Vorlesung Endlichdimensionale Algebren

Dirk Kussin

Email address: dirk@math.uni-paderborn.de

. Update: May 2025

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Grundlagen

1.1. Definition und Beispiele von Ringen

1.1.1. Ringe.

1.1.1. Unter einem Ring verstehen wir immer einen assoziativen Ring (d. h. + und $\cdot$ sind assoziativ) mit Einselement. Ein *Ring* ist eine Menge R mit zwei Verknüpfungen $+\colon R \times R \longrightarrow R$ ("Addition") und $\cdot\colon R \times R \longrightarrow R$ ("Multiplikation"), wobei $(R, +)$ eine abelsche Gruppe ist und $(R, \cdot)$ eine Halbgruppe mit Einselement 1_R (man sagt auch: Monoid). Ferner sind Addition und Multiplikation durch die Distributivgesetzte miteinander verbunden:

$$r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t,\ (r + s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t \quad \text{für alle } r,\, s,\, t \in R.$$

Hierbei hat man schon die Konvention verwendet, dass $\cdot$ stärker als + bindet, um Klammern zu sparen. Eine weitere Konvention ist, dass man häufig auch rs statt $r \cdot s$ schreibt. Ein Ring R heißt *kommutativ*, falls $rs = sr$ gilt für alle $r,\, s \in R$.

Bemerkung 1.1.2 (Monoide). Wie bereits oben angedeutet, ist für einen Ring R die multiplikative Struktur $(R, \cdot)$ eine Halbgruppe mit Einselement.

Eine Halbgruppe G mit neutralem Element e (häufig auch Einselement genannt), nennt man auch *Monoid*. *Halbgruppe* bedeutet, dass man eine Verknüpfung $\cdot\colon G \times G \longrightarrow G$, $(g, h) \mapsto g \cdot h = gh$ hat, die assoziativ ist.

Sind G und H Monoide, so ist eine Abbildung $f\colon G \longrightarrow H$ ein Monoidhomomorphismus, falls $f(gg') = f(g)f(g')$ für alle $g,\, g' \in G$ gilt und $f(e_G) = e_H$ gilt.

1.1.3. Beispiele für Ringe sind aus den ersten Semestern schon viele bekannt:

- Körper. Also insbesondere $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, endliche Körper, $\mathbb{C}(T)$, Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ wie $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ etc. Körper sind Beispiele für kommutative Ringe.
- Verzichtet man bei Körpern auf die Kommutativität (der Multiplikation), so hat man Schiefkörper (auch: Divisionsalgebren). Als Beispiel hat man den Schiefkörper der Hamiltonschen Quaternionen $\mathbb{H}$.
- Viele Ringe tauchen als Endomorphismenringe auf: Ist V ein K-Vektorraum (über dem Körper K); so ist $R = \mathrm{End}_K(V)$ ein Ring; dieser ist im allgemeinen nicht kommutativ. (Er ist genau dann kommutativ, wenn $\dim_K(V) = 1$ gilt.)
- Eng verknüpft mit vorherigem Beispiel sind die Matrizenringe: Ist K ein Körper, so ist $R = \mathrm{M}_n(K)$ (quadratische $n \times n$-Matrizen) ein Ring, der nur im Fall $n = 1$ kommutativ ist. Dies lässt sich verallgemeinern. Ist R ein Ring, so ist $M_n(R)$ ein Ring (wobei Matrizenaddition und -multiplikation wie über einem Körper definiert werden; man beachte, dass man in kanonischer Weise Skalare aus R von links und von rechts mit Matrizen multiplizieren kann).
- Polynomringe. Sei R ein Ring. Dann betrachtet man den Ring $R[X]$ der Polynome in einer Unbestimmten X. Hierbei soll $rX = Xr$ gelten für alle $r \in R$, d. h. X ist eine zentrale Unbestimmte.

- Eine weitere interessante Klasse von Ringen sind sogenannte Gruppenringe (oder allgemeiner, Monoidringe): Sei G eine Gruppe (oder etwas allgemeiner: ein Monoid) und sei R ein Ring. Sei
$$RG = \{\varphi\colon G \longrightarrow R \mid \varphi(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in G\}.$$
Man definiert Addition und Multiplikation durch $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ für alle $x \in G$ bzw.
$$(\varphi\psi)(x) = \sum_{y,\,z} \varphi(y)\psi(z),$$
wobei hier über alle Paare $(y, z) \in G \times G$ mit $yz = x$ summiert wird; nur endlich viele Summanden $\varphi(y)\psi(z)$ sind $\neq 0$. Es heißt RG die Gruppenalgebra von G über R (im allgemeinen Fall: Monoidalgebra). Man kann Elemente in RG auch als formale Summen $\sum_{x\in G} xa_x$ (mit Koeffizienten (auf der rechten Seite) $a_x \in R$, fast alle $= 0$; eine solche Summe ist eindeutig durch ihre Koeffizienten bestimmt) schreiben; für die Multiplikation gilt $(ya_y)(zb_z) = (yz)(a_y b_z)$. (Man formuliere Addition und Multiplikation in dieser Schreibweise.)
- Sind R und S Ringe, so ist auch das Produkt $R \times S$ mit komponentenweisen Verknüpfungen ein Ring mit Einselement $(1_R, 1_S)$.

Übung 1.1.4. Sei G ein Monoid und R ein Ring. Man zeige, dass RG mit der oben definierten Addition und Multiplikation ein Ring ist.

Viele weitere Beispiele von Ringen treten in der Analysis auf, etwa als Ringe von stetigen, von differenzierbaren oder von holomorphen Funktionen etc. auf.

1.1.2. Moduln.

1.1.5. In der Linearen Algebra studiert man Vektorräume und lineare Abbildungen über Körpern. Ähnliche mathematische Gegenstände betrachtet man über beliebigen Ringen. Dies führt zum Begriff eines Moduls: Ein R-Modul M ist eine Menge mit einer Verknüpfung $+\colon M \times M \longrightarrow M$, so dass $(M, +)$ eine abelsche Gruppe ist, und mit einer Abbildung $R \times M \longrightarrow M$, $(r, x) \mapsto rx$, so dass folgendes gilt:
$$(r + s)x = rx + sx,\ r(x + y) = rx + ry,\ (rs)x = r(sx),\ 1x = x$$
für alle $r, s \in R$, $x, y \in M$. Weil hier R von links auf M operiert, hat man genau genommen einen *R-Linksmodul* definiert. Analog definiert man *R-Rechtsmoduln*, mit einer Abbildung $M \times R \longrightarrow M$, $(x, r) \mapsto xr$ und den analogen Rechenregeln
$$x(r + s) = xr + xs,\ (x + y)r = xr + yr,\ x(rs) = (xr)s,\ x = x1$$

Oftmals ist es Geschmackssache, ob man Links- oder Rechtsmoduln betrachtet. (Über kommutativen Ringen spielt die Unterscheidung keine Rolle; daher spricht man dann meist nur von Moduln.) Es ist aber nicht richtig zu sagen, dass Links- und Rechtsmoduln dasselbe sind bzw. dass jeder Linksmodul auch ein Rechtsmodul (und umgekehrt) ist. Es ist aber richtig, dass die Theorie der Linksmoduln analog zur Theorie der Rechtsmoduln verläuft. Wir werden hier meist Rechtsmoduln betrachten, weil dies an einigen Stellen gewisse Vorteile hat.

Ist die Definition eines Moduls völlig analog zu der eines Vektorraums, gilt dies mitnichten für die Theorie der Moduln über einem Ring. Hauptunterschied ist, dass jeder Vektorraum über einem Körper (analog: über einem Schiefkörper) eine Basis besitzt. Dies ist über beliebigen Ringen nur sehr selten der Fall. In der Tat werden wir sehen, dass (Schief-) Körper dadurch ausgezeichnet sind, dass jeder Modul eine Basis besitzt.

Beispiel 1.1.6. Ein $\mathbb{Z}$-Modul ist nichts anderes als eine abelsche Gruppe.

1.1.7. Ist R ein Ring mit Multiplikation $\cdot$, so ist R^{op} ein Ring definiert mit $(R^{op}, +) = (R, +)$ und mit der Multiplikation $*$, wobei $r * s \overset{def}{=} s \cdot r$ für alle r, $s \in R$.

Übung 1.1.8. Man zeige, dass sich R-Rechtsmoduln und R^{op}-Linksmoduln entsprechen.

1.1.9 (Homomorphismen). Sei R ein Ring und seien M und N zwei R-Rechtsmoduln. Ein *Homomorphismus* (von R-Rechtsmoduln) ist eine Abbildung $f\colon M \longrightarrow N$ mit

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{für alle } x,\, y \in M$$

und

$$f(xr) = f(x)r \quad \text{für alle } r \in R,\ x \in M.$$

Häufig nennen wir solche Abbildungen auch (R-) *linear*. Es bezeichne $\mathrm{Hom}_R(M,N)$, oder $\mathrm{Hom}(M_R, N_R)$ die Menge aller R-linearen Abbildungen von M nach N.

1.1.10 (Bezeichnungen von speziellen Homomorphismen). Sei $f\colon M \longrightarrow N$ ein Homomorphismus von R-Rechtsmoduln. Dann heißt f

Endomorphismus		$M = N$
Monomorphismus		f injektiv
Epimorphismus	$\Leftrightarrow$	f surjektiv
Isomorphismus		f bijektiv
Automorphismus		$M = N$ und f bijektiv.

1.1.11. Die Menge aller Endomorphismen $\mathrm{End}_R(M)$ ist wieder ein Ring. Um zu betonen, dass M ein R-Rechtsmodul ist, schreibt man manchmal auch M_R. Analog, bei Linksmoduln ${}_RM$. Dann benutzt man auch die Schreibweise $\mathrm{End}(M_R)$ bzw. $\mathrm{End}({}_RM)$.

1.1.12. Insbesondere ist R selbst ein R-Rechtsmodul und gleichzeitig auch ein R-Linksmodul. Man hat Isomorphismen von Ringen

$$R \simeq \mathrm{End}(R_R) \quad \text{und} \quad R^{op} \simeq \mathrm{End}({}_RR),$$

(Dies ist einer der Gründe, warum wir hier Rechtsmoduln bevorzugen.) gegeben durch $r \mapsto \lambda_r$, wobei $\lambda_r(x) = rx$ die Linksmultiplikation mit r ist, bzw. $r \mapsto \rho_r$, wobei $\rho_r(x) = xr$ die Rechtsmultiplikation mit r ist.

1.1.3. Algebren.

1.1.13. Sei R ein kommutativer Ring. Ein Ring $(A, +, \cdot)$ heißt (assoziative) R-Algebra, falls es eine Abbildung $A \times R \longrightarrow A$, $(a, r) \mapsto ar$ gibt, so dass A ein R-Rechtsmodul ist und zusätzlich folgende Regeln gelten:

$$(ab)r = a(br) = (ar)b$$

für alle $r \in R$ und $a,\, b \in A$ gelten.

1.1.14. Jeder Ring A ist in natürlicher Weise eine $\mathbb{Z}$-Algebra: Für $n \in \mathbb{Z}$ und $a \in A$ sei

$$an = \begin{cases} a + \cdots + a \quad (n \text{ Summanden}) & n \geq 0 \\ (-a) + \ldots (-a) \quad (-n \text{ Summanden}) & n < 0 \end{cases}$$

Die Theorie der Ringe ist also nichts anderes als die Theorie der $\mathbb{Z}$-Algebren. Setzt man nichts weiter über den kommutativen Ring R voraus (oder nur sehr wenig), so ist also die Theorie der R-Algebren allgemeiner als die Theorie der Ringe. Andererseits ist man oftmals an R-Algebren für spezielle kommutative Ringe R interessiert. Der wichtigste Spezialfall ist hier, wenn $R = K$ ein Körper ist. Gilt $\dim_K(A) < \infty$, so heißt die Algebra A endlichdimensional.

Beispiel 1.1.15. (1) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann ist $\mathrm{End}_K(V)$ eine K-Algebra.

(2) Allgemeiner: Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Rechtsmodul. Dann ist $\mathrm{End}(M_R)$ eine R-Algebra.

(3) Sei R ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra. Dann ist $\mathrm{M}_n(A)$ eine R-Algebra.

(4) Sind A und B zwei R-Algebren, so auch deren Produkt $A \times B$.

Übung 1.1.16. Sei R ein kommutativer Ring, A eine R-Algebra und G ein Monoid. Dann ist AG eine K-Algebra.

1.1.17 (Ring- und Algebrenhomomorphismen). Seien A und B Ringe. Eine Abbildung $f\colon A \longrightarrow B$ heißt Ringhomomorphismus, falls für alle x, $y \in A$ gilt

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

sowie

$$f(1_A) = 1_B.$$

Mit anderen Worten: Bezüglich $+$ ist f ein Gruppenhomomorphismus, bezüglich $\cdot$ ist f ein Monoidhomomorphismus. Sind A und B Algebren über dem kommutativen Ring R und ist f zusätzlich ein Homomorphismus von R-Moduln, so heißt f ein (R-) Algebrenhomomorphismus. Ist $R = \mathbb{Z}$, so ist ein Algebrenhomomorphismus nichts anderes als ein Ringhomomorphismus.

Beispiel 1.1.18. Sei A eine R-Algebra. Dann ist $R \longrightarrow A$, $r \mapsto 1_A r$ ein Ringhomomorphismus (sogar ein R-Algebrenhomomorphismus), dessen Bild im Zentrum von A landet. Umgekehrt liefert ein solcher Ringhomomorphismus (A ein Ring), eine R-Algebrenstruktur auf A.

Beispiel 1.1.19. Sei A eine R-Algebra und G ein Monoid mit Einselement e. Für $a \in A$ und $x \in G$ definiere $\sigma(a)(x) = a\delta_{ex}$ (wobei e das Einselement von G ist) und $\xi(x)(y) = \delta_{xy}$. Dies ergibt einen injektiven Algebrenhomomorphismus $\sigma\colon A \longrightarrow AG$ und einen injektiven Monoidhomomorphismus $\xi\colon G \longrightarrow AG$.

In der Summenschreibweise: $\sigma(a) = ea$ und $\xi(x) = x1$.

1.1.20. Links- und Rechtsmoduln über einer R-Algebra A sind genau wie für den Ring A definiert. Ein A-Rechtsmodul M ist automatisch auch ein R-Modul durch $xr \stackrel{def}{=} x(1_A r)$ (für alle $a \in R$ und alle $x \in M$).

1.1.21 (Darstellungen). Sei A eine R-Algebra (über dem kommutativen Ring R. Etwa: $R = K$ ein Körper.). Eine Darstellung von A ist ein R-Algebrenhomomorphismus

$$\varphi\colon A \longrightarrow \mathrm{End}_R(V) \tag{1.1.1}$$

für einen R-Modul (K-Vektorraum) V. Ist $R = K$ ein Körper, so heißt die Darstellung φ endlichdimensional, falls V_K endlichdimensional ist.

(Genau genommen hat man hier Rechts-Darstellungen definiert.)

Darstellungen von A^{op} und A-Rechtsmoduln sind gleichwertige Konzepte:

Übung 1.1.22. Man zeige, dass jede Darstellung

$$\varphi\colon A^{op} \longrightarrow \mathrm{End}_R(V) \tag{1.1.2}$$

den R-Modul V in natürlicher Weise zu einen A-Rechtsmodul macht. Umgekehrt liefert jeder A-Rechtsmodul in natürlicher Weise eine Darstellung (1.1.2).

Die Darstellungstheorie endlichdimensionaler Algebren untersucht die Moduln über einer endlichdimensionalen Algebra. Das Konzept der Gruppenalgebra verbindet Darstellungstheorie von Gruppen mit der Dartsellungstheorie endlichdimensionaler Algebren.

Um in dieser Vorlesung nicht ständig zwischen den Begriffen “Ring” und “Algebra” hin- und herzuspringen, werden wir im folgenden immer R-Algebren betrachten, wobei R ein kommutativer Ring ist (was nicht jedesmal gesagt wird). Später werden wir uns der Einfachheit halber auf endlichdimensionale Algebren über einem Körper konzentrieren. Außerdem wird – wenn nichts anderes gesagt wird – das Wort “Modul” immer für “Rechtsmodul” verwendet.

1.2. Unter- und Faktormoduln

Wenn nichts anderes gesagt wird, ist R ein kommutativer Ring.

1.2.1. Sei A eine R-Algebra. Sei M ein A-Modul. Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt Untermodul, falls die A-Rechtssmodulstrukur von M eine solche auf U induziert. Man hat also folgendes zu verifizieren:

(U0) $U \neq \emptyset$ (gleichwertig: $0 \in U$).
(U1) $x, y \in U \;\Rightarrow\; x + y \in U$; kurz: $U + U \subseteq U$.
(U2) $a \in A$, $x \in U \;\Rightarrow\; xa \in U$; kurz: $U \cdot A \subseteq U$.

Beispiel 1.2.2. Sei $f\colon M \longrightarrow N$ ein Homomorphismus von Moduln. Dann ist

$$\operatorname{Kern}(f) = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$$

ein Untermodul von M.

Beispiel 1.2.3. Seien N und L Untermoduln des Moduls M. Dann ist $N \cap L$ ein Untermodul von M. Allgemeiner: Sind N_i Untermoduln von M für jedes $i \in I$, so ist auch $\cap_i N_i$ ein Untermodul von M.

1.2.4 (Faktormoduln). Sei A eine R-Algebra, M ein A-Modul und $U \subseteq M$ ein Untermodul. Sei

$$M/U = \{U + x \mid x \in M\}$$

die Menge alle Nebenklassen von U in M. Dies wird selbst wieder ein A-Rechtssmodul durch die Regeln

- $(U + x) + (U + y) \stackrel{def}{=} U + (x + y)$ $(x, y \in M)$.
- $(U + x)a \stackrel{def}{=} U + xa$ $(a \in A, x \in M)$.

Bemerkung: Man muss sich davon überzeugen, dass diese Festsetzungen *wohldefiniert* sind. Dies ist aber leicht.

Man bekommt einen kanonischen, surjektiven Homomorphismus $\pi\colon M \longrightarrow M/U$, $x \mapsto U + x$.

Satz 1.2.5 (Homomorphiesatz für Moduln). *Sei A eine R-Algebra, seien M und N Moduln und $f\colon M \longrightarrow N$ ein Homomorphismus. Sei U ein Untermodul mit $U \subseteq \operatorname{Kern}(f)$. Dann gibt es genau einen Homomorphismus $\overline{f}\colon M/U \longrightarrow N$ mit $\overline{f} \circ \pi = f$, wobei $\pi\colon M \longrightarrow M/U$ die kanonische Surjektion ist. Ferner gilt: $\overline{f}$ ist injektiv genau dann, wenn $U = \operatorname{Kern}(f)$ gilt.*

Beweis. Wie für Gruppen. Man definiert $\overline{f}(U + x) \stackrel{def}{=} f(x)$; dies ist wegen $U \subseteq \operatorname{Kern}(f)$ wohldefiniert. □

Übung 1.2.6 (Isomorphiesätze). (1) Ist $f\colon M \longrightarrow N$ ein Epimorphismus von A-Moduln, so gilt $M/\operatorname{Kern}(f) \simeq N$.
(2) Sind K und L Untermoduln von M mit $K \subseteq L$, dann gilt $(M/K)/(L/K) \simeq M/L$.
(3) Seien K und L Untermoduln von M, dann gilt $(L + K)/K \simeq L/(L \cap K)$.

Übung 1.2.7. Sei M ein Modul und N ein Untermodul. Man zeige, dass die Zuordnung $K \mapsto K/N$ eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der Untermoduln von M, die N enthalten, und der Menge der Untermoduln von M/N ergibt. Wie sieht die Umkehrabbildung aus?

1.3. Ideale und Faktoralgebren

Wenn nichts anderes gesagt wird, ist R ein kommutativer Ring.

1.3.1. Ideale.

1.3.1. Sei A eine R-Algebra. Sei I ein R-Untermodul des R-Moduls A. Dann heißt I ein *Rechtsideal*, falls $I \cdot A \subseteq I$ gilt, Linksideal, falls $R \cdot I \subseteq I$ gilt, und (zweiseitiges) Ideal, falls beides gilt.

Ein Rechtsideal ist also nichts anderes als ein A-Untermodul von A_A, ein Linksideal nichts anderes als ein A-Untermodul des A-Linksmoduls ${}_AA$.

Beispiel 1.3.2. (1) Sei $f\colon A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von R-Algebren. Dann ist der Kern

$$\mathrm{Kern}(f) = \{a \in R \mid f(a) = 0_B\}$$

ein (zweiseitiges) Ideal in A.

(2) Sei $a \in A$. Dann ist aA ein Rechtsideal, Aa ein Linksideal und AaA ein Ideal in A.

(3) Sei X eine Teilmenge von A. Dann ist

$$X \cdot A = \{\sum_{i=1}^{n} x_i a_i \mid n \geq 0,\, a_i \in A,\, x_i \in X\}$$

das kleinste A-Rechtsideal, welches X enthält. Eine analoge Konstruktion hat man für Linksideale.

1.3.2. Faktoralgebren.

1.3.3 (Faktoralgebren). Sei A eine R-Algebra und I ein (zweiseitiges) Ideal in A. Dann ist auf A/I (vgl. 1.2.4) in natürlicher Weise eine R-Algebrenstruktur definiert durch

$$(I + a) \cdot (I + b) \stackrel{def}{=} I + ab$$

für alle a, $b \in A$. Dies ist die Faktoralgebra von A modulo I.

Offenbar ist die kanonische Surjektion $\pi\colon A \longrightarrow A/I$, $a \mapsto I + a$ ein Homomorphismen von R-Algebren.

Satz 1.3.4 (Homomorphiesatz für Algebren). *Sei $f\colon A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von R-Algebren, sei I ein Ideal in A mit $I \subseteq \mathrm{Kern}(f)$. Dann gibt es genau einen Algebrenhomomorphismus $\overline{f}\colon A/I \longrightarrow B$ mit $\overline{f} \circ \pi = f$. Ferner gilt: $\overline{f}$ ist injektiv genau dann, wenn $I = \mathrm{Kern}(f)$ gilt.*

Beweis. Wie für Moduln, vgl. 1.2.5. □

Übung 1.3.5. Sei A eine Algebra und I ein Ideal in A. Man zeige, dass die Zuordnung $I' \mapsto I'/I$ eine Bijektion zwischen der Menge der Rechtsideale (bzw. Linksideale, bzw. Ideale) in A, die I enthalten, und der Menge der Rechtsideale (bzw. Linksideale, bzw. Ideale) in A/I induziert.

1.3.3. Annullatoren.

1.3.6. Sei M ein Modul über der Algebra A. Dann ist die Menge

$$\mathrm{Ann}(M) = \{a \in A \mid xa = 0 \text{ für alle } x \in M\}$$

ein Ideal in A und heißt der Annullator von M.

1.3.7. Sei M ein Modul über der Algebra A und sei I ein Ideal in A mit $I \subseteq \mathrm{Ann}(M)$. Dann ist auf M eine A/I-Modulstruktur definiert durch $x(I + a) \stackrel{def}{=} xa$ für alle $a \in A$ und $x \in M$. (Wegen $I \subseteq \mathrm{Ann}(M)$ ist dies wohldefiniert!)

Beispiel 1.3.8. Sei I ein Ideal in der Algebra A. Dann gilt $\mathrm{Ann}((A/I)_A) = I$.

Übung 1.3.9. Sei I ein Rechtsideal in der Algebra A. Dann ist $\mathrm{Ann}((A/I)_A)$ das größte (zweiseitige) Ideal K mit $K \subseteq I$.

Übung 1.3.10. Sei A eine R-Algebra, M ein A-Modul und I ein Ideal in A mit $I \subseteq \mathrm{Ann}_A(M)$. Man zeige, dass ein R-Untermodul von M ein A-Untermodul ist genau dann, wenn er ein A/I-Untermodul ist.

1.4. Einfache Moduln

1.4.1. Ein Modul S heißt *einfach*, falls er vom Nullmodul verschieden ist und als einzige Untermoduln 0 und S hat.

Bemerkung 1.4.2. Ein Modul $S \neq 0$ ist einfach genau dann, wenn 0 und S die einzigen Faktormoduln von S sind.

Beweis. Trivial. □

Beispiel 1.4.3. Ein Modul V_D über einem Schiefkörper D (also ein Vektorraum) ist einfach genau dann, wenn $\dim(V_D) = 1$ gilt, also genau dann, wenn $V \simeq D_D$ gilt. In dem Fall gilt $\mathrm{End}(V_D) \simeq D$.

Proposition 1.4.4 (Lemma von Schur). *Sei S ein einfacher Modul. Dann ist* $\mathrm{End}(S)$ *ein Schiefkörper.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass jeder Endomorphismus $f \neq 0$ von S ein Isomorphismus ist. Allgemeiner: □

Proposition 1.4.5. *Sei $f\colon S \longrightarrow S'$ ein Homomorphismus zwischen einfachen Moduln S und S'. Dann gilt $f = 0$, oder f ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Sei $f \neq 0$. Es ist $\mathrm{Kern}(f)$ ein Untermodul von S. Da S einfach ist und $f \neq 0$ folgt $\mathrm{Kern}(f) = 0$. Also ist f injektiv. Betrachtet man das Bild von f, so folgt analog die Surjektivität von f. □

1.5. Summen und Produkte

1.5.1 (Summe und innere direkte Summe). Sei M ein Modul und seien N und L Untermoduln. Dann ist die Summe

$$N + L = \{x + y \mid x \in N,\, y \in L\}$$

ein Untermodul von M. Die Summe heißt *direkt*, und man schreibt $N + L = N \oplus L$, falls zusätzlich $N \cap L = 0$ gilt, oder gleichbedeutend, falls jedes Element in $N + L$ *eindeutig* in der Form $x + y$ mit $x \in N$ und $y \in L$ schreibbar ist. (Man nennt $N + L$ auch "innere" direkte Summe.)

Allgemeiner kann man auch die Summe $\sum_{i\in I} N_i$ von einer Familie von Untermoduln N_i definieren; dies ist die Menge aller Summen $\sum_i x_i$, wobei fast alle $x_i = 0$ sind, also eine endliche Summe vorliegt.

1.5.2 (Direkte Summanden). Ein Untermodul N von M heißt *direkter Summand*, falls es einen Untermodul N' von M gibt mit $N \oplus N' = M$.

Achtung: Im Gegensatz zur Theorie der Vektorräume muss ein Untermodul kein direkter Summand sein!

Seien M und N Moduln. Etwas allgemeiner nennt man N auch einen direkten Summanden von M, falls es einen Modul N' gibt mit $N \oplus N' \simeq M$.

