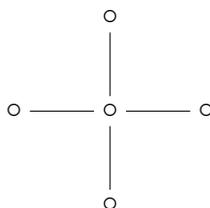
b) Gilt $Q(y) = 0$, und ist x eine Wurzel von Q , so ist auch $x + y$ eine Wurzel von Q . 10 P.

2. Aufgabe: Sei K_i der Graph, der zwei Punkte 1 und 2 mit einer i -fachen Kante verbindet.

a) Man zeige: Q_{K_1} ist positiv definit, Q_{K_2} ist positiv semidefinit, aber nicht positiv definit, Q_{K_3} ist nicht positiv semidefinit.

b) Man bestimme alle Wurzeln und alle Radikalvektoren von Q_{K_1} und Q_{K_2} .

c) Man zeige, dass die zugehörige quadratische Form Q des Graphen $\widetilde{\mathbb{D}}_4$



positiv semidefinit, aber nicht positiv definit ist. (HINWEIS: Schreibe Q als Summe von Quadraten.) Man gebe unendlich viele Wurzeln an. (HINWEIS: Aufgabe 1.)

d) Sei Γ ein Graph mit Schleifen. Man zeige, dass Q_Γ nicht positiv definit sein kann. 10 P.