1.5.3 (Produkt und äußere direkte Summe). Sei I eine Indexmenge, und seien M_i Moduln für jedes $i \in I$. Dann ist das Produkt

$$\prod_{i\in I} M_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in M_i\}$$

ein Modul, wobei man komponentenweise rechnet. Es ist

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in M_i \text{ und } x_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I\}$$

ein Untermodul von $\prod_{i\in I} M_i$ und heisst die (äußere) direkte Summe der Moduln M_i. Offenbar gilt $\bigoplus_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i$ genau dann, wenn $M_i \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$ gilt. Insbesondere gilt also $M \oplus N = M \times N$ für Moduln M und N.

Für jedes $i \in I$ hat man kanonische Injektionen $j_i\colon M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i$ und auch $j_i\colon M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$, sowie kanonische Projektionen $p_i\colon \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow M_i$ und ebenfalls $p_i\colon \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_i$.

Satz 1.5.4 (Universelle Eigenschaft der direkten Summe). *Sei für jedes $i \in I$ ein Homomorphismus $f_i\colon M_i \longrightarrow N$ von Moduln gegeben. Dann gibt es genau einen Homomorphismus von Moduln $f\colon \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow N$ mit $f \circ j_i = f_i$ für jedes $i \in I$.*

Man schreibt auch $f = \bigoplus_{i\in I} f_i$.

Beweis. Definiere f durch

$$f\big((x_i)_i\big) \stackrel{def}{=} \sum_{i\in I} f_i(x_i)$$

für alle $(x_i)_i \in \bigoplus_{i\in I} M_i$. Da fast alle $x_i = 0$ sind, werden hier nur endlich viele Summanden $\neq 0$ aufsummiert. Man sieht sofort, dass hierdurch ein Homomorphismus mit den gewünschten Eigenschaften definiert wird. Aus der Eigenschaft $f \circ j_i = f_i$ für alle $i \in I$ folgt (zusammen mit der Homomorphie-Eigenschaft) sofort, dass man f auch so definieren muss. □

Satz 1.5.5 (Universelle Eigenschaft des Produkts). *Sei für jedes $i \in I$ ein Homomorphismus von Moduln $g_i\colon M \longrightarrow N_i$ gegeben. Dann gibt es genau einen Homomorphismus von Moduln $g\colon M \longrightarrow \prod_{i\in I} N_i$ mit $p_i \circ g = g_i$ für alle $i \in I$.*

Beweis. Man definiert g durch

$$g(x) = \big(g_i(x)\big)_{i\in I}$$

für jedes $x \in M$. □

1.5.6 (Innere und äußere direkte Summe). Seien N und L Untermoduln des Moduls M. Seien $i_N\colon N \longrightarrow M$ und $i_L\colon L \longrightarrow M$ die Inklusionsabbildungen. Dann ist M die innere direkte Summe von N und L, genau dann, wenn $i_N \oplus i_L\colon N \oplus L \longrightarrow M$ ein Isomorphismus ist.

Entsprechendes gilt für beliebige Indexmengen. Wir werden daher kaum noch zwischen äußeren und inneren direkten Summen unterscheiden.

1.6. Exakte Folgen

1.6.1. Eine Folge von zwei Homomorphismen

$$K \stackrel{f}{\longrightarrow} L \stackrel{g}{\longrightarrow} M$$

heißt *exakt* (in L), falls $\mathrm{Kern}(g) = \mathrm{Bild}(f)$ gilt. Eine (endliche oder unendliche) Folge von Homomorphismen

$$\cdots \longrightarrow M_{i-2} \stackrel{f_{i-2}}{\longrightarrow} M_{i-1} \stackrel{f_{i-1}}{\longrightarrow} M_i \stackrel{f_i}{\longrightarrow} M_{i+1} \stackrel{f_{i+1}}{\longrightarrow} M_{i+2} \longrightarrow \cdots$$

heißt *exakt*, wenn sie exakt in jedem M_i ist.

Beispiel 1.6.2. (1) $0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ ist exakt genau dann, wenn $M = 0$ ist.

(2) $0 \longrightarrow M \stackrel{f}{\longrightarrow} N$ ist exakt genau dann, wenn f ein Monomorphismus ist.

(3) $M \stackrel{g}{\longrightarrow} N \longrightarrow 0$ ist exakt genau dann, wenn g ein Epimorphismus ist.

(4) $0 \longrightarrow M \stackrel{f}{\longrightarrow} N \longrightarrow 0$ ist exakt genau dann, wenn f ein Isomorphismus ist.

(5) Eine exakte Folge der Form

$$0 \longrightarrow M \stackrel{f}{\longrightarrow} N \stackrel{g}{\longrightarrow} L \longrightarrow 0$$

nennt man auch *kurze exakte Folge*. Dies ist gleichbedeutend mit: f ist Monomorphismus, g ist Epimorphismus, und g induziert $N/f(M) \simeq L$. Insbesondere: Ist K ein Untermodul von M, so hat man eine kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\subset} M \xrightarrow{\pi} M/K \longrightarrow 0$$

1.6.3 (Aufspaltende Folgen). Eine kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

heißt *aufspaltend*, wenn folgende äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

(1) Es gibt $s \in \mathrm{Hom}(L, N)$ mit $g \circ s = 1_L$.
(2) Es gibt $r \in \mathrm{Hom}(N, M)$ mit $r \circ f = 1_M$.
(3) Man hat folgendes kommutative Diagramm exakter Folgen:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & L & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle h}\ \simeq & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{j} & M \oplus L & \xrightarrow{p} & L & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

wobei j und p die kanonische Injektion bzw. Projektion ist. (Insbesondere gilt $N \simeq M \oplus L$.)

Übung 1.6.4. Man zeige die Äquivalenz obiger Aussagen (1)–(3). Ferner zeige man, dass ein Homomorphismus h im obigen kommutativen Diagramm automatisch bijektiv ist.

1.7. Erzeugendensysteme, freie Moduln

1.7.1 (Freie Moduln). Sei A eine Algebra. Ein A-Modul M heißt *frei*, falls $M \simeq A^{(I)}$ gilt für eine Indexmenge I. Hierbei bezeichnet $A^{(I)}$ die direkte Summe $\bigoplus_{i \in I} A$.

M heißt *endlich erzeugt frei*, falls hierbei I eine endliche Menge ist, wenn also $M \simeq A^n$ gilt für eine natürliche Zahl n.

1.7.2 (Basen). Für jedes $i \in I$ sei $e_i \in A^{(I)}$ die Folge, die an der i-ten Stelle eine 1, ansonsten nur 0 als Einträge hat. Offenbar hat jedes Element $x \in A^{(I)}$ genau eine Darstellung der Form

$$x = \sum_{i \in I} e_i a_i$$

mit $a_i \in A$, fast alle $= 0$.

Sei M ein freier A-Modul und $A^{(I)} \xrightarrow{f} M$ ein Isomorphismus. Für jedes $i \in I$ sei $b_i = f(e_i)$. Dann gilt offenbar auch, dass jedes Element $x \in M$ genau eine Darstellung der Form

$$x = \sum_{i \in I} b_i a_i$$

mit $a_i \in A$, fast alle $= 0$, hat. Ein solches System $(b_i)_{i \in I}$ nennt man eine *Basis* von M.

Ist M ein beliebiger A-Modul und $(b_i)_{i \in I}$ ein beliebiges System von Elementen in M. Dann gibt es genau eine A-lineare Abbildung $f\colon A^{(I)} \longrightarrow M$ mit $f(e_i) = b_i$ $(i \in I)$.

1.7.3 (Erzeugendensystem). Sei M ein A-Modul. Dann gibt es eine Menge I und einen Epimorphismus $A^{(I)} \xrightarrow{g} M$ (z. B. kann man $I = M$ wählen). Setzt man $b_i = g(e_i)$, so hat jedes $x \in M$ wegen der Surjektivität von g eine Darstellung als Summe

$$x = \sum_{i \in I} b_i a_i$$

mit $a_i \in A$, fast alle $= 0$. In dem Fall nennt man $(b_i)_{i \in I}$ ein Erzeugendensystem von M. Jedoch, bei fehlender Injektivität, sind die Koeffizienten dabei nicht mehr eindeutig bestimmt.

1.7.4 (Endlich erzeugte Moduln). Sei M ein A-Modul. Es heißt M *endlich erzeugt*, falls es eine natürliche Zahl n und einen Epimorphismus $A^n \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ gibt. (Oder anders ausgedrückt: M ist ein Faktormodul von A^n.)

Gleichbedeutend ist: Es gibt endlich viele Elemente $b_1, \ldots, b_n$ in M, so dass jedes $x \in M$ sich schreiben lässt als $x = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i$ (mit $a_i \in A$).

1.8. Projektive Moduln

Der folgende Begriff verallgemeinert den Begriff des freien Moduls:

1.8.1. Ein A-Modul P heißt *projektiv*, falls er ein direkter Summand eines freien Moduls ist, wenn es also einen A-Modul Q und eine Menge I gibt mit $P \oplus Q \simeq A^{(I)}$.

Übung 1.8.2. Folgende Aussagen für einen A-Modul P sind äquivalent:
(1) P ist projektiv.
(2) Jede kurze exakte Folge $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ spaltet auf.
(3) Zu jedem Epimorphismus $g\colon M \longrightarrow N$ und jedem Homomorphismus $h\colon P \longrightarrow N$ gibt es einen Homomorphismus $\overline{h}\colon P \longrightarrow M$, so dass $g \circ \overline{h} = h$ gilt.

Übung 1.8.3. Sei $n > 1$ eine natürliche Zahl. Man zeige, dass der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nicht projektiv ist. Ist $n\mathbb{Z}$ projektiver $\mathbb{Z}$-Modul?

1.9. Direkte Summanden und Idempotente

1.9.1 (Projektionen). Sei $M = K \oplus L$. Definiere die Projektion $p_K\colon M \longrightarrow K$ von M auf K entlang L durch $p_K(k + l) = k$ für jedes $k \in K$ und $l \in L$. Dies ist ein Epimorphismus, und es gilt $(p_K \mid K) = 1_K$ und $\mathrm{Kern}(p_K) = L$. Durch diese Eigenschaften ist der Epimorphismus $p_K\colon M \longrightarrow K$ eindeutig bestimmt.

1.9.2 (Idempotente Elemente). Sei A eine Algebra. Ein Element $e \in A$ heißt *idempotent*, falls $e^2 = e$ gilt.

Beispiel 1.9.3. Sei K ein direkter Summand von M. Definiere $e_K \in \mathrm{End}(M)$ durch $x \mapsto p_K(x)$. Es ist e_K idempotent.

Bemerkung 1.9.4. Sei M ein A-Modul. Dann ist M in kanonischer Weise ein $\mathrm{End}(M_A)$-Linksmodul durch

$$f \cdot x \stackrel{def}{=} f(x) \quad \text{für alle} \quad f \in \mathrm{End}(M_A) \text{ und } x \in M.$$

Lemma 1.9.5. *Sei e ein idempotentes Element in $\mathrm{End}(M_A)$. Dann ist $1-e$ idempotent in $\mathrm{End}(M_A)$ mit*

$$\mathrm{Kern}(e) = \{x \in M \mid x = (1-e)(x)\} = \mathrm{Bild}(1-e),$$
$$\mathrm{Bild}(e) = \{x \in M \mid x = e(x)\} = \mathrm{Kern}(1-e)$$

und $M = eM \oplus (1-e)M$.

Beweis. Es gilt $(1-e)^2 = 1 - 2e + e^2 = 1 - e$, und es gilt $e(1-e) = 0 = (1-e)e$. Es folgt

$$\mathrm{Bild}(e) \subseteq \{x \in M \mid x = e(x)\} \subseteq \mathrm{Kern}(1-e),$$
$$\mathrm{Bild}(1-e) = \{x \in M \mid x = (1-e)(x)\} = \mathrm{Kern}(e).$$

Wegen $x = e(x) + (1-e)(x)$ für jedes $x \in M$ sind diese Inklusionen alle Gleichheiten, und $M = eM + (1-e)M$. Sei $x \in eM \cap (1-e)M$, also $x = e(y) = (1-e)(z)$. Dann folgt $x = e(y) = e^2(y) = e(1-e)(z) = 0$, also $eM \cap (1-e)M = 0$. Damit $M = eM \oplus (1-e)M$. □

1.10. Unzerlegbare Moduln

1.10.1 (Unzerlegbarkeit). Ein Modul $M \neq 0$ heißt *unzerlegbar*, falls aus $M \simeq N \oplus N'$ folgt, dass $N = 0$ oder $N' = 0$ ist. Offenbar ist dies der Fall genau dann, wenn 0 und M die einzigen Untermoduln sind, die direkte Summanden von M sind.

Man kann sich denken, dass sich jeder Modul als eine direkte Summe von unzerlegbaren Moduln schreiben lässt. Wir werden später untersuchen, wann dies tatsächlich gilt und eine solche Zerlegung eindeutig ist. ("Satz von Krull-Schmidt")

Die Unzerlegbarkeit lässt sich durch eine Eigenschaft des Endomorphismenrings charakterisieren.

PROPOSITION 1.10.2. *Sei $M \neq 0$ ein Modul. Dann ist M unzerlegbar genau dann, wenn 0 und 1 die einzigen idempotenten Elemente in $\mathrm{End}(M_A)$ sind.*

BEWEIS. Sei M zerlegbar, also $M = K \oplus L$ mit Untermoduln K, $L \neq 0$. Dann ist die Projektion $e_K \in \mathrm{End}(M_A)$ idempotent mit $e_K \neq 0, 1$. Ist umgekehrt $e \in \mathrm{End}(M_A)$ idempotent, so ist $M = eM \oplus (1-e)M$; gilt $e \neq 0, 1$, so folgt $eM, (1-e)M \neq 0$. □

Auch diese Aussage werden wir später (in spezielleren Situationen) präzisieren.

KAPITEL 2

Halbeinfachheit

Im folgenden fixieren wir einen Körper K und studieren endlichdimensionale K-Algebren. Desweiteren beschränken wir unsere Betrachtungen auch auf endlich erzeugte Moduln.

Viele der hier behandelten Sätze gelten in größerer Allgemeinheit. Beweise, die allgemein sehr aufwendig sein können, sind in dieser endlichdimensionalen Situation oftmals viel einfacher zu führen.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Moduln, die noch viele Eigenschaften mit Vektorräumen gemeinsam haben, den halbeinfachen Moduln.

2.1. Endlichdimensionalität

Sei stets A eine endlichdimensionale Algebra über dem Körper K.

BEISPIELE 2.1.1. (1) Ist A eine endlichdimensionale K-Algebra und n eine natürliche Zahl, so ist auch $\mathrm{M}_n(A)$ eine endlichdimensionale K-Algebra.

(2) Sei G eine endliche Gruppe. Dann ist die Gruppenalgebra KG endlichdimensional. (Eine (endliche) Basis ist gegeben durch die $\xi(g)$ $(g \in G)$; jedes Element der Gruppenalgebra läßt sich eindeutig schreiben als $\sum_{g\in G} ga_g$ $(a_g \in K)$.)

(3) Für $n \geq 1$ ist $K[T]/(T^n)$ eine K-Algebra der Dimension n.

PROPOSITION 2.1.2. *Sei A eine endlichdimensionale K-Algebra, und sei M ein A-Modul. Dann ist M endlich erzeugter A-Modul genau dann, wenn M endlichdimensional über K ist.*

BEWEIS. Sei M endlichdimensional über K. Dann gibt es $m_1, \ldots, m_t \in M$ mit $M = m_1K + \cdots + m_tK$, und es folgt, dass $M = m_1A + \cdots + m_tA$ endlich erzeugter A-Modul ist. Gilt umgekehrt $M = m_1A + \cdots + m_tA$, und ist $A = a_1K + \cdots + a_sK$, so folgt $M = \sum_{i,j} m_i a_j K$, und damit ist M endlichdimensional. □

FOLGERUNG 2.1.3. *Sei $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Folge von A-Moduln (A eine endlichdimensionale K-Algebra). Dann ist M endlich erzeugt genau dann, wenn N und L endlich erzeugt sind. In dem Fall gilt* $\dim(M_K) = \dim(L_K) + \dim(N_K)$.

BEWEIS. Obige exakte Folge ist insbesondere eine kurze exakte Folge von K-Moduln, die aufspaltet (da jeder K-Modul frei ist). (Achtung: D. h. nicht, dass sie als Folge von A-Moduln aufspalten muss!) Also $M_K \simeq L_K \oplus N_K$. Daraus folgt die Behauptung mit 2.1.2. □

FOLGERUNG 2.1.4. *Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Jede nicht-leere Menge $\mathcal{X}$ von Untermoduln von M hat ein maximales Element und auch ein minimales Element (bzgl. der durch Inklusion gegebenen Ordnung).*

Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge. Ein $x \in X$ heißt maximal (minimal), falls für jedes $y \in X$ mit $x \leq y$ (bzw. mit $y \leq x$) gilt, dass $x = y$ ist. Eine Menge kann mehrere maximale Elemente haben. Dagegen ist ein $x \in X$ ein größtes (kleinstes) Element, falls für alle $y \in X$ schon $y \leq x$ (bzw. $x \leq y$) gilt. Größte Elemente sind, falls existent, eindeutig.

BEWEIS. Jedes $U \in \mathcal{X}$ hat endliche Dimension, $0 \leq \dim U \leq \dim M$. Ein $U \in \mathcal{X}$ mit maximaler (minimaler) Dimension ist maximal (bzw. minimal) in $\mathcal{X}$. □

2.1.5. Sei M ein A-Modul. Ein Untermodul $U \subset M$ heißt maximal, falls er maximal ist in der Menge der Untermoduln $V \subset M$ mit $V \neq M$. (Eine ähnliche Definition gilt für (Links-/Rechts-) Ideale.) Offenbar ist ein Untermodul $U \subseteq M$ maximal genau dann, wenn der Faktormodul M/U einfach ist. Aus der vorstehenden Aussage folgt, dass jeder endlich erzeugte A-Modul $M \neq 0$ einen maximalen Untermodul besitzt. Ebenso folgt, dass jeder endlich erzeugte A-Modul $M \neq 0$ einen einfachen Untermodul besitzt.

ÜBUNG 2.1.6. Wie sehen (bis auf Isomorphie) die einfachen $\mathbb{Z}$-Moduln und deren Endomorphismenringe aus?

2.2. Divisionsalgebren

2.2.1. Eine K-Algebra, die ein Schiefkörper ist, heißt auch *Divisionsalgebra*.

BEISPIEL 2.2.2. Die Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$ ist eine (nicht-kommutative) Divisionsalgebra über $\mathbb{R}$. Man mache sich klar, dass $\mathbb{H}$ keine $\mathbb{C}$-Algebra ist.

SATZ 2.2.3. *Sei D eine Divisionsalgebra. Dann gilt:*

(1) *Jeder D-Modul hat eine Basis, d. h. ist frei.*
(2) *Jeder Untermodul eines D-Moduls ist direkter Summand.*

BEWEIS. Wie in der Linearen Algebra. Die Kommutativität des Körpers ist dabei nicht wichtig. □

Die Umkehrung von (1), d. h. dass durch (1) schon die Divisionsalgebren ausgezeichnet sind, wird in Übung 2.7.7 gezeigt.

In nachfolgenden Abschnitten werden wir die "nächst komplizierte" Klasse von Algebren studieren, die sogenannten halbeinfachen Algebren.

PROPOSITION 2.2.4. *Sei K algebraisch abgeschlossen, und sei D eine endlichdimensionale K-Divisionsalgebra. Dann gilt $D = K$. (Genauer: $D \simeq K$.)*

BEWEIS. Es ist $1_D \cdot K$ eine zu K isomorphe Unteralgebra von D, die wir mit K identifizieren. Sei $x \in D$. Da $ax = xa$ für jedes $a \in K$ gilt (vgl. Axiome einer Algebra), ist

$$K[x] \stackrel{def}{=} \{a_0 + xa_1 + \cdots + x^n a_n \mid n \geq 0,\ a_i \in K\}$$

eine kommutative Ringerweiterung von K, und wegen der Endlichdimensionalität genügt x einer Polynomgleichung $P(x) = 0$ mit einem normierten $P \in K[T]$. Da K algebraisch abgeschlossen ist, zerfällt P in Linearfaktoren

$$P = \prod_{i=1}^{d} (T - a_i)$$

mit $a_1, \ldots, a_d \in K$. Wegen $P(x) = 0$ folgt $x = a_i$ für ein i, also $x \in K$. □

BEMERKUNG 2.2.5. Es ist ein tiefliegendes Resultat, dass die einzigen (endlichdimensionalen) Divisionsalgebren über $\mathbb{R}$ die Schiefkörper $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ sind. (Satz von Frobenius.)

2.3. Halbeinfache Moduln

Alle Moduln seien endlich erzeugt.

2.3.1. Ein Modul M heißt *halbeinfach*, falls er sich als direkte Summe von einfachen Untermoduln schreiben lässt.

Aus der Endlichdimensionalität folgt sofort, dass eine solche direkte Summenzerlegung endlich ist.

SATZ 2.3.2. *Folgende Aussagen über den Modul M sind äquivalent:*

(1) *M ist halbeinfach.*
(2) *M ist Summe einfacher Untermoduln.*
(3) *Jeder Untermodul von M ist ein direkter Summand.*

BEWEIS. (1)⇒(2): Dies ist trivial.

(2)⇒(3): Sei M Summe einfacher Untermoduln. Sei N ein Untermodul von M. Sei $\mathcal{X}$ die Menge aller Untermoduln V von M mit $V \cap N = 0$. Offenbar ist $\mathcal{X} \neq \emptyset$, denn z. B. ist $0 \in \mathcal{X}$. Sei nun L ein maximales Element von $\mathcal{X}$. Dann ist die Summe $N + L = N \oplus L$ direkt. Zu zeigen ist, dass $N + L = M$ ist.

Angenommen, es gilt $N + L \neq M$. Dann kann, da M Summe einfacher Untermoduln ist, nicht jeder einfache Untermodul in $N + L$ liegen. Sei etwa S einfacher Untermodul mit $S \not\subseteq N + L$. Dann ist $S \cap (N + L)$ ein echter Untermodul von S, wegen der Einfachheit also $S \cap (N + L) = 0$. Es ist insbesondere $S \cap N = 0$, d. h. $S \in \mathcal{X}$, und dann ist auch $L + S \in \mathcal{X}$. Wegen der Maximalität von L ist $L + S = L$, und daher $S \subseteq L$. Da aber auch $S \cap L = 0$, ergibt dies einen Widerspruch.

(3)⇒(1): Induktion nach der Dimension von M über K. Ist $M = 0$, so ist die Aussage trivial, $\dim M = 1$, so ist M selbst einfach. Gelte nun $n = \dim M \geq 1$. Es gibt einen einfachen Untermodul S von M, und nach Voraussetzung gibt es einen Untermodul N von M mit $M = S \oplus N$.

Nun ist $\dim N < n$. Außerdem erfüllt N Bedingung (3), d. h. jeder Untermodul L von N ist ein direkter Summand von N: Es gibt nämlich (da M Bedingung (3) erfüllt) einen Untermodul L' von M mit $M = L \oplus L'$. Sei $L'' = L' \cap N$. Es ist $L \cap L'' \subseteq L \cap L' = 0$ und $L + L'' = (L + L') \cap N = M \cap N = N$, also $N = L \oplus L''$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist N halbeinfach, und dann ist es auch $M = S \oplus N$. □

Der Beweis von (2)⇒(3) kann noch verfeinert werden, so dass folgende stärkere Aussage gilt:

SATZ 2.3.3. *Sei $M = \sum_{i \in I} S_i$ mit einfachen Untermoduln S_i. Sei N ein Untermodul von M. Dann gibt es eine Teilmenge J von I, so dass*

$$M = N \oplus \left(\bigoplus_{j \in J} S_j\right)$$

gilt.

BEWEIS. Wähle eine Teilmenge $J \subseteq I$ maximal mit der Eigenschaft, dass $N \cap \left(\sum_{j \in J} S_j\right) = 0$ gilt, sowie die Summe $\sum_{j \in J} S_j$ direkt ist. (Z. B. erfüllt die leere Menge die beiden Eigenschaften, daher gibt es eine solche maximale Teilmenge.) Es ist dann die Summe $N + \sum_{j \in J} S_j$ eine direkte Summe, und man zeigt wie im obigen Beweis, dass diese Summe ganz M ergibt (wobei man anstatt obigem S eines der S_i ($i \in I$) nimmt). □

Im Spezialfall $N = 0$ liefert der Satz auch einen direkten Beweis für (1)⇒(2), und zudem die folgende, bessere Aussage.

SATZ 2.3.4. *Sei $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$ halbeinfach (mit einfachen S_i). Sei*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Folge. Dann sind N und L halbeinfach, die Folge spaltet auf, und es gibt eine Teilmenge $J \subseteq I$ mit

$$N \simeq \bigoplus_{i \in I \setminus J} S_i \quad \text{und} \quad L \simeq \bigoplus_{j \in J} S_j.$$

BEWEIS. Da $\mathrm{Bild}(f)$ ein Untermodul von M ist, gibt es nach dem vorherigen Satz eine Teilmenge $J \subseteq I$ mit

$$M = \mathrm{Bild}(f) \oplus \bigoplus_{j \in J} S_j.$$

Daher spaltet die Folge auf, und es ist $L \simeq M/\mathrm{Bild}(f) \simeq \bigoplus_{j\in J} S_j$. Andererseits gilt

$$M = \bigoplus_{i \in I \setminus J} S_i \oplus \bigoplus_{j \in J} S_j.$$

"Kürzen" liefert $N \simeq \mathrm{Bild}(f) \simeq \bigoplus_{i\in I\setminus J} S_i$ (vgl. nachstehende Übung). □

ÜBUNG 2.3.5. Sei $M = N \oplus N' = N \oplus N''$. Man zeige $N' \simeq N''$. Muss $N' = N''$ gelten?

FOLGERUNG 2.3.6. *Ein Modul M ist halbeinfach genau dann, wenn jede kurze exakte Folge $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ aufspaltet.*

BEWEIS. "⇒" folgt aus dem vorherigen Satz. "⇐": Sei N ein Untermodul von M. Dann spaltet nach Voraussetzung insbesondere die Folge $0 \longrightarrow N \xrightarrow{\subseteq} M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$, und es folgt, dass N ein direkter Summand von M ist. Nach Satz 2.3.2 ist M halbeinfach. □

BEMERKUNG 2.3.7. Seien M und N Moduln. Dann ist $\mathrm{Hom}(M, N)$ ein Rechtsmodul über der Algebra $\mathrm{End}(M)$ und ein Linksmodul über der Algebra $\mathrm{End}(N)$, wobei die jeweilige Operation durch Hintereinanderschaltung von Abbildungen gegeben ist, also liefert z. B.

$$\mathrm{Hom}(M, N) \times \mathrm{End}(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, N),\ (f, g) \mapsto f \circ g$$

die $\mathrm{End}(M)$-Rechtsmodulstruktur.

SATZ 2.3.8 (Eindeutigkeit). *Die Summanden einer Zerlegung $M = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_t$ eines halbeinfachen Moduls in einfache Moduln sind bis auf Isomorphie und Reihenfolge eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. Sei S ein einfacher Modul. Es ist $\mathrm{Hom}_A(S, M) \simeq \bigoplus_{i=1}^t \mathrm{Hom}_A(S, S_i)$ ein Rechtsvektorraum über dem Divisionsalgebra $D = \mathrm{End}_A(S)$. Nach dem Schurschen Lemma ist

$$\mathrm{Hom}_A(S, S_i) \simeq \begin{cases} D & S \simeq S_i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folglich ist die Anzahl der zu S isomorphen Summanden in obiger Zerlegung durch die Dimension des D-Vektorraums $\mathrm{Hom}_A(S, M)$ gegeben und somit durch M eindeutig bestimmt. □

ÜBUNG 2.3.9. Sei A als A-Modul $A_A = S_1 \oplus \cdots \oplus S_t$ halbeinfach (S_i einfach). Man zeige:

(1) Sei S ein einfacher A-Modul. Dann gibt es ein i mit $S \simeq S_i$.
(2) Jeder (endlich erzeugte) A-Modul ist halbeinfach.
(3) Jeder (endlich erzeugte) A-Modul ist projektiv.

2.4. Sockel und Radikal eines Moduls

2.4.1. Sei M ein Modul. Sei $\mathrm{Soc}(M)$ (der *Sockel*) die Summe aller einfachen Untermoduln von M, und sei $\mathrm{Rad}(M)$ (das *Radikal*) der Durchschnitt aller maximalen Untermoduln von M. Dies sind Untermoduln von M.

Aufgrund der vorausgesetzten Endlichdimensionalität gibt es endlich viele einfache Untermoduln S_i mit $\mathrm{Soc}(M) = \sum_{i=1}^t S_i$, und ebenso endlich viele maximale Untermoduln N_i mit $\mathrm{Rad}(M) = \bigcap_{i=1}^s N_i$.

Offenbar ist M halbeinfach genau dann, wenn $M = \mathrm{Soc}(M)$ gilt.

SATZ 2.4.2 (Funktorialität). *Sei $f\colon M \longrightarrow N$ eine lineare Abbildung zwischen A-Moduln M und N. Dann gilt*

$$f(\mathrm{Soc}(M)) \subseteq \mathrm{Soc}(N) \quad \textit{und} \quad f(\mathrm{Rad}(M)) \subseteq \mathrm{Rad}(N).$$

BEWEIS. (1) Sei S ein einfacher Untermodul von M. Dann ist entweder $f(S) = 0$ oder $f(S)$ ein einfacher Untermodul von N. Es folgt daher sofort $f(\mathrm{Soc}(M)) \subseteq \mathrm{Soc}(N)$.

(2) Sei N' ein maximaler Untermodul von N. Dann ist $\pi\colon N \longrightarrow N/N' = S$ die kanonische Surjektion auf den einfachen Modul $S = N/N'$. Der Kern der Verknüpfung $\pi \circ f\colon M \longrightarrow S$ ist entweder $= M$ (falls $\pi \circ f = 0$ gilt) oder maximaler Untermodul von M (im Fall $\pi \circ f \neq 0$, also $\pi \circ f$ surjektiv). In jedem Fall umfasst dieser Kern $\mathrm{Rad}(M)$, und damit folgt $f(\mathrm{Rad}(M)) \subseteq N'$. Da dies für jeden maximalen Untermodul N' von N gilt, folgt $f(\mathrm{Rad}(M)) \subseteq \mathrm{Rad}(N)$. □

FOLGERUNG 2.4.3. $\mathrm{Soc}(A) = \mathrm{Soc}(A_A)$ *und* $\mathrm{Rad}(A) = \mathrm{Rad}(A_A)$ *sind Ideale in A.*

BEWEIS. Nach Definition sind $\mathrm{Soc}(A_A)$ und $\mathrm{Rad}(A_A)$ Rechtsideale in A. Für jedes $a \in A$ ist die Linksmultiplikation $\lambda_a\colon A \longrightarrow A$, $x \mapsto ax$ ein Homomorphismus von A_A nach A_A, überführt daher Sockel in den Sockel und Radikal in das Radikal, was gerade besagt, dass Sockel und Radikal auch Linksideale sind. □

FOLGERUNG 2.4.4. *Es gilt*

$$\mathrm{Soc}(M_1 \oplus M_2) = \mathrm{Soc}(M_1) \oplus \mathrm{Soc}(M_2)$$

und

$$\mathrm{Rad}(M_1 \oplus M_2) = \mathrm{Rad}(M_1) \oplus \mathrm{Rad}(M_2).$$

BEWEIS. Die Einbettung $j_i\colon M_i \longrightarrow M_1 \oplus M_2$ $(i = 1, 2)$ überführt $\mathrm{Soc}(M_i)$ in $\mathrm{Soc}(M_1 \oplus M_2)$, und daher $\mathrm{Soc}(M_1) \oplus \mathrm{Soc}(M_2) \subseteq \mathrm{Soc}(M_1 \oplus M_2)$. Die Projektion $p_i\colon M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_i$ $(i = 1, 2)$ überführt $\mathrm{Soc}(M_1 \oplus M_2)$ in $\mathrm{Soc}(M_i)$, und es ergibt sich $\mathrm{Soc}(M_1 \oplus M_2) \subseteq \mathrm{Soc}(M_1) \oplus \mathrm{Soc}(M_2)$. Dieselbe Argumentation gilt für das Radikal. □

LEMMA 2.4.5. $\mathrm{Rad}(M/\mathrm{Rad}(M)) = 0$.

BEWEIS. Die maximalen Untermoduln von M enthalten alle $\mathrm{Rad}(M)$, korrespondieren also zu den maximalen Untermoduln von $M/\mathrm{Rad}(M)$, vgl. Übung 1.2.7. Übergang zum Durchschnitt liefert nun die Behauptung. □

SATZ 2.4.6. *Sei M ein Modul.*

(1) *M ist halbeinfach genau dann, wenn* $\mathrm{Rad}(M) = 0$ *gilt.*
(2) *$M/\mathrm{Rad}(M)$ ist halbeinfach.*

BEWEIS. (1) Sei $M = S_1 \oplus \ldots \oplus S_t$ halbeinfach. Da jeder einfache Modul S_i triviales Radikal hat, gilt dies nach der Folgerung auch für M.

Gelte nun $\mathrm{Rad}(M) = 0$. Wir zeigen per Induktion nach $\dim(M)$, dass M direkte Summe einfacher Untermoduln ist. Für $M = 0$ ist dies klar. Falls $M \neq 0$, so gibt es einen einfachen Untermodul S. Wegen $\mathrm{Rad}(M) = 0$ gibt es einen maximalen Untermodul N von M mit $N \cap S = 0$ (andernfalls würde für jeden maximalen Untermodul N gelten, dass $N \cap S = S$, also $S \subseteq N$ gilt). Aus der Maximalität von N folgt $N + S = M$, und damit $M = N \oplus S$. Aus der Folgerung ergibt sich ferner $\mathrm{Rad}(N) = 0$, und damit kann die Induktionsvoraussetzung auf N angewendet werden.

(2) Folgt aus (1) und dem vorherigen Lemma. □

Zusammenfassend haben wir also gezeigt:

$$\mathrm{Soc}(M) = M \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ halbeinfach} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Rad}(M) = 0.$$

ÜBUNG 2.4.7. Sei M der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}$. Man zeige, dass $\mathbb{Z}$ nicht halbeinfach ist sowie $\mathrm{Rad}(M) = 0 = \mathrm{Soc}(M)$.

2.5. Matrizen von Homomorphismen

LEMMA 2.5.1. *Sei $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ direkte Summe von A-Moduln. Dann hat man eine Isomorphie von Algebren*

$$\mathrm{End}(M_A) \simeq \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}(M_1,M_1) & \mathrm{Hom}(M_1,M_2) & \ldots & \mathrm{Hom}(M_1,M_n) \\ \mathrm{Hom}(M_2,M_1) & \mathrm{Hom}(M_2,M_2) & \ldots & \mathrm{Hom}(M_2,M_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Hom}(M_n,M_1) & \mathrm{Hom}(M_n,M_2) & \ldots & \mathrm{Hom}(M_n,M_n) \end{pmatrix},$$

wobei die Algebra auf der rechten Seite besteht aus allen $n \times n$-Matrizen (f_{ij}) mit $f_{ij} \in \mathrm{Hom}(M_i, M_j)$ mit üblicher Matrizenaddition und -multiplikation und üblicher Multiplikation mit Skalaren aus K.

BEWEIS. Mit den kanonischen Injektionen $j_i \colon M_i \longrightarrow M$ und den kanonischen Projektionen $p_i \colon M \longrightarrow M_i$ gilt offenbar

$$\sum_{i=1}^{n} j_i \circ p_i = 1_M \quad \text{und} \quad p_i \circ j_k = \begin{cases} 1_{M_i} & i = k \\ 0 & i \neq k. \end{cases}$$

Man prüft leicht nach, dass folgende Abbildungen zueinander inverse Algebrenhomomorphismen sind:

$$\mathrm{End}(M) \longrightarrow \big(\mathrm{Hom}(M_i, M_k)\big), \quad f \mapsto (p_k \circ f \circ j_i),$$
$$\big(\mathrm{Hom}(M_i, M_k)\big) \longrightarrow \mathrm{End}(M), \quad (f_{ik}) \mapsto \sum_{i,\,k} j_k \circ f_{ik} \circ p_i.$$

□

Wir notieren zwei Spezialfälle.

FOLGERUNG 2.5.2. *Ist $M = N^n$, so gilt $\mathrm{End}(M) \simeq \mathrm{M}_n(\mathrm{End}(N))$.*

FOLGERUNG 2.5.3. *Sei $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ mit $\mathrm{Hom}(M_i, M_j) = 0$, falls $i \neq j$, so gilt*

$$\mathrm{End}(M) \simeq \mathrm{End}(M_1) \times \mathrm{End}(M_2) \times \ldots \times \mathrm{End}(M_n).$$

2.6. Einfache Algebren

DEFINITION 2.6.1. Eine Algebra A heißt *einfach*, falls $A \neq 0$, und falls 0 und A die einzigen (zweiseitigen) Ideale in A sind.

PROPOSITION 2.6.2. *Sei D eine Divisionsalgebra. Dann ist $A = \mathrm{M}_n(D)$ einfach.*

BEWEIS. Sei I ein Ideal in A mit $I \neq 0$. Zu zeigen ist $I = A$. Sei $\alpha = (\alpha_{ij}) \in A$. Es gibt $\beta = (\beta_{ij}) \in I$ mit $\beta \neq 0$, etwa $\beta_{rs} \neq 0$. Bezeichne mit $e_{kl} \in A$ die Matrix, die nur an der Stelle (k, l) eine 1, sonst nur Nullen hat. Es gilt

$$\alpha = \sum_{i,\,j} e_{ij}\alpha_{ij} = \sum_{i,\,j} (e_{ir}\beta e_{sj})\beta_{rs}^{-1}\alpha_{ij} \in I,$$

da I ein zweiseitige Ideal ist. □

DEFINITION 2.6.3. Eine Algebra A heißt *halbeinfach*, falls der Modul A_A halbeinfach ist.

PROPOSITION 2.6.4. *Sei A eine einfache Algebra. Dann ist A halbeinfach.*

BEWEIS. Wegen $A \neq 0$ ist $\mathrm{Rad}(A) \neq A$. Da $\mathrm{Rad}(A)$ ein Ideal in A ist, folgt aus der Einfachheit $\mathrm{Rad}(A) = 0$. Also ist A halbeinfach. □

FOLGERUNG 2.6.5. *Seien $D_1, \ldots, D_t$ Divisionsalgebren und $n_1, \ldots, n_t \geq 1$ natürliche Zahlen. Dann ist*

$$\mathrm{M}_{n_1}(D_1) \times \mathrm{M}_{n_2}(D_2) \times \ldots \times \mathrm{M}_{n_t}(D_t)$$

halbeinfach.

SATZ 2.6.6 (Struktursatz von Wedderburn für einfache Algebren). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *A ist einfach.*
(2) *$A \neq 0$ ist halbeinfach und es gibt bis auf Isomorphie nur einen einfachen A-Modul.*
(3) *Es ist $A \simeq \mathrm{M}_n(D)$ für eine Divisionsalgebra D und eine natürliche Zahl $n \geq 1$.*

Ferner sind n und D (bis auf Isomorphie) in (3) eindeutig durch A bestimmt.

BEWEIS. (1)⇒(2) Sei A einfach. Nach Proposition 2.6.4 ist A halbeinfach, $A = S_1 \oplus \ldots \oplus S_t$. Nach Übung 2.3.9 ist jeder einfache Modul isomorph zu einem S_i. Zu zeigen ist also, dass $S_i \simeq S_j$ gilt für alle i, j. Jedes S_i ist ein minimales Rechtsideal in A; AS_i ist ein nichttriviales Ideal, und daher $AS_i = A$. Dann gilt aber auch $A(S_iS_j) = A$, insbesondere $S_iS_j \neq 0$. Sei $x \in S_i$ mit $xS_j \neq 0$. Da S_i einfach ist, folgt $xS_j = S_i$. Weiter ist $S_j \longrightarrow xS_j$, $y \mapsto xy$ ein Epimorphismus, und da S_j einfach ist, sogar ein Isomorphismus. Insgesamt ergibt sich $S_j \simeq xS_j = S_i$.

(2)⇒(3) Sei A halbeinfach und S der bis auf Isomorphie einzige A-Modul. Es gilt dann $A \simeq S^n$ für ein $n \geq 1$. Es folgt $A \simeq \mathrm{End}(A_A) \simeq \mathrm{M}_n(\mathrm{End}(S_A))$, und $D = \mathrm{End}(S_A)$ ist ein Schiefkörper nach dem Lemma von Schur.

(3)⇒(1) ist Proposition 2.6.2.

Zur Eindeutigkeitsaussage: Die bisher geführte Argumentation zeigt, dass die Zahl n in (3) die Anzahl der einfachen Summanden in einer direkten Zerlegung von A ist (diese Zahl und diese Summanden sind nach Satz 2.3.8 eindeutig), und sich der Schiefkörper D in (3) als Endomorphismenring des einzigen einfachen Moduls ergibt. Schließlich gilt nach Übung 2.6.7 für die Algebra $B = \mathrm{M}_{n'}(D')$ (D' eine Divisionsalgebra), dass n' die eindeutige Anzahl der einfachen Summanden in einer direkten Zerlegung von B ist und D' deren Endomorphismenring. Zusammen ergibt dies die Eindeutigkeit von n und D. □

ÜBUNG 2.6.7. Sei $A = \mathrm{M}_n(D)$, wobei D eine Divisionsalgebra ist. Für $i = 1, \ldots, n$ sei $S_i = e_{ii}A$. Man zeige direkt (ohne Satz 2.6.6 zu benutzen):

(a) $A = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$.
(b) Die S_i sind einfache Untermoduln.
(c) $S_i \simeq S_j$ für alle i, j.
(d) $\mathrm{End}(S_i) \simeq D$ für alle i.

FOLGERUNG 2.6.8. *Sei K algebraisch abgeschlossen und A eine einfache K-Algebra. Dann gilt $A \simeq \mathrm{M}_n(K)$, wobei $n^2 = \dim(A_K)$ ist.*

2.7. Halbeinfache Algebren

SATZ 2.7.1 (Charakterisierungen halbeinfacher Algebren). *Folgende Aussagen sind äquivalent (A endlichdimensionale Algebra, alle Moduln endlich erzeugt):*

(1) *A ist halbeinfache Algebra.*
(2) $\mathrm{Rad}(A) = 0$.
(3) *Jeder A-Modul ist halbeinfach.*
(4) *Jeder A-Modul ist projektiv.*
(5) *Alle kurzen exakten Folgen von A-Moduln spalten auf.*
(6) *Jeder Untermodul eines beliebigen A-Moduls ist direkter Summand.*

BEWEIS. (1)⇔(2) Folgt aus Satz 2.4.6.
(1)⇔(3) folgt aus Übung 2.3.9.
(4)⇔(5) folgt aus der Charakterisierung projektiver Moduln (Übung 1.8.2).
(3)⇔(5) ergibt sich aus Folgerung 2.3.6.
(3)⇔(6) folgt aus der Charakterisierung halbeinfacher Moduln (Satz 2.3.2). □

SATZ 2.7.2 (Struktursatz von Wedderburn). *Sei A eine halbeinfache K-Algebra. Dann gibt es Divisionsalgebren $D_1, \ldots, D_t$ über K und natürliche Zahlen $n_1, \ldots, n_t$, so dass*

$$A \simeq \mathrm{M}_{n_1}(D_1) \times \mathrm{M}_{n_2}(D_2) \times \ldots \times \mathrm{M}_{n_t}(D_t).$$

Hierbei sind die Daten $(n_1, D_1), \ldots, (n_t, D_t)$ bis auf Reihenfolge (und Isomorphie der D_i) eindeutig bestimmt.

BEWEIS. Zerlege A in eine direkte Summe $A = M_1 \oplus \ldots \oplus M_t$, wobei jedes M_i eine direkte Summe von n_i Kopien eines einfachen Moduls S_i ist, $M_i \simeq S_i^{n_i}$, so dass $S_i \not\simeq S_j$ für $i \neq j$ gilt. Dann folgt $\mathrm{Hom}(M_i, M_j) = 0$ für $i \neq j$. Sei D_i der Endomorphismenring von S_i, der wegen der Einfachheit eine Divisionsalgebra ist. Dann folgt

$$A \overset{1.1.12}{\simeq} \mathrm{End}(A) \overset{2.5.3}{\simeq} \prod_{i=1}^{t} \mathrm{End}(M_i) \simeq \prod_{i=1}^{t} \mathrm{End}(S_i^{n_i}) \overset{2.5.2}{\simeq} \prod_{i=1}^{t} \mathrm{M}_{n_i}(D_i).$$

Zur Eindeutigkeit: Es gelte

$$A \simeq \prod_{i=1}^{s} \mathrm{M}_{n_i'}(D_i')$$

mit Divisionsalgebren D_i'. Jedes $\mathrm{M}_{n_i'}(D_i')$ zerlegt sich in eine direkte Summe von n_i' Kopien von einfachen $\mathrm{M}_{n_i'}(D_i')$-Moduln S_i' (wie in Übung 2.6.7); dies sind offenbar auch einfache A-Moduln (nur die i-te Komponente von A ist relevant). Für $i \neq j$ gilt $S_i' \not\simeq S_j'$. (Gäbe es nämlich einen Isomorphismus $f\colon S_i' \longrightarrow S_j'$ von A-Moduln, so folgte $f(S_i'S_j') = f(S_i')S_j' = S_j'S_j' \neq 0$, da S_j' ein idempotentes Elemente enthält; also folgte $S_i'S_j' \neq 0$; andererseits liegen S_i' und S_j' in unterschiedlichen Komponenten von A, was einen Widerspruch ergibt.) Aus der Eindeutigkeitsaussage 2.3.8 folgt nun $s = t$ und (bis auf Umnummerierung der Indizes) $n_i' = n_i$, sowie $D_i' \simeq D_i$ für alle i. □

FOLGERUNG 2.7.3. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und A eine halbeinfache K-Algebra. Dann gibt es (bis auf Reihenfolge) eindeutige natürliche Zahlen $n_1, \ldots, n_t$, so dass*

$$A \simeq \mathrm{M}_{n_1}(K) \times \mathrm{M}_{n_2}(K) \times \ldots \times \mathrm{M}_{n_t}(K).$$

BEWEIS. Dies folgt sofort aus dem Struktursatz von Wedderburn und Proposition 2.2.4. □

BEMERKUNG 2.7.4. Wedderburn hat obigen Satz über beliebigen Grundkörpern um 1907 bewiesen. Zuvor wurde für den Spezialfall $k = \mathbb{C}$ (vgl. Folgerung) dieser Satz 1893 von Molien bewiesen. In 1927 hat Emil Artin den Struktursatz allgemeiner für beliebige Ringe bewiesen, die die absteigende (und aufsteigende) Kettenbedingung für Rechtsideale erfüllen. (Heute würde man sagen: für rechtsartinsche Ringe; sie sind automatisch auch rechtsnoethersch.) Diesen allgemeineren Satz findet man dann oft unter der Bezeichnung Satz von Wedderburn-Artin (oder Artin-Wedderburn). Die wohl allgemeinste Fassung geht auf Emmy Noether, *Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie,* Math. Z. 30 (1929), 641-692 zurück. Vergleiche [**5**, Theorem 4.4] und die Kommentare am Ende des Kapitels dort.

FOLGERUNG 2.7.5. *Eine Algebra A ist halbeinfach, genau dann, wenn der Linksmodul ${}_AA$ halbeinfach ist.*

BEWEIS. Ist A halbeinfach, dann gilt $A \simeq \prod_{i=1}^{t} \mathrm{M}_{n_i}(D_i)$. Es ist $\mathrm{Rad}({}_AA)$ ein Ideal in A (folgt genau wie in 2.4.3 für $\mathrm{Rad}(A_A)$), und da jedes $\mathrm{M}_{n_i}(D_i)$ einfach ist, folgt $\mathrm{Rad}({}_AA) = 0$. Dann folgt genauso wie für Rechtsmoduln in 2.4.6 auch für den Linksmodul ${}_AA$ die Halbeinfachheit. Die Umkehrung gilt analog. □

Beispiel 2.7.6 (Satz von Maschke). Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n, sei K ein Körper. Die Gruppenalgebra KG ist halbeinfach genau dann, wenn n nicht durch die Charakteristik $\mathrm{Char}(K)$ von K geteilt wird. Insbesondere gilt dies für $\mathrm{Char}(K) = 0$.

Übung 2.7.7. Sei A eine endlichdimensionale Algebra, so dass jeder endlich erzeugte A-Modul frei ist. Man zeige, dass dann A eine Divisionsalgebra ist.

Übung 2.7.8. Wir betrachten hier beliebige Ringe und verallgemeinern die vorstehende Aufgabe. Erinnerung: Ein Ring $R \neq 0$ ist ein Schiefkörper, falls jedes Element $x \neq 0$ ein Links- *und* ein Rechtsinverses besitzt. (Diese sind dann notwendig gleich.)

(a) Man zeige, dass ein Ring $R \neq 0$ ein Schiefkörper ist genau dann, wenn 0 und R die einzigen Rechtsideale sind.

(b) Sei $R \neq 0$ ein Ring, über dem jeder endlich erzeugte R-Modul frei ist. Man zeige, dass R ein Schiefkörper ist.

Hinweis: Es soll und darf folgende Tatsache benutzt werden: Jeder Ring $R \neq 0$ enthält ein maximales Rechtsideal I. (Dies folgt aus dem Zornschen Lemma, s.u.) Betrachte R/I.

Zum Zornschen Lemma: Es ist äquivalent zum Auswahlaxiom und besagt, dass jede nichtleere (partiell) geordnete Menge $(X, \leq)$, die induktiv ist, ein maximales Element enthält. Dabei heißt induktiv, dass jede total geordnete Teilmenge L von X eine obere Schranke $s \in X$ hat (d. h. für alle $x \in L$ gilt $x \leq s$).

Satz. *Sei R ein Ring und I ein Rechtsideal in R mit $I \neq R$. Dann gibt es ein maximales Rechtsideal M mit $I \subseteq M$.*

Beweis. Die Menge $\mathcal{X}$ aller Rechtsideale J mit $I \subseteq J$ und $J \neq R$ ist nichtleer ($I \in \mathcal{X}$) und induktiv: Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{X}$ total geordnet. Dann ist $S = \bigcup_{J \in \mathcal{L}} J$ ein Ideal (denn sind $x_i \in S$, etwa $x_i \in J_i$ ($J_i \in \mathcal{L}$), so ist etwa $J_1 \subseteq J_2$, also $x_1 + x_2 \in J_2$, also $x_1 + x_2 \in S$) und $S \neq R$, denn sonst wäre $1 \in S$, und dann $1 \in J$ für ein $J \in \mathcal{L}$. Offenbar ist S eine obere Schranke für $\mathcal{L}$. Nun kann das Zornsche Lemma angewandt werden, d. h. es gibt ein maximales Element $M \in \mathcal{X}$, und es folgt die Behauptung. □

2.8. Morita-Äquivalenz

Der Satz von Wedderburn führt die Modultheorie halbeinfacher Algebren auf die Modultheorie von Matrizenringen $\mathrm{M}_n(D)$ über Divisionsalgebren D zurück. In der Tat ist die Modultheorie über $\mathrm{M}_n(D)$ der von D selbst sehr ähnlich, sogar nahezu identisch. Was dies genau bedeutet, präzisieren wir nun. Dies führt zur Sprache der Kategorien und Funktoren.

2.8.1 (Die Kategorie $\mathrm{mod}-A$). Die Gesamtheit aller (endlich erzeugten) A-Moduln bildet eine sogenannte Kategorie, die wir mit $\mathrm{mod}-A$ bezeichnen. (Wir verwenden $A-\mathrm{mod}$ für Linksmoduln.) Eine Kategorie besteht immer aus

(i) einer Klasse von Objekten (hier: die A-Moduln), und

(ii) für je zwei Objekte X und Y einer Menge von Morphismen $X \xrightarrow{f} Y$, hier die Menge $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$ von Homomorphismen. Morphismen $X \xrightarrow{f} Y$ und $Y \xrightarrow{g} Z$ kann man verknüpfen: $X \xrightarrow{gf} Z$, und diese Operation ist assoziativ. Ferner gibt es immer identische Morphismen $X \xrightarrow{1_X} X$ mit $f1_X = f$ und $1_X g = g$ für alle Morphismen f und g, die man wie beschrieben mit 1_X komponieren kann.

Ist A eine K-Algebra, so ist $\mathrm{mod}-A$ eine sogenannte K-Kategorie, d. h. die Morphismenräume sind K-Vektorräume, so dass sich Verknüpfung von Abbildungen bilinear verhält.

Beispiel 2.8.2. (1) Kategorie aller Mengen. Objekte: Mengen. Morphismen: Abbildungen.

(2) Kategorie aller Gruppen. Objekte: Gruppen. Morphismen: Gruppenhomomorphismen.

(3) Kategorie aller Ringe. Objekte: Ringe. Morphismen: Ringhomomorphismen.

(4) Kategorie $\mathrm{Mod}-R$ *aller* Moduln über einem Ring R.

(5) Kategorie aller topologischen Räume. Objekte: Topologische Räume. Morphismen: Stetige Abbildungen.

2.8.3 (Funktoren). Funktoren sind strukturbewahrende Abbildungen zwischen Kategorien. Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien. Ein Funktor $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ sendet jedes Objekt X aus $\mathcal{C}$ auf ein Objekt $F(X)$ aus $\mathcal{D}$ und jeden Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ auf einen Morphismus $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)$, so dass stets gilt

(i) $F(gf) = F(g)F(f)$, wann immer die Komposition gf Sinn macht, und
(ii) $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

Man hat also für je zwei Objekte X und Y strukturerhaltende Abbildungen

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)),\ f \mapsto F(f).$$

Sind zusätzlich $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei K-Kategorien, und diese Abbildungen zusätzlich K-lineare Abbildungen, so sprechen wir von einem K-Funktor (oder einem Funktor von K-Kategorien).

Beispiel 2.8.4. (1) Ein A-Modul ist insbesondere eine Menge, eine A-lineare Abbildung ist insbesondere eine Abbildung. "Vergißt" man also die algebraische Struktur, so erhält man einen Funktor von $\mathrm{Mod}\,{-}A$ in die Kategorie aller Mengen. Man nennt einen solchen Funktor auch "Vergißfunktor".

(2) Für jeden A-Modul M ist $\mathrm{Rad}(M)$ wieder ein A-Modul. Aussage 2.4.2 besagt, dass sich eine A-lineare Abbildung $f\colon M \longrightarrow N$ einschränken lässt auf die Radikale, d. h. durch Einschränkung erhalten wir eine Abbildung $\mathrm{Rad}(f)\colon \mathrm{Rad}(M) \longrightarrow \mathrm{Rad}(N)$, wobei $\mathrm{Rad}(f)(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathrm{Rad}(M)$ gilt. Dadurch erhält man einen Funktor $\mathrm{Rad}\colon \mathrm{mod}\,{-}A \longrightarrow \mathrm{mod}\,{-}A$.

2.8.5 (Äquivalenzen). Eine *Äquivalenz* ist ein Funktor $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, so dass

(i) alle Abbildungen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$, $f \mapsto F(f)$ *bijektiv* sind, und
(ii) jedes Objekt Y in $\mathcal{D}$ isomorph ist zu $F(X)$ für ein Objekt X in $\mathcal{C}$.

Hierbei werden Isomorphismen wie üblich als invertierbare Morphismen definiert. Gibt es eine Äquivalenz zwischen zwei Kategorien, so heißen sie *äquivalent*.

Die Objekte in äquivalenten Kategorien entsprechen sich, zumindest bis auf Isomorphie, so dass zusätzlich auch die Morphismenstrukur bewahrt bleibt. Bis auf Isomorphie der Objekte haben äquivalente Kategorien völlig gleiche Eigenschaften.

Bemerkung 2.8.6. Sei $F\colon \mathrm{mod}\,{-}A \longrightarrow \mathrm{mod}\,{-}B$ eine Äquivalenz von K-Kategorien. Dann gilt:

(1) $X = 0$ genau dann wenn $F(X) = 0$. ($X = 0$ genau dann, wenn $1_X = 0_X$, genau dann, wenn $1_{F(X)} = F(1_X) = F(0_X) = 0_{F(X)}$, genau dann, wenn $F(X) = 0$.)

(2) $X \simeq Y$ genau dann, wenn $F(X) \simeq F(Y)$.

(3) Ist $f\colon X' \longrightarrow Y'$ ein Homomorphismus von B-Moduln, so gibt es A-Moduln X und Y, Isomorphismen $i\colon F(X) \longrightarrow X'$ und $j\colon F(Y) \longrightarrow Y'$, und einen Homomorphismus $g\colon X \longrightarrow Y$, so dass $f \circ i = F(g) \circ j$ gilt.

2.8.7 (Morita-Äquivalenz). Zwei K-Algebren A und B heißen Morita-äquivalent, falls die K-Kategorien $\mathrm{mod}\,{-}A$ und $\mathrm{mod}\,{-}B$ äquivalent sind.

Satz 2.8.8. *Sei A eine K-Algebra und n eine natürliche Zahl. Dann sind A und $\mathrm{M}_n(A)$ Morita-äquivalent. Genauer gilt: Die Zuordnung*

$$\Phi\colon \mathrm{mod}\,{-}A \longrightarrow \mathrm{mod}\,{-}\,\mathrm{M}_n(A),\ X \mapsto X^n$$

definiert eine Äquivalenz von K-Kategorien.

Beweis. Schreibt man die Elemente von X^n als Zeilen, so operiert $\mathrm{M}_n(A)$ in ersichtlicher Weise von rechts auf X^n, wodurch X^n zu einem $\mathrm{M}_n(A)$-Modul wird. Ist $u\colon X \longrightarrow Y$

A-linear, so ist $u^n\colon X^n \longrightarrow Y^n$, $[x_1,\dots,x_n] \mapsto [u(x_1),\dots,u(x_n)]$ offenbar $\mathrm{M}_n(A)$-linear. Es ist offensichtlich, dass durch diese Definitionen Φ zu einem K-Funktor wird: Sind $u\colon X \longrightarrow Y$ und $v\colon Y \longrightarrow Z$ linear, so ist

$$\begin{aligned}\Phi(v\circ u)([x_1,\dots,x_n]) &= [v\circ u(x_1),\dots,v\circ u(x_n)]\\ &= v^n([u(x_1),\dots,u(x_n)])\\ &= \Phi(v)\circ\Phi(u)([u(x_1),\dots,u(x_n)]),\end{aligned}$$

also $\Phi(v\circ u) = \Phi(v)\circ\Phi(u)$. Sind ferner u, $v\colon X \longrightarrow Y$ linear, so gilt

$$\begin{aligned}\Phi(u+v)([x_1,\dots,x_n]) &= [(u+v)(x_1),\dots,(u+v)(x_n)]\\ &= [u(x_1),\dots,u(x_n)] + [v(x_1),\dots,v(x_n)]\\ &= \Phi(u)([x_1,\dots,x_n]) + \Phi(v)([x_1,\dots,x_n]),\end{aligned}$$

also $\Phi(u+v) = \Phi(u)+\Phi(v)$, und ähnlich folgt $\Phi(u\alpha) = \Phi(u)\alpha$ für $\alpha \in K$, also ist der Funktor K-linear.

Offenbar ist für feste Moduln X und Y die Abbildung $\mathrm{Hom}_A(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}_n(A)}(X^n,Y^n)$, $u \mapsto u^n$ injektiv. Sie ist auch surjektiv: Sei $f\colon X^n \longrightarrow Y^n$ eine $\mathrm{M}_n(A)$-lineare Abbildung. Dann gibt es offenbar eine Matrix B mit Einträgen in $\mathrm{Hom}_A(X,Y)$, so dass f gegeben ist durch Rechtsmultiplikation mit B, also

$$f([x_1,\dots,x_n]) = [x_1,\dots,x_n]\cdot B.$$

(Dies folgt wie in Abschnitt 2.5.) Die $\mathrm{M}_n(A)$-Linearität bedeutet

$$[x_1,\dots,x_n]\cdot C\cdot B = f([x_1,\dots,x_n]\cdot C) = f([x_1,\dots,x_n])\cdot C = [x_1,\dots,x_n]\cdot B\cdot C,$$

also $BC = CB$ für alle Matrizen $C \in \mathrm{M}_n(A)$. Nutzt man diese Bedingung für die Standardbasismatrizen $C = e_{ij}$ aus, so erhält man, dass es eine lineare Abbildung $u\colon X \longrightarrow Y$ gibt mit

$$B = \begin{pmatrix} u & & \\ & \ddots & \\ & & u \end{pmatrix}, \tag{2.8.1}$$

d. h. $f = u^n$. Also gilt $f = \Phi(u)$.

Es ist noch zu zeigen, dass es zu jedem $\mathrm{M}_n(A)$-Modul Y einen A-Modul X gibt mit $Y \simeq \Phi(X)$. Setze $e_i = e_{ii}$. Es gilt

$$e_i^2 = e_i, \quad e_ie_j = 0 \text{ für } i \neq j, \ \sum_{i=1}^n e_i = 1.$$

Damit bekommt man eine Zerlegung

$$Y = \bigoplus_{i=1}^n Ye_i$$

(denn $y = y\cdot 1 = \sum_{i=1}^n ye_i$; für die Eindeutigkeit multipliziere mit e_j). Jeder Summand Ye_i ist abgeschlossen gegen Rechtsmultiplikation mit Diagonalmatrizen: Eine solche hat die Form $\sum_{j=1}^n e_ja_j$, und es ist

$$ye_i(\sum_{j=1}^n e_ja_j) = ye_ie_ia_i = ye_ia_i = ya_ie_i,$$

und ya_i ist in Y für jedes $y \in Y$. Hierbei werden Elemente aus A mit Skalarmatrizen in $\mathrm{M}_n(A)$ identifiziert. Insbesondere ist dann jedes Ye_i ein A-Modul. Wegen $e_ie_{ij} = e_{ij}e_j$ und $e_{ij}e_{jk} = e_{ik}$ erhält man Isomorphismen

$$Ye_1 \longrightarrow Ye_j, \ x \mapsto xe_{1j},$$

und es folgt $Y \simeq (Ye_1)^n = \Phi(Ye_1)$. □

2.8.9. Seien zwei K-Algebren A und B gegeben. Ist M ein A-Modul und N ein B-Modul, so ist $M \oplus N$ ein $A \times B$-Modul vermöge

$$(x, y) \cdot (a, b) = (xa, yb)$$

für alle $a \in A$, $b \in B$, $x \in M$ und $y \in N$.

Die Kategorie $\operatorname{mod} -A \times \operatorname{mod} -B$ besteht aus folgendem: Die Objekte sind Paare (M, N) mit $M \in \operatorname{mod} -A$ und $N \in \operatorname{mod} -B$. Ein Morphismus $(M, N) \xrightarrow{f} (M', N')$ ist gegeben durch ein Paar $f = (u, v)$, also $f(m, n) = (u(m), v(n))$, wobei $u\colon M \longrightarrow M'$ A-linear ist und $v\colon N \longrightarrow N'$ B-linear.

Satz 2.8.10. *Seien A und B zwei K-Algebren. Die Zuordnung*

$$\Phi\colon \operatorname{mod} -A \times \operatorname{mod} -B \longrightarrow \operatorname{mod} -(A \times B),\ (M, N) \mapsto M \oplus N$$

definiert eine Äquivalenz von K-Kategorien.

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_A(M, N) \times \operatorname{Hom}_B(M', N') & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{A\times B}(M \oplus M', N \oplus N') \\ (u, v) & \mapsto & \begin{pmatrix} u & \\ & v \end{pmatrix} \end{array}$$

ist offenbar K-linear und injektiv. Sie ist auch surjektiv: Seien $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1) \in A \times B$. Es gilt

$$e_1^2 = e_1,\quad e_2^2 = e_2,\quad e_1 e_2 = 0 = e_2 e_1,\quad e_1 + e_2 = 1. \tag{2.8.2}$$

Sei nun $h\colon M \oplus N \longrightarrow M' \oplus N'$ eine $A \times B$-lineare Abbildung. Diese ist gegeben durch eine Matrix

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

Linearität liefert $h(x \cdot e_1) = h(x)e_1$ und $h(x \cdot e_2) = h(x)e_2$ für alle $x \in M \oplus N$, und dies bedeutet, dass diese Matrix mit den Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vertauscht, und dies führt unmittelbar zu

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & \\ & h_{22} \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man die gewünscht Surjektivität.

Wegen (2.8.2) erhält man weiter, dass für jeden $A \times B$-Modul Y gilt

$$Y = Ye_1 \oplus Ye_2 \simeq \Phi(Ye_1, Ye_2).$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Folgerung 2.8.11. *Sei A halbeinfache K-Algebra. Dann gibt es Divisionsalgebren $D_1, \ldots, D_t$, so dass die K-Kategorie* $\operatorname{mod} -A$ *äquivalent ist zur K-Kategorie*

$$\operatorname{mod}(D_1) \times \ldots \times \operatorname{mod}(D_t).$$

Beweis. Folgt nun aus dem Strukturatz von Wedderburn. □

Bemerkung 2.8.12. Um die Kategorie $\operatorname{mod}(D_1) \times \ldots \times \operatorname{mod}(D_t)$ zu verstehen, genügt es, die einzelnen Kategorien $\operatorname{mod}(D_i)$ zu studieren. Hierbei handelt es sich um die Kategorie endlichdimensionaler Vektorräume über einem Schiefkörper, wie man sie (bis auf die Nichtkommutativität) in der Linearen Algebra studiert.

KAPITEL 3

Das Jacobson-Radikal

In diesem Kapitel fahren wir fort mit der Annahme, dass A eine endlichdimensionale K-Algebra ist (K ein Körper), und dass Moduln endlich erzeugte Rechtsmoduln sind.

In diesem Kapitel betrachten wir beliebige endlichdimensionale Algebren und beweisen wichtige Eigenschaften über deren Radikal, dem Jacobson-Radikal.

3.1. Das Radikal einer Algebra

Das Radikal $\mathrm{Rad}(A)$ einer Algebra A wurde definiert als Radikal des Moduls A_A, ist also der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale in A. In Folgerung 2.4.3 wurde gezeigt, dass $\mathrm{Rad}(A)$ ein (zweiseitiges) Ideal ist. Wir werden hier zeigen, dass es übereinstimmt mit dem Durchschnitt aller maximalen Linksideale, so dass man eine links-rechts-Symmetrie hat.

DEFINITION 3.1.1. Das Radikal $\mathrm{Rad}(A)$ einer Algebra A nennt man auch das *Jacobson-Radikal* von A. Häufig wird es auch mit $J(A)$ bezeichnet.

3.1.2 (Invertierbarkeit). $x \in A$ habe ein Rechtsinverses y, also mit $xy = 1$. Für jedes $a \in A$ gilt dann $a = (ax)y$, also ist die Rechtsmultiplikation mit y surjektiv. Da es sich um eine K-lineare Abbildung handelt, folgt aus der Endlichdimensionalität sogar die Bijektivität, und $(yx)y = y(xy) = y1 = y$ impliziert dann auch $yx = 1$. Eine ähnliche Betrachtung gilt für Linksinverse.

Fazit: In einer endlichdimensionalen Algebra sind einseitig (d. h. links- oder rechts-) invertierbare Elemente schon (zweiseitig) invertierbar.

SATZ 3.1.3. *Das Jacobson-Radikal* $\mathrm{Rad}(A)$ *einer Algebra besteht aus genau den Elementen $x \in R$, so dass $1 - axb$ invertierbar ist für alle a, $b \in A$.*

BEWEIS. Sei $x \in \mathrm{Rad}(A)$. Da $\mathrm{Rad}(A)$ ein Ideal ist, folgt $axb \in \mathrm{Rad}(A)$ für alle a, $b \in A$, liegt also in jedem maximalen Rechtsideal. Dann hat $1-axb$ ein Rechtsinverses (und ist damit invertierbar nach der Vorbemerkung), bzw. gleichbedeutend $(1 - axb)A = A$: Angenommen, dies gilt nicht, also $(1-axb)A \neq A$. Dann gibt es ein maximales Rechtsideal $\mathfrak{m}$, welches $(1 - axb)A$ umfasst. Dann gilt aber

$$1 = (1 - axb) + axb \in \mathfrak{m},$$

und damit $\mathfrak{m} = A$, Widerspruch.

Sei umgekehrt $x \in A$, so dass $1-axb$ invertierbar ist für alle a, $b \in A$. Ist $x \notin \mathrm{Rad}(A)$, so gibt es ein maximales Rechtsideal $\mathfrak{m}$ mit $x \notin \mathfrak{m}$. Dann gilt $xA + \mathfrak{m} = A$, also gibt es $a \in A$ und $m \in \mathfrak{m}$ mit $1 = xa + m$, aber $m = 1 - xa$ ist invertierbar nach Voraussetzung, Widerspruch. □

FOLGERUNG 3.1.4. *Das Jacobson-Radikal ist auch der Durchschnitt aller maximalen Linksideale, d. h.* $\mathrm{Rad}(A_A) = \mathrm{Rad}({}_AA)$.

BEWEIS. Die Bedingung im vorherigen Satz ist links-rechts-symmetrisch. Den Beweis des Satzes kann man daher genauso gut für Linksideale führen. □

Der Beweis des Satzes zeigt auch:

FOLGERUNG 3.1.5. *Sei $x \in A$, so dass $1 - xa$ invertierbar ist für jedes $a \in A$. Dann ist $x \in \mathrm{Rad}(A)$. (Selbiges gilt, für $1 - ax$.)*

FOLGERUNG 3.1.6. *Sei I ein Rechtsideal oder Linksideal, in dem jedes Element x nilpotent ist. Dann gilt $I \subseteq \mathrm{Rad}(A)$.*

BEWEIS. Ist $x^n = 0$, so gilt

$$(1 - x) \cdot \Big(\sum_{i=0}^{n-1} x^i\Big) = 1,$$

also ist $1 - x$ invertierbar. Liegt nun x in dem Rechtsideal I, und ist $a \in A$, so ist $xa \in I$, also xa nilpotent, also $1 - xa$ invertierbar nach der Vorüberlegung. Damit ist $x \in \mathrm{Rad}(A)$ nach der vorherigen Folgerung. □

SATZ 3.1.7. $\mathrm{Rad}(A)$ *ist der Durchschnitt aller Annullatoren von einfachen A-Moduln. (Aussage gilt auch für Linksmoduln.)*

BEWEIS. Ein einfacher Modul S ist isomorph zu $A/\mathfrak{m}$ für ein maximales Rechtsideal, und umgekehrt ist für jedes maximale Rechtsideal $\mathfrak{m}$ der Faktormodul $A/\mathfrak{m}$ einfach. Nach Übung 1.3.9 ist $\mathrm{Ann}_A(A/\mathfrak{m})$ das größte Ideal, welches in $\mathfrak{m}$ enthalten ist. Es folgt also

$$\bigcap_{S \text{ einf.}} \mathrm{Ann}_A(S) \subseteq \bigcap_{\mathfrak{m} \text{ max.}} \mathfrak{m} = \mathrm{Rad}(A).$$

Umgekehrt, $\mathrm{Rad}(A)$ ist ein Ideal, welches in jedem maximalen Rechtsideal $\mathfrak{m}$ enthalten ist, also wegen der genannten Maximalitätseigenschaft auch in $\mathrm{Ann}_A(A/\mathfrak{m})$. Es folgt also $\bigcap_{S \text{ einf.}} \mathrm{Ann}_A(S) = \mathrm{Rad}(A)$. □

3.2. Das Lemma von Nakayama

LEMMA 3.2.1. *Sei $J = \mathrm{Rad}(A)$ und M ein A-Modul. Dann gilt $MJ \subseteq \mathrm{Rad}(M)$.*

BEWEIS. Für jedes $y \in M$ ergibt die Zuordnung $a \mapsto ya$ einen Homomorphismus $f\colon A \longrightarrow M$. Nach Satz 2.4.2 gilt $f(J) \subseteq \mathrm{Rad}(M)$, also $yJ \subseteq \mathrm{Rad}(M)$. □

SATZ 3.2.2 (Das Lemma von Nakayama). *Sei $J = \mathrm{Rad}(A)$ und M ein (endlich erzeugter) A-Modul. Gilt $MJ = M$, so ist $M = 0$.*

BEWEIS. Nehme $M \neq 0$ an. Dann hat M einen maximalen Untermodul N. Nach dem vorherigen Lemma folgt dann $MJ \subseteq N \subsetneq M$. □

3.2.3. Eine BEWEISVARIANTE: Es gelte $MJ = M$. Nehme $M \neq 0$ an. Sei $x_1, \ldots, x_n$ ein Erzeugendensystem von M. Man kann annehmen, dass die Anzahl $n \geq 1$ dabei minimal ist. Nun ist $x_n \in M = MJ$, und es folgt dass man x_n schreiben kann in der Form

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \quad \text{mit } a_i \in J.$$

Dann ist

$$x_n(1 - a_n) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i a_i.$$

Da nach Satz 3.1.3 das Element $1 - a_n$ invertierbar ist, folgt, dass x_n schon in dem von $x_1, \ldots, x_{n-1}$ erzeugten Untermodul liegt, d. h. M wird schon von $x_1, \ldots, x_{n-1}$ erzeugt. Widerspruch zur Minimalität von n.

BEMERKUNG 3.2.4. Das Lemma von Nakayama mag etwas unscheinbar wirken. Es handelt sich aber um eine außerordentlich häufig benutzte Aussage in der Algebra, insbesondere auch in der Kommutativen Algebra.

ÜBUNG 3.2.5. Sei I ein Rechtsideal in A. Sei M ein Modul und N ein Untermodul. Man zeige

$$(M/N) \cdot I = (N + MI)/N.$$

ÜBUNG 3.2.6. Man beweise folgende erweiterte Version vom Lemma von Nakayama:

Sei $I \subseteq A$ ein Rechtsideal. Dann sind äquivalent:

(i) $I \subseteq \mathrm{Rad}(A)$.
(ii) Für jeden (endlich erzeugten) A-Modul M gilt: Aus $MI = M$ folgt $M = 0$.
(iii) Für jeden (endlich erzeugten) A-Modul M gilt: Ist $N \subseteq M$ ein Untermodul mit $N + MI = M$, dann gilt $N = M$.

ÜBUNG 3.2.7. Sei $J = \mathrm{Rad}(A)$, und M ein A-Modul. Man zeige (Lemma 3.2.1 verbessernd), dass $MJ = \mathrm{Rad}(M)$ gilt.

ÜBUNG 3.2.8. Sei $J = \mathrm{Rad}(A)$ und M ein A-Modul. Man zeige $\mathrm{Soc}(M) = \{u \in M \mid u \cdot J = 0\}$.

3.3. Struktur endlichdimensionaler Algebren

Für ein (Links-/Rechts-/zweiseitiges) Ideal I sei I^n die Menge aller endlichen Summen von Produkten der Form $a_1 a_2 \dots a_n$ mit $a_i \in I$. Dies ist wieder ein (Links-/Rechts-/zweiseitiges) Ideal.

SATZ 3.3.1 (Struktursatz für endlichdimensionale Algebren I). *Sei A eine endlichdimensionale Algebra. Dann gilt:*

(i) *Das Radikal $J = \mathrm{Rad}(A)$ von A ist nilpotent, d. h. es gibt eine natürliche Zahl n mit $J^n = 0$.*
(ii) *Die Faktoralgebra $A/\mathrm{Rad}(A)$ ist halbeinfach.*

BEWEIS. (i) Die Potenzen von J bilden eine absteigende Kette von Idealen

$$J \supset J^2 \supset J^3 \supset \dots \supset J^i \supset J^{i+1} \supset \dots$$

deren K-Dimensionen folglich immer kleiner werden. Es muss dann einen Index n geben, so dass $J^n = J^{n+1}$, also $J^n \cdot J = J^n$. Natürlich ist J^n endlich erzeugt, und mit dem Lemma von Nakayama folgt $J^n = 0$.
(ii) Dies folgt sofort aus Satz 2.4.6. □

FOLGERUNG 3.3.2. $\mathrm{Rad}(A)$ *ist das größte Ideal, in dem alle Elemente nilpotent sind.*

BEMERKUNG 3.3.3. Sei n wie im Satz. Im Jacobson-Radikal ist nicht nur jedes Element nilpotent, sogar jedes Produkt $a_1 a_2 \dots a_n$ von n-Elementen in $\mathrm{Rad}(A)$ ist 0.

PROPOSITION 3.3.4. *Sei $J = \mathrm{Rad}(A)$.*

(i) *Sei S ein einfacher A-Modul. Dann ist $SJ = 0$, und folglich ist S ein einfacher A/J-Modul.*
(ii) *Die (Isomorphieklassen der) einfachen A-Moduln entsprechen bijektiv den (Isomorphieklassen der) einfachen A/J-Moduln.*

BEWEIS. Nach Lemma 3.2.1 gilt $SJ \subseteq \mathrm{Rad}(S) = 0$. Es folgt $J \subseteq \mathrm{Ann}_A(S)$. Nach 1.3.7 ist S auch ein A/J-Modul. Nach Übung 1.3.10 hat S als A-Modul dieselben Untermoduln wie als A/J-Modul (was trivialerweise aus der Definition der A/J-Modulstruktur folgt, die gegeben ist durch $x \cdot (a + J) \overset{def}{=} xa$). Daher ist S auch einfacher A/J-Modul. Dies zeigt (i), und (ii) ergibt sich dann auch aus dem letzten Argument. □

FOLGERUNG 3.3.5. *Jeder einfache A-Modul ist isomorph zu einem einfachen Summanden von $A/\mathrm{Rad}(A)$. Insbesondere gibt es bis auf Isomorphie nur endlich viele einfache A-Moduln.*

BEWEIS. Die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher A-Moduln ist gegeben durch die Anzahl der Matrixalgebren in der Zerlegung der halbeinfachen Algebra $A/\operatorname{Rad}(A)$. □

Ist der Grundkörper K ein perfekter Körper (also z. B. K algebraisch abgeschlossen, oder $\operatorname{Char}(K) = 0$, oder K ein endlicher Körper), so kann der Struktursatz I durch folgende Aufspaltungseigenschaft erweitert werden. Dies ist der *Struktursatz von Wedderburn-Malzew*.

SATZ 3.3.6 (Struktursatz II (Wedderburn, Malzew)). *Sei K ein perfekter Körper und A eine endlichdimensionale K-Algebra. Sei $J = \operatorname{Rad}(A)$. Dann gibt es eine Unteralgebra B von A mit einer direkten Summenzerlegung $A = B \oplus J$ als K-Vektorräume. Dabei ist B eindeutig bestimmt bis auf Konjugation mit Elementen der Form $1 - x$ mit $x \in J$. Ferner ist die Algebra $B \simeq A/J$ halbeinfach.*

Anzumerken ist noch, dass K nicht notwendig perfekt sein muss, sondern lediglich A/J separabel über K; dabei heisst eine K-Algebra A separabel, wenn $A \otimes_K L$ halbeinfache L-Algebra ist für jede Körpererweiterung L/K.

Die Existenzaussage der Aufspaltung geht (wie auch Satz 2.7.2) auf Wedderburn[1] zurück, und wird oft auch der *Hauptsatz* (oder *Aufspaltungssatz*) *von Wedderburn* genannt, während die Eindeutigkeitsaussage auf Malzew[2] zurück geht.

Wir werden den auf Wedderburn zurückgehenden ersten Teil (Aufspaltung) etwas später beweisen, und zwar im Spezialfall, in dem K ein algebraisch abgeschlossener Körper ist, wo sich die Aufspaltungseigenschaft recht leicht beweisen lässt, vgl. Proposition 5.2.1.

ÜBUNG 3.3.7. Sei

$$A = \begin{pmatrix} K & K & \dots & K \\ 0 & K & \dots & K \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & K \end{pmatrix} \subseteq \mathrm{M}_n(K)$$

die Algebra der oberen $n \times n$-Dreiecksmatrizen über dem Körper K. Man bestimme das Jacobson-Radikal von A.

[1] J. H. M. Wedderburn, *On hypercomplex numbers*. Proc. London Math. Soc. (2) , 6 (1908) pp. 77-118

[2] A. I. Mal'tsev, *On the representation of an algebra as a direct sum of the radical and a semi-simple subalgebra*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 36: 1 (1942) pp. 42-45 (In Russian)

KAPITEL 4

Unzerlegbarkeit

In diesem Kapitel fahren wir zunächst fort mit der Annahme, dass A eine endlichdimensionale K-Algebra ist (K ein Körper), und dass Moduln endlich erzeugte Rechtsmoduln sind.

Ein einfacher Modul ist stets unzerlegbar. Im Kapitel über Halbeinfachkeit haben wir gesehen, dass über einer halbeinfachen Algebra auch die Umkehrung gilt. Die Halbeinfachheit der Algebra ist sogar äquivalent dazu. Über einer beliebigen endlichdimensionalen Algebra weichen die Konzepte also voneinander ab. Das Hauptergebnis dieses Abschnittes wird der Satz von Krull-Schmidt sein, der besagt, dass sich jeder Modul (unter oben gemachten Voraussetzungen) in eindeutiger Weise in eine direkte Summe von unzerlegbaren Moduln zerlegen läßt. Dieses Faktum rechtfertigt es, dass in der Darstellungstheorie von Algebren häufig nur unzerlegbare Moduln untersucht werden.

4.1. Lokale Algebren

Für eine endlichdimensionale Algebra A ist $A/\operatorname{Rad}(A)$ ein Produkt von Matrizenringen über Divisionsalgebren. Die folgende Situation ist sehr speziell (ein Faktor, nur 1×1-Matrixring).

DEFINITION 4.1.1. Eine Algebra A heißt *lokal*, falls $A/\operatorname{Rad}(A)$ eine Divisionsalgebra ist.

SATZ 4.1.2. *Folgende Aussagen über die Algebra A sind äquivalent:*

(i) *A ist lokal.*
(ii) *A enthält genau ein maximales Rechtsideal.*
(ii') *A enthält genau ein maximales Linksideal.*
(iii) *$A \neq 0$, und die Summe von zwei Nichteinheiten ist stets wieder eine Nichteinheit.*

In dem Fall ist $J = \operatorname{Rad}(A)$ die Menge der Nichteinheiten, und ist das einzige maximale Rechtsideal wie auch das einzige maximale Linksideal.

BEWEIS. (i)⇒(ii) und (ii'): Sei A lokal, also A/J Divisionsalgebra. Dann ist J ein maximales Rechtsideal in A (vgl. etwa Übung 2.7.8), denn in einer Divisionsalgebra gibt es außer 0 und der Algebra selbst keine weiteren Rechtsideale. Da J der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideal ist, muss J das einzige maximale Rechtsideal sein. Das gleiche Argument gilt auch für Linksideale (wegen 3.1.4).

(ii) oder (ii') ⇒(i): Ist $\mathfrak{m}$ das einzige maximale Rechtsideal, so ist $\mathfrak{m} = J$ und A/J einfacher A-Modul, also Divisionsalgebra nach dem Lemma von Schur. Die Version für Linksideale folgt analog. (Man beachte, dass eine Algebra A Divisionsalgebra offenbar genau dann ist, wenn dies für A^{op} gilt.)

(ii)⇒(iii): Seien x und y zwei Nichteinheiten. Dann haben x und y beide keine Rechtsinversen (siehe 3.1.2), d. h. $xR \neq R$ und $yR \neq R$. Ist $\mathfrak{m} = J$ das einzige maximale Rechtsideal, so folgt $x, y \in \mathfrak{m}$, und daher auch $x + y \in \mathfrak{m}$. Also ist auch $x + y$ nicht invertierbar.

(iii)⇒(ii): Jedes Produkt mit einer Nichteinheit ist wieder eine Nichteinheit (folgt unmittelbar aus 3.1.2), und wegen (iii) bilden daher die Nichteinheiten ein (zweiseitiges)

Ideal I. Da echte Rechts- oder Linksideale keine Einheiten enthalten, sind sie alle in I enthalten. I bildet also sowohl das einzige maximale Rechtsideal wie das einzige maximale Linksideal und stimmt mit J überein.

Der Zusatz folgt aus dem gerade Bewiesenen. □

ÜBUNG 4.1.3. Sei K ein Körper und sei $n \geq 1$. Man zeige, dass $K[T]/(T^n)$ eine lokale K-Algebra ist und bestimme das Radikal.

ÜBUNG 4.1.4. Sei K ein Körper und $K[[T]]$ die Algebra der formalen Potenzreihen $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$. Dabei ist dies nur eine andere Schreibweise für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es werden hier keine Konvergenzbetrachtungen angestellt. Multiplikation zweier formaler Potenzreihen wird (formal) durch das Cauchy-Produkt definiert.

(i) Man zeige, dass $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ in $K[[T]]$ invertierbar ist genau dann, wenn $a_0 \neq 0$ gilt.
(ii) Man zeige, dass $K[[T]]$ lokal ist, und bestimme das Radikal.

ÜBUNG 4.1.5. Sei A eine lokale Algebra. Man zeige, dass 0 und 1 die einzigen Idempotente in A sind.

4.2. Endomorphismenringe unzerlegbarer Moduln

Im Rest dieses Abschnitts benötigen wir nur die Endlichdimensionalität des Endomorphismenrings eines A-Moduls. Im folgenden sei also A eine beliebige K-Algebra, und wir betrachten endlichdimensionale A-Moduln.

PROPOSITION 4.2.1 (Lemma von Fitting). *Sei M ein endlichdimensionaler A-Modul und $f \in \mathrm{End}(M)$. Für genügend große $n \in \mathbb{N}$ gilt dann*

$$M = \mathrm{Kern}(f^n) \oplus \mathrm{Bild}(f^n).$$

BEWEIS. Setze zur Abkürzung $B_i = \mathrm{Bild}(f^i)$ und $K_i = \mathrm{Kern}(f^i)$. Dann hat man ab- bzw. aufsteigende Ketten von Untermoduln

$$\begin{aligned} M &= B_0 \supseteq B_1 \supseteq \ldots \supseteq B_i \supseteq B_{i+1} \supseteq \ldots \\ 0 &= K_0 \subseteq K_1 \subseteq \ldots \subseteq K_i \subseteq K_{i+1} \subseteq \ldots \end{aligned}$$

Für $n > \dim(M_K)$ gilt $B_n = B_{n+1}$ und $K_n = K_{n+1}$, und damit

$$B_n = B_{2n} \quad \text{und} \quad K_n = K_{2n}.$$

Wir zeigen

$$M = B_n \oplus K_n.$$

$M = B_n + K_n$: Sei $x \in M$. Dann ist $f^n(x) \in B_n = B_{2n}$, also gibt es ein $y \in M$ mit $f^n(x) = f^n(f^n(y))$. Dann ist $x - f^n(y) \in K_n$, also $x = f^n(y) + (x - f^n(y)) \in B_n + K_n$.

$B_n \cap K_n = 0$: Sei $x \in B_n \cap K_n$. Dann gibt es $y \in M$ mit $x = f^n(y)$, und es gilt $f^{2n}(y) = f^n(x) = 0$, also $y \in K_{2n} = K_n$. Es folgt $x = f^n(y) = 0$. □

FOLGERUNG 4.2.2. *Sei M unzerlegbar. Dann ist jeder Endomorphismus von M nilpotent oder ein Automorphismus.*

BEWEIS. Sei $f \in \mathrm{End}(M)$. Nach dem Lemma von Fitting gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 1$, so dass $M = \mathrm{Kern}(f^n) \oplus \mathrm{Bild}(f^n)$ gilt. Da M unzerlegbar ist, folgt $\mathrm{Bild}(f^n) = 0$, was $f^n = 0$, also f nilpotent bedeutet, oder $\mathrm{Kern}(f^n) = 0$. Im letzten Fall ist dann f^n injektiv, also auch f. Wegen der Endlichdimensionalität ist f auch surjektiv. □

SATZ 4.2.3. *Sei M ein endlichdimensionaler, unzerlegbarer A-Modul. Dann ist der Endomorphismenring $\mathrm{End}(M_A)$ eine lokale Algebra.*

BEWEIS. Seien f, $g \in \mathrm{End}(M)$, so dass $f+g$ invertierbar ist, aber g nicht. Zu zeigen ist, dass f invertierbar ist. Es gibt einen Endomorphismus h mit $(f+g)h = 1_M$. Es ist mit g auch gh nicht invertierbar. Nach dem Lemma von Fitting ist gh nilpotent. Wir hatten schon gesehen, dass dann $1-gh$ invertierbar ist; es ist aber $1-gh = fh$. Also ist fh invertierbar, und dann auch f. □

ÜBUNG 4.2.4. Man zeige die Umkehrung vorstehenden Satzes: Ist M ein Modul, so dass $\mathrm{End}(M)$ lokal ist, so ist M unzerlegbar. (Dies gilt über beliebigen Ringen.)

4.3. Der Satz von Krull-Remak-Schmidt

SATZ 4.3.1 (Krull-Remak-Schmidt). *Jeder endlichdimensionale Modul M über einer K-Algebra A besitzt eine direkte Zerlegung*

$$M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$$

in unzerlegbare Untermoduln M_i. Jede solche Zerlegung ist bis auf Isomorphie und Reihenfolge der Summanden eindeutig.

BEWEIS. Die *Existenz* einer solchen Zerlegung ergibt sich leicht durch Induktion nach der Dimension von M.

Zur *Eindeutigkeit*: Wir zeigen zunächst einen "Austauschsatz": Sei U ein unzerlegbarer Untermodul von M, der ein direkter Summand ist. Bezeichne mit $j\colon U \longrightarrow M$ bzw. $p\colon M \longrightarrow U$ die zugehörige Inklusion bzw. Projektion, so dass also $p \circ j = 1_U$ gilt. Bezeichne für jeden Summanden M_i die zugehörige Inklusion bzw. Projektion mit $j_i\colon M_i \longrightarrow M$ bzw. $p_i\colon M \longrightarrow M_i$. Es gilt

$$\begin{aligned} p_l \circ j_i &= \begin{cases} 1_{M_i} & i = l \\ 0 & i \neq l \end{cases} \\ \sum_{i=1}^{n} j_i \circ p_i &= 1_M. \end{aligned}$$

Es folgt

$$1_U = p \circ j = \sum_{i=1}^{n} p \circ j_i \circ p_i \circ j.$$

Nach Satz 4.2.3 ist $\mathrm{End}_A(U)$ lokal. Daher muss einer der Summanden $p \circ j_i \circ p_i \circ j$ ein Isomorphismus sein. Es folgt dann, dass es einen Homomorphismus $h\colon M_i \longrightarrow U$ geben muss mit $h \circ (p_i \circ j) = 1_U$ (man sagt: $p_i \circ j$ ist aufspaltender Monomorphismus; dies bedeutet gerade, dass die durch diesen Monomorphismus kanonisch induzierte kurze exakte Folge aufspaltet), und dann ist U isomorph zu einem direkten Summanden von M_i (vgl. 1.6.3). Wegen der Unzerlegbarkeit von M_i ist $p_i \circ j$ ein Isomorphismus. Es gilt also $U \simeq M_i$, und der Isomorphismus $p_i \circ j$ liefert eine Aufspaltung (vgl. 1.6.3)

$$M = \mathrm{Bild}(j) \oplus \mathrm{Kern}(p_i),$$

was schließlich zu einer Zerlegung

$$M = U \oplus \big(M_1 \oplus \ldots \oplus \widehat{M_i} \oplus \ldots \oplus M_n\big)$$

führt. Hierbei bedeutet die Bezeichnung $\widehat{M_i}$, dass der Summand M_i wegzulassen ist.

Seien nun $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ und $M = M'_1 \oplus \ldots \oplus M'_m$ zwei direkte Zerlegungen von M in unzerlegbare Untermoduln. Nach evtl. Umnummerierung kann man nach dem obigen Austauschargument annehmen, dass $M_1 \simeq M'_1$ gilt sowie

$$M'_1 \oplus \big(M_2 \oplus \ldots \oplus M_n\big) = M = M'_1 \oplus \big(M'_2 \oplus \ldots \oplus M'_m\big).$$

Es folgt (vgl. Übung 2.3.5)

$$M_2 \oplus \ldots \oplus M_n \simeq M/M'_1 \simeq M'_2 \oplus \ldots \oplus M'_m.$$

Nach Anwendung von Isomorphismen kann man annehmen, dass die M_i und M'_j *Unter*moduln von M/M'_1 sind. Per Induktion nach n kann man nun annehmen, dass $n = m$ gilt und nach evtl. Umnummerierung $M_2 \simeq M'_2, \ldots, M_n \simeq M'_n$. □

Bemerkung 4.3.2. Obiger Satz wird in der Literatur oft nach Krull-Schmidt benannt, aber richtiger auch als "Satz von Krull-Remak-Schmidt" bezeichnet, nach Wolfgang Krull (1899-1970), Robert Remak (1888-1942) und Otto Schmidt (1891-1956). Remak hat in seiner Doktorarbeit 1911 als Spezialfall einen solchen Zerlegungssatz für endliche Gruppen bewiesen, welcher später von Krull und von Schmidt in unterschiedlicher Weise verallgemeinert wurde. Ein noch allgemeinerer Satz (für unendliche Indexmengen) geht zurück auf G. Azumaya (um 1950).

KAPITEL 5

Projektive Moduln

In diesem Kapitel fahren wir fort mit der Annahme, dass A eine endlichdimensionale K-Algebra ist (K ein Körper), und dass Moduln endlich erzeugte Rechtsmoduln sind.

Halbeinfachheit einer Algebra ist äquivalent dazu, dass jeder Modul projektiv ist. In allgemeiner Situation sind projektive Moduln aber sehr speziell. Deren Struktur soll hier untersucht werden.

5.1. Projektive Hüllen

PROPOSITION 5.1.1. *Sei P ein unzerlegbarer projektiver A-Modul. Dann ist* $\operatorname{Rad}(P)$ *der einzige maximale Untermodul von P. Es ist also $P/\operatorname{Rad}(P)$ ein einfacher A-Modul.*

BEWEIS. Wegen $P \neq 0$ besitzt P einen maximalen Untermodul. Wir nehmen an, es gebe zwei verschiedene maximale Untermoduln U_1 und U_2. Dann gilt $U_1 + U_2 = P$. Seien j_i die zugehörigen Inklusionen. Dann ist $j_1 \oplus j_2 \colon U_1 \oplus U_2 \longrightarrow P$, $(u_1, u_2) \mapsto u_1 + u_2$ ein Epimorphismus. Da P projektiv ist, lässt sich die Identität $1_P \colon P \longrightarrow P$ bzgl. dieses Epimorphismus' liften:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & P \\ & & \swarrow^{h} & & \downarrow{\scriptstyle 1_P} \\ U_1 \oplus U_2 & \xrightarrow{j_1 \oplus j_2} & P & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Bezeichnet $h_i \colon P \longrightarrow U_i$ die i-te Komponentenabbildung von h, so folgt also $j_1 \circ h_1 + j_2 \circ h_2 = 1_P$. Da der Ring $\operatorname{End}_A(P)$ lokal ist, muss einer der beiden Summanden, etwa $j_1 \circ h_1$, ein Isomorphismus sein. Dann ist aber die Inklusion j_1 surjektiv, also $U_1 = P$, Widerspruch. □

DEFINITION 5.1.2 (Projektive Hülle). Sei M ein A-Modul. Ein Epimorphismus $\varphi \colon P \longrightarrow M$ heißt *projektive Hülle* von M, wenn P projektiv ist und $\operatorname{Kern}(\varphi) \subseteq \operatorname{Rad}(P)$ gilt. Häufig nennt man auch nur den Modul P eine projektive Hülle von M, wenn klar ist, welcher Epimorphismus gemeint ist.

FOLGERUNG 5.1.3. *Sei P ein unzerlegbar projektiver Modul und S der einfache Modul $P/\operatorname{Rad}(P)$. Dann ist P eine projektive Hülle von S.*

SATZ 5.1.4 (Eindeutigkeit). *Sei M ein A-Modul und seien $\varphi \colon P \longrightarrow M$ und $\psi \colon Q \longrightarrow M$ projektive Hüllen. Dann gibt es einen Isomorphismus $\varepsilon \colon P \longrightarrow Q$ mit $\psi \circ \varepsilon = \varphi$.*

BEWEIS. Da ψ ein Epimorphismus und P projektiv ist, gibt es einen Homomorphismus $\varepsilon \colon P \longrightarrow Q$ mit $\psi \circ \varepsilon = \varphi$:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & P \\ & & \swarrow^{\varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ Q & \xrightarrow{\psi} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Wegen $\psi(\varepsilon(P)) = M$ gilt $Q = \varepsilon(P) + \operatorname{Kern}(\psi)$. (Denn: Sei $x \in Q$. Dann gibt es ein $y \in P$ mit $\psi(x) = \psi(\varepsilon(y))$. Dann ist $x - \varepsilon(y) \in \operatorname{Kern}(\psi)$ und $x = (x - \varepsilon(y)) + \varepsilon(y) \in$

$\mathrm{Kern}(\psi)+\varepsilon(P)$.) Wegen $\mathrm{Kern}(\psi) \subseteq \mathrm{Rad}(Q) \overset{3.2.7}{=} QJ$ folgt mit dem Lemma von Nakayama (vgl. Übung 3.2.6) $\varepsilon(P) = Q$. Also ist ε surjektiv. Dies liefert eine kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\subset} P \xrightarrow{\varepsilon} Q \longrightarrow 0$$

mit $N = \mathrm{Kern}(\varepsilon)$. Da Q wiederum projektiv ist, spaltet diese Folge auf (vgl. Übung 1.8.2), und es folgt, dass N ein direkter Summand von P ist (vgl. 1.6.3), etwa $P = N \oplus C$. Ist $x \in P$ mit $\varepsilon(x) = 0$, so gilt $\varphi(x) = \psi \circ \varepsilon(x) = 0$, also $N = \mathrm{Kern}(\varepsilon) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi) \subseteq \mathrm{Rad}(P)$. Aus $P = N \oplus C$ folgt $\mathrm{Rad}(P) = \mathrm{Rad}(N) \oplus \mathrm{Rad}(C)$, und dann $N = \mathrm{Rad}(N)$, was aber $N = 0$ bedeutet. Also ist ε auch injektiv. □

PROPOSITION 5.1.5. *Jeder einfache Modul S hat eine projektive Hülle $P(S)$. Diese ist zu einem unzerlegbaren direkten Summanden von A_A isomorph.*

BEWEIS. Sei $A = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$ eine direkte Zerlegung von A_A in unzerlegbare Summanden. Jedes P_i ist projektiv. Es gilt $\mathrm{Rad}(A) = \mathrm{Rad}(P_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Rad}(P_n)$, also ist nach Proposition 5.1.1

$$A/\mathrm{Rad}(A) = P_1/\mathrm{Rad}(P_1) \oplus \ldots \oplus P_n/\mathrm{Rad}(P_n)$$

die Zerlegung von $A/\mathrm{Rad}(A)$ in einfache Summanden. Jeder einfache A-Modul ist nach Folgerung 3.3.5 zu einem solchen Summanden $P_i/\mathrm{Rad}(P_i)$ isomorph; dieser hat P_i als projektive Hülle. □

SATZ 5.1.6 (Existenz). *Jeder A-Modul M hat eine projektive Hülle.*

BEWEIS. Es ist $M/\mathrm{Rad}(M)$ ein halbeinfacher Modul, also

$$M/\mathrm{Rad}(M) = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$$

eine direkte Summe von einfachen A-Moduln (äquivalent: A/J-Moduln) S_i. Nach der zuvor bewiesenen Aussage hat jedes S_i eine projektive Hülle $\pi_i \colon P_i \longrightarrow S_i$. Setze $P = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$. Der Homomorphismus $\pi = \pi_1 \oplus \ldots \oplus \pi_n$ ist eine Surjektion $\pi \colon P \longrightarrow M/\mathrm{Rad}(M)$ mit $\mathrm{Kern}(\pi) = \mathrm{Rad}(P_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Rad}(P_n) = \mathrm{Rad}(P)$.

Da P projektiv ist, faktorisiert π durch den kanonischen Epimorphismus $\nu \colon M \longrightarrow M/\mathrm{Rad}(M)$. Es gibt also einen Homomorphismus $\varphi \colon P \longrightarrow M$ mit $\nu \circ \varphi = \pi$. Dann folgt mit dem Lemma von Nakayama wie im Beweis von Satz 5.1.4, dass φ surjektiv ist. Da $\mathrm{Kern}(\varphi)$ in $\mathrm{Kern}(\pi) = \mathrm{Rad}(P)$ liegt, ist $\varphi \colon P \longrightarrow M$ eine projektive Hülle. □

Der Beweis zeigt auch:

SATZ 5.1.7. *Jeder projektive A-Modul ist bis auf Isomorphie eine direkte Summe von projektiven Hüllen einfacher A-Moduln.*

ÜBUNG 5.1.8. Sei $\varphi \colon P \longrightarrow M$ eine projektive Hülle und $\psi \colon Q \longrightarrow M$ ein Epimorphismus, wobei Q projektiv ist. Man zeige, dass $Q = P' \oplus P''$ gilt, wobei $P' \simeq P$. (D. h. P ist direkter Summand von Q; in diesem Sinne ist die projektive Hülle der kleinste projektive Modul P, der epimorph auf M abbildet.)

SATZ 5.1.9. *Die Zuordnung $P \mapsto P/\mathrm{Rad}(P)$ induziert eine Bijektion von der Menge der Isomorphieklassen unzerlegbarer projektiver A-Moduln in die Menge der Isomorphieklassen einfacher A-Moduln; die Umkehrabbildung wird induziert durch die Zuordnung $S \mapsto P(S)$.*

5.2. Der Aufspaltungssatz von Wedderburn

Wir nennen eine halbeinfache K-Algebra A *aufspaltend*, falls

$$A \simeq \prod_{i=1}^{s} \mathrm{M}_{n_i}(K).$$

Ist K algebraisch abgeschlossen, so gilt dies für jede halbeinfache Algebra; vgl. Folgerung 2.7.3.

PROPOSITION 5.2.1. *Sei A eine endlichdimensionale K-Algebra mit Jacobson-Radikal J, so dass A/J aufspaltet. Dann ist $A = B \oplus J$ eine direkte Summe von K-Vektorräumen, wobei B eine zu A/J isomorphe Unteralgebra von A ist.*

BEWEIS. Aus Satz 5.1.9 folgt, dass $A \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} {P_i}^{n_i}$, mit paarweise nicht-isomorphen unzerlegbar projektiven A-Moduln P_i; jedes P_i ist die projektive Hülle des einfachen $\mathrm{M}_{n_i}(K)$-Moduls S_i. Es gilt dann

$$A \simeq \mathrm{End}(A_A) \simeq \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}({P_1}^{n_1}, {P_1}^{n_1}) & \mathrm{Hom}({P_1}^{n_1}, {P_2}^{n_2}) & \dots & \mathrm{Hom}({P_1}^{n_1}, {P_s}^{n_s}) \\ \mathrm{Hom}({P_2}^{n_2}, {P_1}^{n_1}) & \mathrm{Hom}({P_2}^{n_2}, {P_2}^{n_2}) & \dots & \mathrm{Hom}({P_2}^{n_2}, {P_s}^{n_s}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Hom}({P_s}^{n_s}, {P_1}^{n_1}) & \mathrm{Hom}({P_s}^{n_s}, {P_2}^{n_2}) & \dots & \mathrm{Hom}({P_s}^{n_s}, {P_s}^{n_s}) \end{pmatrix}.$$

Also enthält A eine Unteralgebra B', die isomorph ist zu der Algebra der "Diagonalblöcke"

$$\prod_{i=1}^{s} \mathrm{End}\big({P_i}^{n_i}\big) \simeq \prod_{i=1}^{s} \mathrm{M}_{n_i}\big(\mathrm{End}(P_i)\big),$$

und B' enthält offenbar eine Unteralgebra B, die isomorph ist zu $\prod_{i=1}^{s} \mathrm{M}_{n_i}(K) \simeq A/J$. Da nun B eine halbeinfache Unteralgebra von A ist, folgt $B \cap J = 0$, vgl. Folgerung 3.3.2 und Satz 2.7.1. Ist dann ε der induzierte Algebrenmorphismus $A/J \xrightarrow{\sim} B \subseteq A$, so gilt mit dem natürlichen Algebrenmorphismus $\pi\colon A \to A/J$ offenbar $\pi \circ \varepsilon = 1_{A/J}$, und es folgt $A = B \oplus J$ als K-Vektorräume. □

5.3. Projektive Moduln und idempotente Elemente

Es wurde im vorherigen Abschnitt gezeigt, dass jeder unzerlegbare projektive A-Modul isomorph ist zu einem direkten Summanden von A_A. Diese werden hier genauer beschrieben.

SATZ 5.3.1. (1) *Ein Untermodul P von A_A ist genau dann ein direkter Summand von A_A, wenn es ein idempotentes Element $e \in A$ gibt mit $P = eA$.*

(2) *$P = eA$ (e idempotent) ist unzerlegbar genau dann, wenn aus $e = e_1 + e_2$, wobei e_1 und e_2 idempotent sind und $e_1 e_2 = 0 = e_2 e_1$ gilt, folgt, dass $e_1 = 0$ oder $e_2 = 0$ ist.*

(3) *Ist $P = eA = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$, so gibt es idempotente $e_1, \ldots, e_n$ mit $e = e_1 + \cdots + e_n$ und mit $e_i e_j = 0 = e_j e_i$ für alle $i \neq j$.*

Ein idempotentes $e \in A$ wie in (2) heisst *primitiv*.

BEWEIS. Sei P ein direkter Summand, $A = P \oplus Q$. Dann gibt es $e \in P$ und $f \in Q$ mit $1 = e + f$. Dann ist

$$e - e^2 = (1 - e)e = fe \in P \cap Q = 0,$$

also $e = e^2$ und $fe = 0$. Genauso folgt $f^2 = f$ und $ef = 0$.

Ist umgekehrt $e \in A$ idempotent, so ist auch $f = 1 - e$ idempotent, und es gilt $1 = e + f$ sowie $ef = 0 = fe$. Es folgt sofort $A = eA \oplus fA$. Dies zeigt (1), aber (2) und (3) folgen durch analoge Argumente. □

ÜBUNG 5.3.2. Sei $J = \mathrm{Rad}(A)$. Seien e und f idempotente in A. Man zeige, dass $eA \simeq fA$ genau dann gilt, wenn $eA/eJ \simeq fA/fJ$.

ÜBUNG 5.3.3. Man bestimme bis auf Isomorphie alle unzerlegbaren Moduln über einer halbeinfachen Algebra.

ÜBUNG 5.3.4. Sei $A = K[T]/(T^n)$ ($n \geq 1$, K ein Körper). Man bestimme (bis auf Isomorphie) alle unzerlegbaren projektiven A-Moduln.

ÜBUNG 5.3.5. Sei

$$A = \begin{pmatrix} K & K & \dots & K \\ 0 & K & \dots & K \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & K \end{pmatrix} \subseteq \mathrm{M}_n(K)$$

die Algebra der oberen $n \times n$-Dreiecksmatrizen über dem Körper K. Man bestimme ein Repräsentantensystem der unzerlegbaren projektiven A-Moduln.

5.4. Der Satz von Jordan-Hölder

DEFINITION 5.4.1 (Kompositionsreihe). Sei M ein A-Modul. Ein aufsteigende Kette

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_{\ell-1} \subseteq M_\ell = M$$

von Untermoduln heißt eine *Kompositionsreihe* von M (oder auch Jordan-Hölder-Reihe), falls alle *Faktoren* $S_i = M_i/M_{i-1}$ einfache A-Moduln sind ($i = 1, \ldots, \ell$).

BEMERKUNG 5.4.2. Sei M endlichdimensional. Dann besitzt M eine Kompositionsreihe.

BEWEIS. Ist $M = 0$ oder einfach, so ist die Aussage klar. Seien Untermoduln $M_0, \ldots, M_{i-1}$ schon als Teil einer Kompositionsreihe konstruiert, wobei $M_{i-1} \subsetneq M$ gilt. Dann gibt es einen Untermodul M_i von M, der M_{i-1} echt umfasst und dabei minimale Dimension hat. Dann ist der Faktor M_i/M_{i-1} einfach. Da M endlichdimensional ist, bricht dieses Verfahren nach endlich vielen Schritt ab, d. h. es liegt eine Kompositionsreihe vor. □

Dem gerade geführten Beweis entnimmt man, dass M im allgemeinen mehrere Kompositionsreihen haben kann. Die einfachen Faktoren sind jedoch eindeutig bestimmt (bis auf Reihenfolge):

SATZ 5.4.3 (Jordan-Hölder). *Sei M ein A-Modul und sei*

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_{\ell-1} \subseteq M_\ell = M$$

eine Kompositionsreihe. Die einfachen Faktoren $S_i = M_i/M_{i-1}$ ($i = 1, \ldots, \ell$) sind durch M bis auf Reihenfolge und Isomorphie eindeutig bestimmt.

BEWEIS. Sei S ein einfacher A-Modul mit projektiver Hülle $P = P(S)$. Sei $d_S M = \#\{i \mid 1 \leq i \leq \ell,\ S \simeq S_i\}$ die Anzahl der zu S isomorphen Faktoren in der gegebenen Kompositionsreihe. Es wird gezeigt, dass

$$d_S M = \frac{\dim_K \mathrm{Hom}_A(P, M)}{\dim_K \mathrm{End}_A(S)} \tag{5.4.1}$$

gilt, woraus folgt, dass die Anzahl $d_S M$ eine Invariante von M ist.

Der kanonische Epimorphismus $\pi\colon M_i \longrightarrow M_i/M_{i-1}$ induziert eine K-lineare Abbildung

$$\pi_*\colon \mathrm{Hom}(P, M_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, M_i/M_{i-1}),\ f \mapsto \pi \circ f,$$

die wegen der Projektivität von P surjektiv ist. Der Kern von π_* besteht aus allen $f \in \mathrm{Hom}(P, M_i)$ mit $f(P) \subseteq \mathrm{Kern}(\pi) = M_{i-1}$, also $\mathrm{Kern}(\pi_*) = \mathrm{Hom}(P, M_{i-1})$. Man erhält

$$\mathrm{Hom}(P, S_i) = \mathrm{Hom}(P, M_i/M_{i-1}) \simeq \mathrm{Hom}(P, M_i)/\mathrm{Hom}(P, M_{i-1}).$$

Übergang zu den Dimension liefert

$$\dim_K \mathrm{Hom}(P, S_i) = \dim_K \mathrm{Hom}(P, M_i) - \dim_K \mathrm{Hom}(P, M_{i-1}),$$

und summiert über alle $i = 1, \ldots, \ell$, so ergibt dies wegen $M_\ell = M$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \dim_K \operatorname{Hom}(P, S_i) = \dim_K(P, M). \tag{5.4.2}$$

Für jedes $f \in \operatorname{Hom}(P, S_i)$ gilt $f(\operatorname{Rad}(P)) = 0$ (klar, falls $f = 0$; falls $f \neq 0$, ist $\operatorname{Kern}(f)$ maximal, also gleich $\operatorname{Rad}(P)$), also $\operatorname{Rad}(P) \subseteq \operatorname{Kern}(f)$. Mit dem Homomorphiesatz folgt $\operatorname{Hom}(P, S_i) \simeq \operatorname{Hom}(P/\operatorname{Rad}(P), S)$, und wegen $P/\operatorname{Rad}(P) \simeq S$ folgt

$$\operatorname{Hom}(P, S_i) \simeq \operatorname{Hom}(S, S_i) \simeq \begin{cases} \operatorname{End}(S) & S \simeq S_i \\ 0 & S \not\simeq S_i \end{cases}$$

mit dem Schurschen Lemma. Mit (5.4.2) folgt dann Formel (5.4.1). □

5.4.4. (1) Aus dem Satz von Jordan-Hölder folgt insbesondere, dass die Anzahl $\ell = \ell(M)$ der Kompositionsfaktoren eine Invariante von M ist, die *Länge* von M.

(2) Sei $S_1, \ldots, S_n$ ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen der einfachen A-Moduln, mit festgelegter Reihenfolge. Die Vielfachheiten $d_{S_i} M = d_i$ liefern den *Dimensionsvektor*

$$\underline{\dim}(M) = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Dieser ist eine wichtige Invariante des Moduls M.

5.4.5. Eine Abbildung $h\colon \operatorname{mod}-A \longrightarrow H$, die auf den Objekten von $\operatorname{mod}-A$ definiert ist und in eine abelsche Gruppe H geht, heißt *additiv*, falls für jede kurze exakte Folge $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ in $\operatorname{mod}-A$ gilt $h(Y) = h(X) + h(Z)$. (Es folgt insbesondere: Aus $X \simeq Y$ folgt $h(X) = h(Y)$.)

Übung 5.4.6. (1) Sei H eine abelsche Gruppe und $h\colon \operatorname{mod}-A \longrightarrow H$ eine Abbildung mit $h(M) = h(U) + h(M/U)$ für alle $M \in \operatorname{mod}-A$ und alle Untermoduln U von M, sowie $h(M) = h(M')$ für alle M, $M' \in \operatorname{mod}-A$ mit $M \simeq M'$. Man zeige, dass h additiv ist.

(2) Man untersuche, wie sich Kompositionsreihen unter Isomorphismen verhalten und schließe, dass der Dimensionsvektor zweier isomorpher Moduln gleich ist.

Folgerung 5.4.7. *Bilden des Dimensionsvektors liefert eine additive Funktion* $\underline{\dim}\colon \operatorname{mod}-A \longrightarrow \mathbb{Z}^n$. *Jede additive Funktion* $h\colon \operatorname{mod}-A \longrightarrow H$ *faktorisiert eindeutig über* $\underline{\dim}$, *d. h. es gibt einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus* $\overline{h}\colon \mathbb{Z}^n \longrightarrow H$ *mit* $h = \overline{h} \circ \underline{\dim}$.

Beweis. Nach vorstehender Übung genügt es für die Additivität von $\underline{\dim}$ zu zeigen, dass $\underline{\dim}(M) = \underline{\dim}(U) + \underline{\dim}(M/U)$ für jeden Untermodul U von M gilt. Ist

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_{r-1} \subseteq M_r = U$$

eine Kompositionsreihe von U und

$$0 = M_r/U \subseteq M_{r+1}/U \subseteq \ldots \subseteq M_{\ell-1}/U \subseteq M_\ell/U = M/U$$

eine solche für M/U, so ergibt sich (mit 1.2.6 (2)), dass

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_r \subseteq M_{r+1} \subseteq \ldots \subseteq M_\ell = M$$

eine Kompositionsreihe von M ist, woraus die Additivität sofort folgt.

Sei $h\colon \operatorname{mod}-A \longrightarrow H$ eine additive Funktion. Definiere $\overline{h}\colon \mathbb{Z}^n \longrightarrow H$ durch

$$\overline{h}(d_1, \ldots, d_n) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} d_i h(S_i).$$

Offenbar hat $\overline{h}$ die gewünschten Eigenschaften. Da $\underline{\dim}(S_i) = e_i$ der i-te Standardbasisvektor ist, folgt die Eindeutigkeit von $\overline{h}$. □

Bemerkung 5.4.8. Da $\mathbb{Z}^n$ eine "universelle" additive Funktion erlaubt, nennt man $\mathbb{Z}^n$ auch die *Grothendieckgruppe* von A und bezeichnet sie mit $\mathrm{K}_0(A)$.

Bemerkung 5.4.9. Obiger Beweis zeigt natürlich auch, dass die Längenfunktion $\ell\colon \operatorname{mod}-A \longrightarrow \mathbb{Z}$, $M \mapsto \ell(M)$ additiv ist.

Übung 5.4.10. Sei M ein beliebiger (nicht notwendig endlich erzeugter) Modul über einem beliebigen Ring. Man zeige, dass M endlich erzeugt ist, wenn M eine Kompositionsreihe hat.

KAPITEL 6

Beschränkter Darstellungstyp

6.1. Die Brauer-Thrall-Vermutungen

DEFINITION 6.1.1. Sei A eine endlichdimensionale Algebra. Man sagt, dass A

(1) *endlichen Darstellungstyp* hat, falls es bis auf Isomorphie nur endliche viele endlich erzeugte unzerlegbare A-Moduln gibt.
(2) *beschränkten Darstellungstyp* hat, falls die Längen $\ell(M)$ für alle endlich erzeugten unzerlegbaren A-Moduln M nach oben beschränkt sind.

Trivialerweise ist eine Algebra von endlichem auch von beschränktem Darstellungstyp. Beispiele für Algebren von endlichem Darstellungstyp sind die halbeinfachen Algebren.

ÜBUNG 6.1.2. Sei A eine endlichdimensionale K-Algebra. Man zeige, dass A von beschränktem Darstellungstyp ist genau dann, wenn die Dimensionen $\dim(M_K)$ für alle endlich erzeugten unzerlegbaren A-Moduln M nach oben beschränkt sind.

ÜBUNG 6.1.3. Sei K ein Körper und $n \geq 1$. Die Algebra $A = K[T]/(T^n)$ hat endlichen Darstellungstyp. Die unzerlegbaren A-Moduln sind (bis auf Isomorphie gegeben durch $E_i = K[T]/(T^i)$ $(1 \leq i \leq n)$.

In diesem Kontext gibt es zwei berühmte Vermutungen von Brauer und Thrall (um 1950).

VERMUTUNG 6.1.4 (Brauer-Thrall I). *Jede endlichdimensionale Algebra von beschränktem Darstellungstyp hat schon endlichen Darstellungstyp.*

Oder anders ausgedrückt: Ist eine endlichdimensionale Algebra nicht von endlichem Darstellungstyp, so gibt es unzerlegbare Moduln beliebig hoher (endlicher) Länge (Dimension).

Ziel dieses Kapitels ist es zu zeigen, dass diese Vermutung richtig ist. Die Richtigkeit der Vermutung wurde erstmals von A. V. Roiter 1968 bewiesen. Der hier beschriebene Beweis geht auf M. Auslander und K. Yamagata zurück. Die folgende Präsentation folgt [6, Ch. 7].

Wir formulieren noch die zweite Brauer-Thrall Vermutung, deren Beweis (unter Zusatzbedingungen) weitaus schwieriger ist und daher hier keinen Platz findet.

VERMUTUNG 6.1.5 (Brauer-Thrall II). *Ist A eine endlichdimensionale K-Algebra über einem unendlicher Körper K, die nicht von endlichem Darstellungstyp ist, so gibt es unendliche viele natürliche Zahlen n, zu denen es (jeweils) unendliche viele (nichtisomorphe) unzerlegbare A-Moduln der Länge n gibt.*

Ein Beweis dieser Vermutung über einem algebraisch abgeschlossenen Körper von Nazarova und Roiter 1974 enthielt noch Lücken. Der erste vollständige Beweis (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik verschieden von 2) wurde von R. Bautista vorgelegt. (Die Einschränkung an die Charakteristik wurde später von Bongartz behoben.) Es folgt daraus, dass die Vermutung über jedem vollkommenen, unendlichen Körper richtig ist. Für beliebige (unendliche) Grundkörper ist die Vermutung jedoch noch offen.

6.2. Das Lemma von Harada-Sai

Ein wesentliches Hilfsmittel für den Beweis der Richtigkeit der ersten Brauer-Thrall-Vermutung ist die folgende auf Harada und Sai zurückgehende Aussage. Der Beweis ist nicht schwierig, nur ein bischen technisch.

PROPOSITION 6.2.1 (Harada-Sai). *Seien $M_0, M_1, \ldots, M_{2^n-1}$ unzerlegbare Moduln, alle der Länge $\ell(M_i) \leq n$, und sind $f_i \colon M_{i-1} \longrightarrow M_i$ Homomorphismen, die keine Isomorphismen sind, so gilt $f_{2^n-1} \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1 = 0$.*

BEWEIS. Es wird per Induktion nach m gezeigt, dass die Länge des Bildes von $f_{2^m-1} \circ \ldots \circ f_1$ kleiner oder gleich $n-m$ ist, woraus die Behauptung folgt. Für $m = 1$ folgt dies, da f_1 kein Isomorphismus ist (man nutzt die Additivität von ℓ für die kurzen exakten Folgen $0 \to \mathrm{Bild}(f_1) \to M_1 \to M_1/\mathrm{Bild}(f_1) \to 0$ bzw. $0 \to \mathrm{Kern}(f_1) \to M_0 \to \mathrm{Bild}(f_1) \to 0$ aus: ist f_1 nicht surjektiv, so folgt, $\ell(\mathrm{Bild}(f_1)) < \ell(M_1) \leq n$, ist f_1 nicht injektiv, so folgt $\ell(\mathrm{Bild}(f_1)) < \ell(M_0) \leq n$).

Die Komposition $f_{2^m-1} \circ \ldots \circ f_1$ schreiben wir als Produkt $h \circ g \circ f$, wobei

$$h = f_{2^m-1} \circ \ldots \circ f_{2^{m-1}+1},\ g = f_{2^{m-1}},\ f = f_{2^{m-1}-1} \circ \ldots \circ f_1.$$

Nach Induktionsvoraussetzung haben $\mathrm{Bild}(f)$ und $\mathrm{Bild}(h)$ höchstens die Länge $n-m+1$ (und das folgt dann auch für die Komposition $h \circ g \circ f$). Ist eine der beiden Längen dabei $< n-m+1$, so gilt dies offenbar auch für das Bild der Komposition $h \circ g \circ f$, und dann ist man fertig. Wir nehmen also an, dass die Längen der Bilder von f, h und von $h \circ g \circ f$ die Länge $= n-m+1$ haben (Widerspruchsannahme). Betrachtet man die kurze exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(h \circ g) \to \mathrm{Bild}(f) \overset{(h\circ g)|\mathrm{Bild}(f)}{\longrightarrow} \mathrm{Bild}(h \circ g \circ f) \to 0,$$

so folgt dann $\mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(h \circ g) = 0$. Betrachtet man

$$0 \to \mathrm{Bild}(g \circ f) \cap \mathrm{Kern}(h) \to \mathrm{Bild}(g \circ f) \overset{h|\mathrm{Bild}(g\circ f)}{\longrightarrow} \mathrm{Bild}(h \circ g \circ f) \to 0,$$

so ergibt sich $\mathrm{Bild}(g \circ f) \cap \mathrm{Kern}(h) = 0$. Aufgrund der gemachten Voraussetzungen an die Längen in der Widerspruchsannahme gilt $M_{2^{m-1}-1} = \mathrm{Bild}(f) + \mathrm{Kern}(h \circ g)$ und $M_{2^{m-1}} = \mathrm{Bild}(g \circ f) + \mathrm{Kern}(h)$, so müssen diese übereinstimmen mit den Längen von $M_{2^{m-1}-1}$ bzw. von $M_{2^{m-1}}$. (Hier verwende man zweimal folgendes Argument: Sind $\xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi}$ Homomorphismen, so gilt $\mathrm{Bild}(\psi \circ \phi) \subset \mathrm{Bild}(\psi)$, und Gleichheit gilt genau dann, wenn $M = \mathrm{Bild}(\phi) + \mathrm{Kern}(\psi)$ gilt. Der einfache Beweis als Übung!) Zusammen ergibt dies

$$M_{2^{m-1}-1} = \mathrm{Bild}(f) \oplus \mathrm{Kern}(h \circ g) \text{ und } M_{2^{m-1}} = \mathrm{Bild}(g \circ f) \oplus \mathrm{Kern}(h).$$

Da $M_{2^{m-1}-1}$ und $M_{2^{m-1}}$ unzerlegbar sind, folgt, dass $h \circ g$ injektiv und $g \circ f$ surjektiv ist, woraus sich ergibt, dass g ein Isomorphismus ist, Widerspruch zu der Voraussetzung, dass $f_{2^{m-1}} = g$ kein Isomorphismus ist. □

ÜBUNG 6.2.2. Man zeige: Sind $N \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} L$ Homomorphismen, so gilt $\mathrm{Bild}(\psi \circ \phi) \subset \mathrm{Bild}(\psi)$, und Gleichheit gilt genau dann, wenn $M = \mathrm{Bild}(\phi) + \mathrm{Kern}(\psi)$ gilt.

6.3. Fast-zerfallende Folgen

Zweites wesentliches Hilfsmittel für den Beweis der Richtigkeit der ersten Brauer-Thrall-Vermutung und von zentraler Bedeutung für die Darstellungstheorie von Algebren insgesamt, ist das von M. Auslander und I. Reiten um 1973 entwickelte Konzept der fast-zerfallenden Folgen. Man nennt sie auch Auslander-Reiten-Folgen. Grob gesprochen handelt es sich dabei um kurze exakte Folgen, die minimal sind mit der Eigenschaft, dass sie nicht zerfallen (aufspalten). Wir präsentieren hier gerade nur soviel von der Theorie, wie für den Beweis der Vermutung nötig ist.

DEFINITION 6.3.1. Eine kurze exakte Folge $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ heißt *fast-zerfallend*, falls

(1) sie spaltet nicht auf;
(2) X und Z sind unzerlegbar;
(3) Ist $h\colon Z' \longrightarrow Z$ ein Homomorphismus, der nicht aufspaltender Epimorphismus ist, so faktorisiert h durch g:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & \nwarrow & \uparrow{\scriptstyle h} & & \\ & & & & & & Z' & & \end{array}$$

Ziel dieses Abschnitts ist eine Eindeutigkeits- und, unter der Annahme des beschränkten Darstellungstyps, Existenzaussage für fast-zerfallende Folgen. Wir beschreiben diese nun etwas anders.

DEFINITION 6.3.2. Ein *Morphismus* zwischen *Z-Folgen*, das sind kurze exakte Folgen $\eta\colon 0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ und $\eta'\colon 0 \longrightarrow X' \longrightarrow Y' \longrightarrow Z \longrightarrow 0$, die beide in Z enden, ist ein Paar (α, β) von Homomorphismen, so dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{lccccccccc} \eta\colon & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \| & & \\ \eta'\colon & 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Gibt es einen solchen Morphismus, so schreiben wir $\eta \geq \eta'$.

Will man zu unzerlegbaren Z eine fast-zerfallende Folge $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ konstruieren, so muss man zumindest dafür sorgen, dass X unzerlegbar ist. Dieses Problem wird durch folgende Konstruktion beseitigt.

6.3.3. Sei $\eta\colon 0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ eine Z-Folge. Sei $X = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ eine direkte Zerlegung (etwa in unzerlegbare X_i), bezeichne mit $\alpha_i\colon X \longrightarrow X_i$ die Projektion und mit $\beta_i\colon Y \longrightarrow Y/\sum_{j\neq i} f(X_j) =: Y_i$ die kanonische Surjektion. Definiere $f_i\colon X_i \longrightarrow Y_i$ durch $f_i(x_i) \stackrel{def}{=} \beta_i(f(x_i))$. Dann gilt offenbar $f_i \circ \alpha_i = \beta_i \circ f$, und mit dem Homomorphiesatz erhält man einen eindeutigen Homorphismus g_i, so dass das folgende Diagramm kommutativ ist

$$\begin{array}{lccccccccc} \eta\colon & 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_i} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_i} & & \| & & \\ \eta_i\colon & 0 & \longrightarrow & X_i & \xrightarrow{f_i} & Y_i & \xrightarrow{g_i} & Z & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Dabei ist die untere Folge exakt, denn eine kleine "Diagrammjagd" zeigt, dass $\mathrm{Kern}(g_i) = f_i(X_i)$ gilt. Also ist $(\alpha_i, \beta_i)\colon \eta \longrightarrow \eta_i$ ein Morphismus.

Angenommen, alle Folgen η_i spalten auf. Dann gibt es Homomorphismen $h_i\colon Y_i \longrightarrow X_i$ mit $h_i \circ f_i = 1_{X_i}$. Bezeichnen $j_i\colon X_i \longrightarrow X$ die kanonischen Inklusionen, so definiere $h = \sum_{i=1}^{n} j_i \circ h_i \circ \beta_i$. Dann folgt

$$h \circ f = \sum_{i=1}^{n} j_i \circ h_i \circ \beta_i \circ f = \sum_{i=1}^{n} j_i \circ h_i \circ f_i \circ \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} j_i \circ \alpha_i = 1_X.$$

Also spaltet η auf.

Fazit: Spaltet η nicht auf, so gibt es ein i, so dass auch η_i nicht aufspaltet.

DEFINITION 6.3.4. Für einen Modul Z bezeichne mit $\mathcal{F}(Z)$ die Menge aller nicht-aufspaltenden Folgen $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$, so dass X unzerlegbar ist. Diese Folgen heißen auch *einfache* Z-Folgen.

BEMERKUNG 6.3.5. Es gilt $\mathcal{F}(Z) = \emptyset$ genau dann, wenn Z projektiv ist. (Dies folgt aus Übung 1.8.2 zusammen mit der vorherigen Nummer.)

LEMMA 6.3.6. *Ist $(\alpha, \beta)\colon \eta \longrightarrow \eta'$ ein Morphismus von Z-Folgen mit $\eta' \in \mathcal{F}(Z)$, so ist $\alpha \neq 0$.*

BEWEIS. Wäre $\alpha = 0$, so folgt aus dem Diagramm

$$\begin{array}{lccccccccc} \eta\colon & 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \| & & \\ \eta'\colon & 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$\beta \circ f = 0$, also gibt es (Homomorphiesatz!) ein $\gamma \in \mathrm{Hom}(Z, Y')$ mit $\gamma \circ g = \beta$. Es folgt $g' \circ \gamma \circ g = g' \circ \beta = g = 1_Z \circ g$. Weil g surjektiv ist, folgt $g' \circ \gamma = 1_Z$, d. h. g' ist aufspaltender Epimorphismus, Widerspruch zu $\eta' \in \mathcal{F}(Z)$. □

FOLGERUNG 6.3.7. (1) *Ist $(\alpha, \beta)\colon \eta \longrightarrow \eta$ mit $\eta \in \mathcal{F}(Z)$, so sind α und β Isomorphismen.*

(2) *Sind $\eta, \eta' \in \mathcal{F}$, dann gilt $\eta \geq \eta'$ und $\eta' \geq \eta$ genau dann, wenn $\eta \simeq \eta'$, d. h. wenn es einen Morphismus $(\alpha, \beta)\colon \eta \longrightarrow \eta'$ gibt mit Isomorphismen α und β (gleichbedeutend, (α, β) ist ein Isomorphismus von Z-Folgen ist).*

BEWEIS. (1) Ist α Isomorphismus, so auch β (folgt aus einer leichten Modifikation von Übung 1.6.4, wie in der Übung besprochen). Ist α kein Isomorphismus, so folgt aus 4.2.2, dass α nilpotent ist, im Widerspruch zum Lemma.

(2) Eine Richtung ist trivial, die andere folgt sofort aus (1). Genauer folgt sogar, dass jeder Morphismus $(\alpha, \beta)\colon \eta \longrightarrow \eta'$ ein Isomorphismus ist. □

Ein Morphismus $(\alpha, \beta)\colon \eta \longrightarrow \eta'$ von Z-Folgen heißt *aufspaltender Monomorphismus von Z-Folgen*, wenn es einen Morphismus $(\alpha', \beta')\colon \eta' \longrightarrow \eta$ von Z-Folgen gibt mit $(\alpha', \beta') \circ (\alpha, \beta) = (1, 1) = 1_\eta$.

LEMMA 6.3.8. *Sei $\eta \in \mathcal{F}(Z)$ minimal (bzgl. $\leq$) und sei η' eine nicht-aufspaltende Z-Folge. Ist $(\alpha, \beta)\colon \eta \longrightarrow \eta'$ ein Morphismus, so ist (α, β) ein aufspaltender Monomorphismus von Z-Folgen.*

BEWEIS. Da η' nicht aufspaltet, folgt aus 6.3.3, dass es einen Morphismus $(\alpha', \beta')\colon \eta' \longrightarrow \eta''$ gibt, wobei $\eta'' \in \mathcal{F}(Z)$. Da η minimal ist, folgt $\eta \simeq \eta''$, und aus dem vorherigen Beweis, folgt, dass $(\alpha', \beta') \circ (\alpha, \beta)$ ein Isomorphismus von Z-Folgen ist. Damit ist (α, β) ein aufspaltender Monomorphismus von Z-Folgen. □

PROPOSITION 6.3.9. *Sei Z unzerlegbar und $\eta\colon 0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ eine einfache Z-Folge. Dann sind äquivalent:*

(1) *η ist fast-zerfallend.*
(2) *Ist η' einfache Z-Folge, so gilt $\eta' \geq \eta$.*
(3) *η ist minimal in $\mathcal{F}(Z)$.*

BEWEIS. (1)⇒(2): Sei η fast-zerfallend und $\eta'\colon 0 \longrightarrow X' \longrightarrow Y' \xrightarrow{g'} Z \longrightarrow 0$ einfach, d. h. g' ist kein aufspaltender Epimorphismus. Eigenschaft (3) einer fast-zerfallenden Folge liefert daher einen Homomorphismus $\beta\colon Y' \longrightarrow Y$ mit $g \circ \beta = g'$. Dies liefert einen Morphismus $\eta' \longrightarrow \eta$.

(2)⇒(3): Dies ist trivial.

(3)⇒(1): Sei η minimal, und sei $h\colon Z' \longrightarrow Z$ kein aufspaltender Epimorphismus. Definiere $g'\colon Y' = Y \oplus Z' \longrightarrow Z$ durch $g'(y,z) = g(y) + h(z)$. Dies ist offenbar surjektiv, aber nicht aufspaltend: Angenommen doch. Dann gibt es also einen Homomorphismus $f'\colon Z \longrightarrow Y' = Y \oplus Z'$ mit $g' \circ f' = 1_Z$. Schreibe $f'(z) = (f_1(z), f_2(z))$ mit $f_1(z) \in Y$ und $f_2(z) \in Z'$. Es folgt $1_Z = g \circ f_1 + h \circ f_2$. Da $\mathrm{End}(Z)$ lokal ist, muss $g \circ f_1$ oder $h \circ f_2$ Isomorphismus sein. Es folgt, dass g oder h aufspaltender Epimorphismus ist. Von beiden ist aber vorausgesetzt, dass sie keine aufspaltenden Epimorphismen sind.

Ist nun $X' = \mathrm{Kern}(g')$, so bekommt man eine nicht aufspaltende Z-Folge $\eta'\colon 0 \longrightarrow X' \longrightarrow Y' \xrightarrow{g'} Z \longrightarrow 0$. Da die natürliche Inklusion $\beta\colon Y \longrightarrow Y \oplus Z' = Y'$ die Bedingung $g' \circ \beta = g$ erfüllt, liefert dies einen Morphismus $(\alpha, \beta)\colon \eta \longrightarrow \eta'$. Nach Lemma 6.3.8 ist dies ein aufspaltender Monomorphismus, liefert also (insbesondere) ein $\beta'\colon Y' = Z' \oplus Y \longrightarrow Y$ mit $\beta' \circ \beta = 1_Y$ und $g \circ \beta' = g'$. Definiere nun $\overline{h}\colon Z' \longrightarrow Y$ durch $\overline{h}(z) = \beta'(z,0)$. Dann gilt $g(\overline{h}(z)) = g(\beta'(z,0)) = g'(z,0) \stackrel{def}{=} h(z)$. □

Satz 6.3.10 (Existenz und Eindeutigkeit fast-zerfallender Folgen). *Es habe A beschränkten Darstellungstyp. Sei Z ein unzerlegbarer Modul, der nicht projektiv ist. Dann gibt es eine fast-zerfallende Folge $\eta\colon 0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$. Diese ist bis auf Isomorphie von Z-Folgen eindeutig.*

Beweis. Da Z nicht projektiv ist, gilt $\mathcal{F}(Z) \neq \emptyset$ nach Bemerkung 6.3.5. Zu zeigen ist nach der vorherigen Proposition, dass $\mathcal{F}(Z)$ eine minimale Folge enthält. Die Eindeutigkeit ergibt dann daraus, dass ein solche Folge ebenfalls nach der vorherigen Proposition auch ein kleinstes Element in $\mathcal{F}(Z)$ ist.

Sei $\eta_0 \in \mathcal{F}(Z)$ beliebig. Ist dies nicht minimal, so gibt es ein kleineres $\eta_1 \in \mathcal{F}(Z)$, also gibt einen Morphismus $\eta_0 \longrightarrow \eta_1$, der kein Isomorphismus ist. Sollte η_1 nicht minimal sein, fährt man so fort. Auf diese Weise konstruiert man eine Kette von Morphismen

$$\eta_0 \xrightarrow{f_1} \eta_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_m} \eta_m,$$

wobei die $f_i = (\alpha_i, \beta_i)$ keine Isomorphismen sind. Nach Lemma 6.3.6 ist die Komposition $\alpha_m \circ \ldots \circ \alpha_1 \circ \alpha_0 \neq 0$. Da A beschränkten Darstellungstyp hat, ist die Länge der dabei auftretenden unzerlegbaren Moduln bechränkt, etwa durch n. Es folgt dann mit dem Lemma von Harada-Sai, dass $m \leq 2^n - 1$ gelten muss. Also stoppt der Prozess, und man erreicht nach endlich vielen Schritten ein minimales Element. □

Bemerkung 6.3.11. Die Existenz (und Eindeutigkeit) von fast-zerfallenden Folgen wie im vorherigen Satz gilt auch ohne die Annahme über den Darstellungstyp. Der Beweis dafür erfordert jedoch sehr viel weitergehende Methoden.

6.4. Fast-zerfallende Morphismen

6.4.1 (Fast-zerfallende Morphismen). Sei Z unzerlegbar. Wir nennen einen Homomorphismus $g\colon Y \longrightarrow Z$ *fast-zerfallend* (minimal rechts fast-zerfallend), falls entweder

- es gibt eine fast-zerfallende Folge der Form $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$, falls Z nicht projektiv ist, oder
- Z projektiv ist und g injektiv mit $\mathrm{Bild}(g) = \mathrm{Rad}(Z)$.

6.4.2. Zwei fast-zerfallende Morphismen $g\colon Y \longrightarrow Z$ und $g'\colon Y' \longrightarrow Z$ heißen *isomorph*, falls es einen Isomorphismus $\beta\colon Y \longrightarrow Y'$ gibt mit $g' \circ \beta = g$.

Proposition 6.4.3 (Existenz, Eindeutigkeit und Eigenschaft fast-zerfallender Morphismen). *Es habe A beschränkten Darstellungstyp. Sei Z unzerlegbar. Dann gibt es einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten fast-zerfallenden Morphismus $g\colon Y \longrightarrow Z$. Jeder Homomorphismus $h\colon Z' \longrightarrow Z$, der kein aufspaltender Epimorphismus ist, faktorisiert duch g.*

BEWEIS. Ist Z nicht projektiv, so folgt dies aus der Definition, Existenz und Eindeutigkeit von fast-zerfallenden Folgen.

Sei Z unzerlegbar projektiv. Sei $g\colon \operatorname{Rad}(P) \longrightarrow P$ die Inklusion. Diese ist injektiv und hat $\operatorname{Rad}(P)$ als Bild. Nach Definition ist die Abbildung also fast-zerfallend. Sei $h\colon Z' \longrightarrow Z$ kein aufspaltender Epimorphismus. Da Z projektiv ist, kann dann h nicht surjektiv sein. Da $\operatorname{Rad}(P)$ der eindeutige maximale Untermodul von P ist, folgt dann $\operatorname{Bild}(h) \subset \operatorname{Rad}(P)$, d. h. h faktorisiert durch g. Dies liefert die gewünschte Faktorisierungseigenschaft. Die Eindeutigkeit folgt aber auch daraus: Ist $g'\colon Y \longrightarrow Z$ ein weiterer fast-zerfallender Morphismus, so gilt $\operatorname{Bild}(g') = \operatorname{Rad}(P)$, also faktorisiert g' durch g, sagen wir $g' = g \circ f$, wobei $f \in \operatorname{Hom}(Y', \operatorname{Rad}(P))$ sogar surjektiv ist. Da g' injektiv ist, gilt dies auch für f, und damit ist f ein Isomorphismus. □

Wir nehmen im folgenden an, dass A beschränkten Darstellungstyp hat.

6.4.4. Sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von unzerlegbaren A-Moduln. Daraus bilden wir eine weitere, eine größere Klassen von unzerlegbaren Moduln $I(\mathcal{C})$: diese besteht aus allen unzerlegbaren Z' mit der Eigenschaft:

(i) Z' ist isomorph zu einem Modul $Z \in \mathcal{C}$, oder
(ii) es gibt einen Modul $Z \in \mathcal{C}$ und einen fast-zerfallenden Morphismus $Y \longrightarrow Z$, so dass Z' ein direkter Summand von Y ist.

Offenbar gilt: Sind $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$ zwei Klassen, so folgt $I(\mathcal{C}) \subseteq I(\mathcal{C}')$.

Man definiert für jede natürliche Zahl k Klassen $I_k(\mathcal{C})$ von unzerlegbaren Moduln induktiv, ausgehend von $\mathcal{C}$:

$$I_0(\mathcal{C}) = \mathcal{C},\ I_{k+1}(\mathcal{C}) = I(I_k(\mathcal{C})).$$

Es gilt

$$\mathcal{C} = I_0(\mathcal{C}) \subseteq I_1(\mathcal{C}) \subseteq I_2(\mathcal{C}) \subseteq \dots$$

LEMMA 6.4.5. *Besteht $\mathcal{C}$ nur aus endlichen vielen unzerlegbaren Moduln bis auf Isomorphie, so gilt dies auch für jedes $I_k(\mathcal{C})$.*

BEWEIS. Man muss per Induktion nur zeigen, dass dies für $I(\mathcal{C})$ gilt. Es gibt bis auf Isomorphie nur endliche viele $Z \in \mathcal{C}$. Zu jedem Z gibt es einen fast-zerfallenden Morphismus $Y \longrightarrow Z$, der bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Nach dem Satz von Krull-Schmidt hat Y nur endlich viele direkte Summanden, die auch bis auf Isomorphie eindeutig sind. Daraus folgt die Behauptung. □

6.5. Der Satz von Roiter

In diesem Abschnitt werden wir den folgenden Satz beweisen:

SATZ 6.5.1. *Sei A eine endlichdimensionale Algebra, dessen Darstellungstyp durch n beschränkt ist. Sei $\mathcal{C}$ die Klasse der einfachen A-Moduln. Dann liegt jeder unzerlegbare A-Modul in $I_m(\mathcal{C})$ für jedes $m \geq 2^n$.*

Wir bekommen unmittelbar folgenden Satz (Brauer-Thrall I), der, wie bereits in der Einleitung des Kapitels erwähnt, zuerst 1968 von A. V. Roiter bewiesen wurde. Der hier geführte Beweis geht auf M. Auslander und K. Yamagata zurück (vgl. [**6**, Kap. 7]).

SATZ 6.5.2 (Roiter, Auslander). *Eine endlichdimensionale Algebra von beschränktem Darstellungstyp ist von endlichem Darstellungstyp.*

BEWEIS. Es ist nur noch anzumerken, dass $I_m(\mathcal{C})$ nach Lemma 6.4.5 bis auf Isomorphie nur endliche viele unzerlegbare Moduln enthält, da es (bis auf Isomorphie) nur endlich viele einfache A-Moduln gibt. □

Wir nehmen im folgenden an, dass A beschränkten Darstellungstyp hat. Das folgende Lemma macht nun ausgiebig Gebrauch von der Existenz fast-zerfallender Morphismen.

LEMMA 6.5.3. *Seien N und M unzerlegbar. Es gebe einen Homomorphismus $f\colon N \longrightarrow M$ mit $f \neq 0$, und es gelte $N \notin I_m(M)$ für ein $m \geq 1$. Dann gibt es eine Kette von Morphismen*

$$Y_m \xrightarrow{f_m} Y_{m-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow Y_2 \xrightarrow{f_2} Y_1 \xrightarrow{f_1} M,$$

wobei alle Y_i unzerlegbar sind, alle f_i Nichtisomorphismen sind und $f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_m \neq 0$ gilt.

BEWEIS. Sei $w\colon W^1 \longrightarrow M$ ein fast-zerfallender Morphismus. Da f offenbar kein aufspaltener Epimorphismus ist, gibt es $u \in \mathrm{Hom}(N, W^1)$ mit $w \circ u = f$. Sei $W^1 = \bigoplus_{i=1}^{s} W_i^1$ eine direkte Zerlegung in unzerlegbare W_i. Dann $w = [w_1^1, \ldots, w_s^1]$ und $u = [u_1^1, \ldots, u_s^1]^{tr}$,

$$0 \neq f = w_1^1 \circ u_1^1 + \ldots + w_s^1 \circ u_s^1.$$

Es muss dann einen Index i geben, mit $w_i^1 \circ u_i^1 \neq 0$. Setze $Y_1 = W_i^1$ und $f_1 = w_i^1$, $g_1 = u_i^1$. Es ist dann $Y_1 \xrightarrow{f_1} M$ ein Nichtisomorphismus (andernfalls wäre w aufspaltender Epimorphismus) $\neq 0$, es gilt sogar $f_1 \circ g_1 \neq 0$, und Y_1 ist unzerlegbar.

(Obwohl nicht notwendig, beschreiben wir jetzt den nächsten Schritt $1 \to 2$, bevor wir zum allgemeinen Konstruktionsschritt $k-1 \to k$ kommen. Ist $m > 1$, so ist $g_1\colon N \longrightarrow Y_1$ kein aufspaltender Epimorphismus. Andernfalls wäre g_1 wegen der Unzerlegbarkeit ein Isomorphismus. Dann wäre $N \in I(Y_1) \subset I_2(M)$. Ist nun $w^2\colon W^2 = \bigoplus_{i=1}^{t} W_i^2 \longrightarrow Y_1$ fast-zerfallend, so gibt es $u^2 \in \mathrm{Hom}(N, W^2)$ mit $w^2 \circ u^2 = g_1$. Es gilt $f_1 \circ w^2 \circ u^2 = f_1 \circ g_1 \neq 0$. Also muss es einen Index i geben mit $f_1 \circ w_i^2 \circ u_i^2 \neq 0$. Setze $Y_2 = W_i^2$, $f_2 = w_i^2$ und $g_2 = u_i^2$. Dann gilt $f_1 \circ f_2 \neq 0$, sogar $f_1 \circ f_2 \circ g_2 \neq 0$, f_2 ist Nichtisomorphismus (andernfalls wäre w^2 aufspaltender Epimorphismus), und Y_2 ist unzerlegbar. Damit ist

$$Y_2 \xrightarrow{f_2} Y_1 \xrightarrow{f_1} M$$

ein Teil wie gesucht.)

Das setzt man induktiv fort: Für $k \leq m$ seien schon

$$Y_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} \ldots \xrightarrow{f_2} Y_1 \xrightarrow{f_1} M$$

und $g_{k-1} \in \mathrm{Hom}(N, Y_{k-1})$ konstruiert, so dass alle Y_i unzerlegbar sind mit $Y_i \in I_i(M)$, f_i sind keine Isomorphismen, es gilt $f_1 \circ f_2 \circ \ldots f_{k-1} \circ g_{k-1} \neq 0$. Dann ist g_{k-1} kein aufspaltender Epimorphismus (= Isomorphismus). Denn andernfalls wäre $N \in I(Y_{k-1})$. Da $Y_{k-1} \in I_{k-1}(M)$ folgte dann $N \in I(I_{k-1}(M)) = I_k(M) \subseteq I_m(M)$, Widerspruch.

Ist also $w^k\colon W^k = \bigoplus_{i=1}^{r} W_i^k \longrightarrow Y_{k-1}$ fast-zerfallend (W_i^k unzerlegbar), so gibt es $u^k \in \mathrm{Hom}(N, W^k)$ mit $w^k \circ u^k = g_{k-1}$. Da

$$f_1 \circ \ldots \circ f_{k-1} \circ w^k \circ u^k = f_1 \circ \ldots \circ f_{k-1} \circ g_{k-1} \neq 0,$$

muss es einen Index i geben mit $f_1 \circ \ldots \circ f_{k-1} \circ w_i^k \circ u_i^k \neq 0$.

Setze $Y_k = W_i^k$, $f_k = w_i^k$ und $g_k = u_i^k$. Dann ist Y_k unzerlegbar mit $Y_k \in I_k(M)$, es gilt $f_1 \circ \ldots \circ f_{k-1} \circ f_k \circ g_k \neq 0$, und f_k ist Nichtisomorphismus (andernfalls wäre w^k aufspaltender Epimorphismus). Damit hat man eine Kette

$$Y_k \xrightarrow{f_k} Y_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} \ldots \xrightarrow{f_2} Y_1 \xrightarrow{f_1} M$$

und einen Homomorphismus $g_k \in \mathrm{Hom}(N, Y_k)$ konstruiert wie oben, nur für k statt $k-1$. □

Fügt man noch das Harada-Sai Lemma hinzu, so bekommt man

FOLGERUNG 6.5.4. *Es sei der Darstellungstyp von A durch n beschränkt. Sind M und N zwei beliebige unzerlegbare A-Moduln, und ist* $\mathrm{Hom}(N, M) \neq 0$*, so gilt $N \in I_m(M)$ für jedes $m \geq 2^n$.*

BEWEIS. Wäre $N \notin I_m(M)$, so konstruiert man wie im Lemma eine Folge von Homomorphismen

$$Y_m \xrightarrow{f_m} Y_{m-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow Y_2 \xrightarrow{f_2} Y_1 \xrightarrow{f_1} M,$$

wobei alle Y_i unzerlegbar sind, alle f_i Nichtisomorphismen sind und $f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_m \neq 0$ gilt. Da $\ell(M) \leq n$ und $\ell(Y_i) \leq n$ für alle i gilt, muss wegen des Lemmas von Harada-Sai $m < 2^n$ gelten. □

FOLGERUNG 6.5.5. *Es sei der Darstellungstyp von A durch n beschränkt. Sei $m \geq 2^n$. Ist N ein beliebiger unzerlegbarer A-Modul, so gibt es einen einfachen Modul S mit $N \in I_m(S)$.*

BEWEIS. N hat einen maximalen Untermodul. Der zugehörige Faktormodul S ist einfach, und es gilt $\mathrm{Hom}(N, S) \neq 0$. □

Damit ergibt sich nun unmittelbar Satz 6.5.1.

ÜBUNG 6.5.6. Wir waren etwas großzügig. Man kann den Wert 2^n auf $2^n - 2$ verbessern. Man finde heraus, wo wir zu großzügig waren.

KAPITEL 7

Äquivalenzen und Dualitäten

7.1. Definitionen und Charakterisierung

Erinnerung: Ein K-Funktor F zwischen zwei K-Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ heisst Äquivalenz, wenn

- F ist treu, d. h. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$, $f \mapsto F(f)$ ist injektiv für alle X, $Y \in \mathcal{C}$;
- F ist voll, d. h. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$, $f \mapsto F(f)$ ist surjektiv für alle X, $Y \in \mathcal{C}$;
- F ist dicht, d. h. zu jedem $Y \in \mathcal{D}$ exisiert ein $X \in \mathcal{C}$ mit $Y \simeq F(X)$.

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei K-Kategorien. Zwei K-Funktoren $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heissen isomorph, $F \simeq G$, falls es für jede jedes Objekt $X \in \mathcal{C}$ einen Isomorphismus $\eta_X\colon F(X) \to G(X)$ gibt, so dass für jeden Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ {\scriptstyle \eta_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_Y} \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

kommutiert. Man nennt dann $\eta\colon F \to G$ auch einen funktoriellen Isomorphismus.

Sind $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ zwei K-Funktoren, so heisst G (eine) Quasiinverse zu F (und umgekehrt), falls

$$F \circ G \simeq 1_{\mathcal{D}} \quad \text{und} \quad G \circ F \simeq 1_{\mathcal{C}}$$

gilt.

Lemma 7.1.1. *Sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein K-Funktor. Äquivalent sind:*

(1) *F ist eine Äquivalenz.*
(2) *Zu F gibt es eine Quasiinverse $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$.*

Beweis. (1)⇒(2): Sei F eine Äquivalenz, d. h. F is treu, voll und dicht. Sei $Y \in \mathcal{D}$. Dann gibt es ein $X \in \mathcal{C}$ mit $Y \simeq F(X)$. Wähle für jedes $Y \in \mathcal{D}$ ein solches $X \in \mathcal{C}$ und einen festen Isomorphismus $\varepsilon_Y\colon F(X) \xrightarrow{\sim} Y$. Definiere $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ wie folgt: $G(Y) = X$, und ist $g\colon Y \to Y'$ ein Morphismus, so definiere $G(g) = f\colon X \to X'$, wobei f der eindeutige Morphismus ist, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varepsilon_Y} & Y \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ F(X') & \xrightarrow{\varepsilon_{Y'}} & Y' \end{array}$$

kommutativ macht. Wegen dieser Eindeutigkeit folgt dann auch $G(gg') = G(g)G(g')$, und G ist ein K-Funktor. Es ist dann offenbar $\varepsilon\colon FG \to 1_{\mathcal{D}}$ ein funktorieller Isomorphismus. Definiere einen funktoriellen Isomorphismus $\varphi\colon GF \to 1_{\mathcal{C}}$ wie folgt: Für $\widetilde{X} \in \mathcal{C}$ definiere mit $Y := F(\widetilde{X})$ und $X = G(Y)$ die Abbildung $\varphi_{\widetilde{X}}\colon GF(\widetilde{X}) \to \widetilde{X}$ als den eindeutig

definierten Morphismus $h\colon X = GF(\widetilde{X}) \to \widetilde{X}$ mit $F(h) = \varepsilon_Y\colon F(X) \to Y$. Offenbar ist $\varphi_{\widetilde{X}} = h$ ein Isomorphismus. Ist $f\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X'}$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} GF(\widetilde{X}) & \xrightarrow{\varphi_{\widetilde{X}}} & \widetilde{X} \\ {\scriptstyle GF(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ GF(\widetilde{X'}) & \xrightarrow{\varphi_{\widetilde{X'}}} & \widetilde{X'} \end{array}$$

kommutativ, denn Anwendung des Funktors F liefert (mit $Y = F(\widetilde{X})$, $Y' = F(\widetilde{X'})$ und $g := F(f)$) das kommutative (!) Diagramm

$$\begin{array}{ccc} FG(Y) & \xrightarrow{\varepsilon_Y} & Y \\ {\scriptstyle FG(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ FG(Y') & \xrightarrow{\varepsilon_{Y'}} & Y' \end{array}$$

Da F treu ist, ist auch das ursprüngliche Diagramm kommutativ.

(2)⇒(1): Sei G quasiinvers zu F. Für jedes $Y \in \mathcal{D}$ gilt $Y \simeq F(G(Y))$, also ist F dicht. Offenbar sind die identischen Funktoren voll und treu. Daher genügt es zu zeigen:

- Sind U und V isomorphe Funktoren, so ist U voll (bzw. treu) genau dann, wenn V voll (bzw. treu) ist.
- Sind U und V Funktoren, so dass $V \circ U$ voll (bzw. treu) ist, so ist V voll (bzw. U treu).

Dies verifiziert man leicht. □

Ein *kontravarianter* Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ hat die Eigenschaft $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ (Vertauschung!) für alle komponierbaren Morphismen f, g in $\mathcal{C}$; für $f\colon X \to Y$ hat man $F(f)\colon F(Y) \to F(X)$. Dies bedeutet nichts anderes, als dass $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$ ein (kovarianter) Funktor ist. Eine kontravariante Äquivalenz nennt man auch Dualität. (Genauer: $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Dualität genau dann, wenn $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (kovariante) Äquivalenz ist.) Daher gilt das vorherige Resultat analog auch für Dualitäten.

7.2. Dualität zwischen Rechts- und Linksmoduln

Sei A eine endlichdimensionale Algebra über dem Körper K. Bezeichne mit $\mathrm{mod}(A)$ die Kategorie der endlich erzeugten (= endlichdimensionalen) A-Rechtsmoduln. Für $M \in \mathrm{mod}(A)$ definiere $D(M) = \mathrm{Hom}_K(M, K)$. Dies ist ein A-Linksmodul, vermöge

$$a \cdot \varphi(m) = \varphi(ma)$$

für alle $a \in A$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(M, K)$ und $m \in M$. Ist umgekehrt, M ein A-Linksmodul, so ist $D(M) = \mathrm{Hom}_K(M, K)$ (wir benutzen denselben Buchstaben!) ein A-Rechtsmodul vermöge $\varphi \cdot a(m) = \varphi(am)$. Offenbar induziert D einen (kontravarianten) K-Funktor

$$D\colon \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A^{op}) \quad \text{sowie} \quad D\colon \mathrm{mod}(A^{op}) \to \mathrm{mod}(A),$$

wobei für Morphismen $\phi\colon M \to M'$ definiert wird $D(f)\colon \mathrm{Hom}_K(M', K) \to \mathrm{Hom}_K(M, K)$, $\phi \mapsto \phi \circ f$.

Satz 7.2.1. $D\colon \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A^{op})$ *ist eine Dualität mit Quasiinverser* $D\colon \mathrm{mod}(A^{op}) \to \mathrm{mod}(A)$*, d. h. es gilt*

$$D \circ D \simeq 1_{\mathrm{mod}(A)} \quad \textit{und} \quad D \circ D \simeq 1_{\mathrm{mod}(A^{op})}.$$

Beweis. Für $X \in \mathrm{mod}(A)$ ist $\eta\colon X \to D(D(X)), x \mapsto e_x$, wobei $e_x \in \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(M, K), K)$ mit $e_x(\phi) = \phi(x)$. Es ist bekannt aus der Linearen Algebra, dass dies ein Isomorphismus von (endlichdimensionalen) K-Vektorräumen ist, und man zeigt, dass es sich sogar um

einen Isomorphismus von A-Moduln handelt. Dieser ist auch funktoriell: Sei $f\colon X \to Y$ in $\mathrm{mod}(A)$. Dann kommutiert

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & D^2X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D^2f} \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & D^2Y \end{array}$$

Denn: Nach Definition schickt $D(D(f))$ ein $\phi \in \mathrm{Hom}_K(D(X), K)$ auf $\phi \circ D(f) \in \mathrm{Hom}_K(D(Y), K)$, also (mit $\phi = e_x$) gilt $D^2(f)(e_x) = e_x \circ D(f)$, das bedeutet für jedes $\psi \in \mathrm{Hom}_K(Y, K)$, dass

$$\begin{aligned} D^2(f)(e_x)(\psi) &= e_x \circ D(f)(\psi) = e_x(D(f)(\psi)) = e_x(\psi \circ f) \\ &= \psi \circ f(x) = \psi(f(x)) = e_{f(x)}(\psi), \end{aligned}$$

also

$$D^2(f)(e_x) = e_{f(x)},$$

was gerade bedeutet, dass obiges Diagramm kommutiert. □

7.3. Bisheriges kategorientheoretisch

Im folgenden seien alle Kategorien K-Kategorien, und alle Funktoren K-linear.

LEMMA 7.3.1 (Monomorphismus). *Sei $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(A)$. Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Äquivalent sind:*

(1) *f ist ein Monomorphismus, d. h. f ist injektiv.*
(2) *Für alle Morphismen $g, h\colon Z \to X$ $(Z \in \mathcal{C})$ gilt: $fg = fh \quad \Rightarrow \quad g = h$.*
(3) *Für alle Morphismen $g\colon Z \to X$ $(Z \in \mathcal{C})$ gilt: $fg = 0 \quad \Rightarrow \quad g = 0$.*

LEMMA 7.3.2 (Epimorphismus). *Sei $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(A)$. Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Äquivalent sind:*

(1) *f ist ein Epimorphismus, d. . f ist surjektiv..*
(2) *Für alle Morphismen $g, h\colon Y \to Z$ $(Z \in \mathcal{C})$ gilt: $gf = hf \quad \Rightarrow \quad g = h$.*
(3) *Für alle Morphismen $g\colon Y \to Z$ $(Z \in \mathcal{C})$ gilt: $gf = 0 \quad \Rightarrow \quad g = 0$.*

Die Eigenschaft (2) macht Sinn in jeder Kategorie, und definiert Mono- und Epimorphismen allgemein. Ähnliches gilt für den Begriff des Kerns:

LEMMA 7.3.3 (Kern). *Sei $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(A)$. Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus. Der Kern $K = \mathrm{Kern}(f) \xrightarrow{i} X$ hat die folgende universelle Eigenschaft:*

(i) *$fi = 0$.*
(ii) *Zu jedem Morphismus $j\colon Z \to X$ $(Z \in \mathcal{C})$ mit $fj = 0$ gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $h\colon Z \to K$ mit $ih = g$.*

Das Paar $(Kern(f), i)$ ist bis auf (eindeutige) Isomorphie durch diese Eigenschaft bestimmt.

BEWEIS. Das Paar $(K = \mathrm{Kern}(f), i)$ (mit i die Inklusionsabbildung) erfüllt diese Eigenschaften: (i) ist klar; zu (ii): sei $j\colon Z \to X$ mit $fj = 0$. Dann gilt $\mathrm{Bild}(j) \subseteq \mathrm{Kern}(f)$, also gilt für den Morphismus $h\colon Z \to \mathrm{Kern}(f)$ mit $h(z) = j(z)$ für alle $z \in Z$ die Eigenschaft $ih = j$; ist $h'\colon Z \to \mathrm{Kern}(f)$ ein zweiter mit $ih' = j$, so gilt $ih = ih'$, und weil i ein Monomorphismus ist, folgt $h = h'$.

Umgekehrt folgt für einen Morphismus $i'\colon K' \to X$ mit diesen Eigenschaften (i) und (ii) (mit (K', i') statt (K, i)): (a) Es ist i' ein Monomorphismus, und (b) es gibt einen eindeutigen Isomorphismus $h\colon \mathrm{Kern}(f) \to K'$ mit $i'h = i$. Zu (a): Sei $g\colon Z \to K'$ mit $i'g = 0$. Insbesondere gilt $f(i'g) = 0$. Es ist also $g\colon Z \to K'$ der nach (ii) eindeutig bestimmte Morphismus $Z \to K'$ mit $i'g = 0$; es gilt aber auch $i'0 = 0$, also folgt $g = 0$. Zu (b): Man wendet (ii) einmal für (K, i) und noch einmal für (K', i') an. Das liefert

eindeutig bestimmte Morphismen $h\colon K \to K'$ und $h'\colon K' \to K$ mit $i'h = i$ und $ih' = i'$. Erneut nach (ii) ist $h'h$ der eindeutig bestimmte Morphismus mit $i(h'h) = i$, aber es gilt auch $i1_K = i$, also $h'h = 1_K$. Analog $hh' = 1_{K'}$. □

Dual: Cokern.

Ein Objekt $P \in \mathcal{C}$ heisst projektiv, wenn für jeden Epimorphismus $Y \xrightarrow{g} Z$ und jeden Morphismus $P \xrightarrow{h} Z$ ein Morphismus $h'\colon P \to Y$ existiert mit $h = gh'$. "Dual" heisst ein Objekt $Q \in \mathcal{C}$ injektiv, wenn für jeden Monomorphismus $X \xrightarrow{f} Y$ und jeden Morphismus $X \xrightarrow{h} Q$ ein Morphismus $h\colon Y \to Q$ existiert mit $h = h'f$. Auch den Begriff einer projektiven Hülle kann man allgemeiner definieren/charakterisieren:

LEMMA 7.3.4 (Projektive Hülle). *Sei $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(A)$ bzw. $\mathrm{mod}(A)$. Sei $\pi\colon P \to M$ ein Epimorphismus mit P projektiv. Äquivalent sind:*

(1) *(P, π) ist eine projektive Hülle von M (d. h. $\mathrm{Kern}(\pi) \subseteq \mathrm{Rad}(P)$).*
(2) *Ist $h\colon Z \to P$ ein Homomorphismus, so dass πh ein Epimorphismus ist, so ist auch h ein Epimorphismus.*

BEWEIS. (1)⇒(2) Sei (P, π) projektive Hülle von M. Sei $h\colon Z \to P$ ein Homomorphismus, so dass πh ein Epimorphismus ist. Sei $x \in P$. Dann gibt es $z \in Z$ mit $\pi(x) = \pi h(z)$, also $x - h(z) \in \mathrm{Kern}(\pi) \subseteq \mathrm{Rad}(P)$. Es folgt

$$x = x - h(z) + h(z) \in \mathrm{Rad}(P) + \mathrm{Bild}(h).$$

Es folgt $\mathrm{Bild}(h) = P$. Denn falls nicht, so gibt es einen maximalen Untermodul $N \subset P$ mit $\mathrm{Bild}(h) \subseteq U$. Aber dann ist $\mathrm{Rad}(P) + \mathrm{Bild}(h) \subseteq U \subsetneq P$, Widerspruch. Also ist h surjektiv.

(2)⇒(1) Sei $x \in K = \mathrm{Kern}(\pi)$. Sei $p\colon P \to P/K$ der natürliche Epimorphismus. Nach dem Homomorphiesatz gibt es einen Monomorphismus $\pi'\colon P/K \to M$ mit $\pi = \pi' p$, und π' ist dann auch ein Epimorphismus, also Isomorphismus. Es folgt: ist $h\colon Z \to P$ ein Homomorphismus, so ist πh ein Epimorphismus genau dann, wenn ph ein Epimorphismus ist, und dies gilt genau dann, wenn $\mathrm{Bild}(h) + K = P$ gilt. Dann man jeden Untermodul U von P als Bild eines h realisieren kann, hat der Untermodul K von P also die Eigenschaft, dass für jeden Untermodul U von P gilt: aus $K + U = P$ folgt $U = P$. (Man sagt: K ist ein kleiner (oder ein überflüssiger) Untermodul von P.) Zu zeigen ist, dass daraus $K \subseteq \mathrm{Rad}(P)$ folgt: angenommen, es gibt einen maximalen Untermodul N von P mit $K \not\subseteq N$. Dann gilt $K + N = P$, also folgt $N = P$, Widerspruch. Also ist K in jedem maximalen Untermodul von P enthalten, d. h. $K \subseteq \mathrm{Rad}(P)$. □

Sei M ein A-Modul. Es heisst ein Monomorhismus $i\colon M \to Q$ eine injektive Hülle, wenn I injektiv ist und $\mathrm{Soc}(I) \subseteq \mathrm{Bild}(i)$ gilt. Dual zur vorherigen Aussage für projektive Hüllen erhält man auch eine kategorientheoretische Definition für injektive Hüllen.

Ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ ist das Nullobjekt, $X = 0$, wenn $1_X = 0_X$ gilt.

LEMMA 7.3.5. *Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$.*

(1) *Es sind äquivalent:*
   (i) *f ist Monomorphismus.*
   (ii) $\mathrm{Kern}(f) = 0$.
(2) *Es sind äquvalent:*
   (i) *f ist Epimorphismus.*
   (ii) $\mathrm{Cokern}(f) = 0$.

DEFINITION 7.3.6. Eine K-Kategorie $\mathcal{C}$ heisst abelsch, wenn folgende Eigenschaften gelten:

(AC1) $\mathcal{C}$ enthält Kerne und Cokerne.
(AC2) Jeder Monomorphismus ist ein Kern und jeder Epimorphismus ist ein Cokern.

(AC3) $\mathcal{C}$ enthält endliche direkte Summen (Coprodukte) und endliche Produkte. (Diese sind dann notwendig isomorph.)

In einer abelschen Kategorie gilt außerdem

(AC4) Jeder Morphismus $f\colon X \to Y$ lässt sich schreiben als $f = ip$ mit $p\colon B \to Y$ Epimorphismus und $i\colon X \to B$ Monomorphismus. (Es heisst dann B das Bild von f, $B = \mathrm{Bild}(f)$.

BEISPIEL 7.3.7. $\mathrm{Mod}(A)$ und $\mathrm{mod}(A)$ sind abelsche Kategorien.

LEMMA 7.3.8. *Sei $\Phi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine Äquivalenz zwischen abelschen Kategorien. Sei $f\colon X \to X'$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Dann*

(1) *f is Monomorphismus genau dann, wenn $\Phi(f)$ Monomorphismus ist.*
(2) *f is Epimorphismus genau dann, wenn $\Phi(f)$ Epimorphismus ist.*
(3) *(K, i) ist Kern von f in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn $(\Phi K, \Phi i)$ Kern von $\Phi(f)$ ist.*
(4) *(C, p) ist Cokern von f in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn $(\Phi C, \Phi p)$ Cokern von $\Phi(f)$ ist.*
(5) *(P, π) ist projektive Hülle von M in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn $(\Phi P, \Phi\pi)$ projektive Hülle von ΦM in $\mathcal{D}$ ist.*
(6) *Es ist $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ exakt in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn $\Phi X \xrightarrow{\Phi f} \Phi Y \xrightarrow{\Phi g} \Phi Z$ exakt ist in $\mathcal{D}$.*
(7) *Ein Objekt $S \in \mathcal{C}$ ist einfach genau dann, wenn $\Phi(S) \in \mathcal{D}$ einfach ist.*
(8) *Ein Objekt $U \in \mathcal{C}$ ist unzerlegbar genau dann, wenn $\Phi(U) \in \mathcal{D}$ unzerlegbar ist.*

LEMMA 7.3.9. *Sei $D\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine Dualität zwischen abelschen Kategorien. Sei $f\colon X \to X'$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Dann*

(1) *f is Monomorphismus genau dann, wenn $D(f)$ Epimorphismus ist.*
(2) *f is Epimorphismus genau dann, wenn $D(f)$ Monomorphismus ist.*
(3) *(K, i) ist Kern von f in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn (DK, Di) Cokern von $D(f)$ ist.*
(4) *(C, p) ist Cokern von f in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn (DC, Dp) Kern von $D(f)$ ist.*
(5) *(P, π) ist projektive Hülle von M in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn $(DP, D\pi)$ injektive Hülle von DM in $\mathcal{D}$ ist.*
(6) *Es ist $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ exakt in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn $DZ \xrightarrow{Dg} DY \xrightarrow{Df} DX$ exakt ist in $\mathcal{D}$.*
(7) *Ein Objekt $S \in \mathcal{C}$ ist einfach genau dann, wenn $D(S) \in \mathcal{D}$ einfach ist.*
(8) *Ein Objekt $U \in \mathcal{C}$ ist unzerlegbar genau dann, wenn $D(U) \in \mathcal{D}$ unzerlegbar ist.*

7.4. Projektive und Injektive Moduln

Wir haben gesehen, dass die unzerlegbar projektiven A-Moduln bis auf Isomorphie gegeben sind durch $e_1A, \ldots, e_nA$. Hierbei ist $e_1, \ldots, e_n$ ein System primitiver, orthogonaler Idempotenter mit $e_1 + e_2 + \cdots + e_n = 1$ (vollständig).

Analoge Aussagen hat man auch für Linksmoduln. Anwendung der Dualität macht aus projektiven A-Linksmoduln injektive A-Rechtsmoduln.

SATZ 7.4.1. *Sei $e_1, \ldots, e_n$ ein vollständiges System primitiver orthogonaler Idempotenter von A. Dann ist ein jeder unzerlegbaren injektive A-Moduln isomorph zu einem von*

$$D(Ae_1), \ldots, D(Ae_n).$$

BEWEIS. $Ae_1, \ldots, Ae_n$ enthalten alle projektiven A-Linksmoduln. Die Aussage ist dann klar nach Eigenschaften der Dualität D. □

FOLGERUNG 7.4.2. *Zu jedem $M \in \mathrm{mod}(A)$ gibt es ein $n \geq 0$ und eine Einbettung $M \to D({}_AA)^n$.*

Man nennt daher $D({}_AA)$ einen injektiven Cogenerator von $\mathrm{mod}(A)$. Dual ist A_A ein projektiver Generator von $\mathrm{mod}(A)$.

ÜBUNG 7.4.3. Man beschreibe die unzerlegbar injektiven A-Moduln in Termen von einfachen Moduln und dem Begriff des Sockels.

ÜBUNG 7.4.4. Sei $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ ein kurze exakte Folge in $\mathrm{mod}(A)$. Sei $M \in \mathrm{mod}(A)$. Zeige:

(1) Es ist $0 \to \mathrm{Hom}(M, X) \to \mathrm{Hom}(M, Y) \to \mathrm{Hom}(M, Z)$ exakt.
(2) Es ist $0 \to \mathrm{Hom}(Z, M) \to \mathrm{Hom}(Y, M) \to \mathrm{Hom}(X, M)$ exakt.
(3) M ist projektiv genau dann, wenn der Funktor $\mathrm{Hom}(P, -)$ kurze exakte Folgen in kurze exakte Folgen überführt, und genau dann, wenn dies für den kontravarianten Funktor $\mathrm{Hom}(-, P)$ gilt.

7.5. Basische Algebren

Sei $e_1, \ldots, e_n$ ein vollständiges System orthogonaler, primitiver Idempotenter von A. Beachte, dass hierbei für verschiedene i, j die Moduln e_iA, e_jA isomorph sein können. Die Algebra A heisst basisch, falls für $i \neq j$ stets $e_iA \not\simeq e_jA$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass mit $J = \mathrm{Rad}(A)$ gilt, dass A/J ein Produkt von Divisionsalgebren ist.

LEMMA 7.5.1. *Sei J das Jacobson-Radikal von A.*

(1) $\mathrm{Hom}(e_iA, e_jA) \simeq e_jAe_i$, $f \mapsto f(e_i)$ *ist ein Isomorphismus.*
(2) $e_iAe_i \simeq \mathrm{End}(e_iA)$ *ist ein lokaler Ring mit Radikal e_iJe_i.*
(3) *Ist $e \in A$ idempotent und $M \in \mathrm{mod}(A)$, so gilt* $\mathrm{Hom}_A(eA, M) \simeq Me$.

BEWEIS. Bei (2) verwendet man die Primitivität der Idempotenten. Für (3) zeigt man, dass $f \mapsto f(e) = f(e)e$ und $xe \mapsto f$ mit $f(e) = x$ zueinander invers sind. □

SATZ 7.5.2. *Sei e Summe von Idempotenten aus $e_1, \ldots, e_n$, wobei aus jeder Isomorphieklasse* genau ein *Idempotenter genommen wird. Sei $P = eA$. Dann gilt:*

(1) *Die Algebra $B = \mathrm{End}_A(P) \simeq eAe$ ist basisch.*
(2) $\mathrm{Hom}_A(P, -)\colon \mathrm{mod}(A) \simeq \mathrm{mod}(B)$ *ist eine Äquivalenz.*
(3) *Ist B' eine basische Algebra mit* $\mathrm{mod}(B') \simeq \mathrm{mod}(A)$, *so gilt $B' \simeq B$.*

Es heisst B die zu A *gehörige basische Algebra.*

Wir zeigen den Satz mit Hilfe einer allgemeineren Konstruktion. Sei $P \in \mathrm{mod}(A)$ beliebig. Sei $B = \mathrm{End}_A(P)$. Definiere den "Evaluationsfunktor"

$$e_P = \mathrm{Hom}_A(P, -)\colon \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(B).$$

Dieser ist links-exakt. Wir betrachten die vollen Teilkategorien von $\mathrm{mod}(A)$

$$\mathrm{add}(P) = \{X \in \mathrm{mod}(A) \mid X \text{ ist direkter Summand von einem } P^n\}$$

und

$$\mathrm{pres}(P) = \{X \in \mathrm{mod}(A) \mid \exists\ P^1 \to P^0 \to X \to 0 \text{ exakt},\ P^0, P^1 \in \mathrm{add}(P)\},$$

die durch P (endlich) präsentierten Moduln.

LEMMA 7.5.3 (Projektivizierung). *Sei $P \in \mathrm{mod}(A)$, sei $B = \mathrm{End}_A(P)$.*

(a) *Für $X \in \mathrm{mod}(A)$ und $Z \in \mathrm{add}(P)$ definiert e_P eine K-lineare Isomorphie*

$$\mathrm{Hom}_A(Z, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(e_P(Z), e_P(X)).$$

(b) *Ist $X \in \mathrm{add}(P)$, so gilt $e_P(X) \in \mathrm{proj}(B)$.*
(c) *Es ist $e_P\colon \mathrm{add}(P) \to \mathrm{proj}(B)$ eine Äquivalenz.*
(d) *Sei P projektiv. Dann ist $e_P\colon \mathrm{pres}(P) \to \mathrm{mod}(B)$ eine Äquivalenz.*

BEWEIS. (a) Ist $f \in \mathrm{Hom}_A(Z,X)$, so ist $e_P(f) = \mathrm{Hom}(P,f)\colon \mathrm{Hom}(P,Z) \to \mathrm{Hom}(P,X)$ der Morphismus mit $e_P(f)(g) = f \circ g$ für alle $g \in \mathrm{Hom}(P,Z)$. Er ist trivialerweise bijektiv, falls $Z = P$ ist. Weil e_P additiv ist, folgt dies dann auch für $Z = P^n$ und direkte Summanden von P^n.

(b) Es ist $e_P(P) = B_B$, und wegen der Additivität $e_P(P^n) = {B_B}^n$, also folgt aus $X \oplus Y \simeq P^n$, dass $e_P(X) \oplus e_P(Y) \simeq {B_B}^n$.

(c) Nach (a) ist $e_{P\,|\,\mathrm{add}(P)}$ voll und treu und landet nach (b) in $\mathrm{proj}(B)$. Um zu zeigen, dass er auch dicht ist, sei Q ein direkter Summand von ${B_B}^n$. Dazu gibt es einen Idempotenten $v \in \mathrm{End}_B(B^n)$ mit $Q = v(B_B)$. Wegen der Volltreue gibt es ein idempotentes $u \in \mathrm{End}_A(P^n)$ mit $v = e_P(u)$, und der durch u definierte direkte Summand von P^n wird durch e_P auf Q geschickt.

(d) Zur Dichtheit: Sei $C_B \in \mathrm{mod}(B)$. Es gibt eine exakte Folge ${B_B}^m \xrightarrow{h} {B_B}^n \to C \to 0$. (Man kann auch eine minimale projektive Präsentation von C nehmen.) Nach (c) gibt es P^0, $P^1 \in \mathrm{pres}(P)$ und einen Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_A(P^1,P^0)$ mit $e_P(P^1) \simeq B^m$, $e_P(P^0) \simeq B^n$, und so, dass sich $e_P(f)$ und h bzgl. dieser Isomorphismen entsprechen. Bildet man den Cokern von f, so ist dessen Bild unter e_P isomorph zu C; hier verwendet man, dass e_P exakt ist, weil P projektiv ist.

$e_{P\,|\,\mathrm{pres}(P)}$ ist voll und treu: Seien $X, Y \in \mathrm{pres}(P)$. Aus einer exakten Folge $P^1 \to P^0 \to X \to 0$ mit P^0, $P^1 \in \mathrm{add}(P)$ ergibt Anwendung des (kontravarianten) Funktors $\mathrm{Hom}_A(-,Y)$ die exakte Folge $0 \to \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(P^0,Y) \to \mathrm{Hom}(P^1,Y)$. Nun folgt die Aussage leicht aus (a) und der Linksexaktheit von e_P. □

Beweis von Satz 7.5.2: (2) Sei $P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_s$, wobei $P_1, \ldots, P_s$ ein Repräsentantensystem für die unzerlegbaren projektiven A-Moduln sind, $P = eA$ mit $e = e_1 + \cdots + e_s$. (Bis auf Nummerierung; $s \leq n$.) Dann gilt $A \in \mathrm{add}(P)$, und es folgt $\mathrm{add}(P) = \mathrm{proj}(A)$ und $\mathrm{pres}(P) = \mathrm{mod}(A)$. Damit ist also

$$e_P\colon \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(B)$$

eine Äquivalenz von K-Kategorien.

(1) Die Algebra B ist basisch. Es gilt $ee_i = e_i = e_ie$ für $1 \leq i \leq s$ und $ee_j = 0 = e_je$ für $s+1 \leq j \leq n$. Es ist $e = e_1 + \cdots + e_s$ das Einselement von eAe. In diesem Ring sind $e_i = ee_ie$ $(i = 1, \ldots, s)$ ein vollständiges System orthogonaler Idempotenter. Da $\mathrm{End}_B(e_P(P_i)) \simeq \mathrm{End}_A(P_i)$ (da e_P voll-treu), und

$$e_P(P_i) = \mathrm{Hom}_A(P,P_i) = \mathrm{Hom}_A(eA,P_i) = P_ie = e_iAe,$$

sind diese Idempotenten auch primitiv. Wegen

$$\mathrm{Hom}_B(e_P(P_i),e_P(P_j)) \simeq \mathrm{Hom}_A(P_i,P_j)$$

gilt $e_P(P_i) \not\simeq e_P(P_j)$ für $1 \leq i, j \leq s$ mit $i \neq j$. Damit ist B basisch.

(3) Eindeutigkeit. Aus den Voraussetzungen folgt, dass die beiden basischen Algebren B und B' Morita-äquivalent sind. Sei $\phi\colon \mathrm{mod}(B) \to \mathrm{mod}(B')$ eine solche Äquivalenz. Da ϕ eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen unzerlegbarer projektiver Moduln induziert, haben wir $\phi(B_B) \simeq B'_{B'}$. Volltreue ergibt einen K-linearen Isomorphismus $\mathrm{End}(B_B) \simeq \mathrm{End}(B'_{B'})$. Es ist leicht zu sehen, dass dies auch ein Ringisomorphismus ist. □

Seien weiterhin Algebren A stets endlichdimensional über einem Körper K. Aus der Eigenschaft (3) folgt unmittelbar:

FOLGERUNG 7.5.4. *Seien A und A' zwei K-Algebren und B bzw. B' zugehörige basische Algebren. Dann gilt: A und A' sind Morita-äquivalent,* $\mathrm{mod}(A) \simeq \mathrm{mod}(A')$, *genau dann, wenn die Algebren B und B' isomorph sind, $B \simeq B'$.* □

Aus dem Struktursatz halbeinfacher Algebren von Wedderburn und Satz 2.8.8 und Satz 2.7.1 folgt sofort:

FOLGERUNG 7.5.5. *Sei A mit zugehöriger basischen Algebra B. Dann gilt: A is halbeinfach genau dann, wenn B ein direktes Produkt von Divisionsalgebren ist.* □

Eine endlichdimensionale K-Algebra A mit Jacobson-Radikal J heisst *elementar*, wenn $A/J \simeq K \times K \times \ldots \times K$. Jede elementare Algebra ist insbesondere basisch. Ist K algebraisch abgeschlossen, so gilt auch die Umkehrung.

7.6. Die Gattung einer endlichdimensionalen Algebra

(Wird ergänzt.)

SATZ 7.6.1 (Gabriel[1]). *Sei K ein perfekter Körper. Sei A eine endlichdimensionale, basische K-Algebra mit Gattung $\Omega = \Omega(A)$ und zugehöriger Tensoralgebra $T(\Omega)$. Dann gibt es ein zulässiges Ideal I in $T(\Omega)$ und einen Isomorphismus $T(\Omega)/I \simeq A$ von Algebren.*

Verzichtet man im Satz darauf, dass A basisch sein muss, dann gilt die schwächere Konklusion, dass A Morita-äquivalent zu $T(\Omega)/I$ ist.

FOLGERUNG 7.6.2. *Sei K ein Körper und Q der Gabriel-Köcher der elementaren K-Algebra A. Dann gibt es ein zulässiges Ideal I in der Wegealgebra KQ und einen Isomorphismus $KQ/I \simeq A$.*

7.7. Erbliche Algebren

Sei A eine endlichdimensionale K-Algebra. Es heisst A (rechts-) erblich, falls jedes Rechtsideal in A projektiv ist.

PROPOSITION 7.7.1. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *A ist erblich.*
(2) $\mathrm{Rad}(A)$ *ist projektiv.*

PROPOSITION 7.7.2. *Sei $A = T(\Omega)/I$ für eine Gattung Ω und einem zulässigem Ideal I. Es ist A erblich genau dann, wenn $I = 0$ gilt.*

FOLGERUNG 7.7.3. *Sei K ein Körper und A eine elementare K-Algebra. Es ist A erblich genau dann, wenn es einen Köcher Q mit $A \simeq KQ$.*

[1] Peter Gabriel, *Indecomposable Representations II*, in Symposia Mathematica, Vol. XI (Convegno di Algebra Commutativa, INDAM, Rome, 1971), 81–104, Academic Press, London, 1973.

KAPITEL 8

Wegealgebren und Darstellungen von Köchern

8.1. Köcher

DEFINITION 8.1.1. Ein *Köcher* ist ein gerichteter Graph. D. h. jede Kante ist mit einer Orientierung/Richtung versehen, die durch eine "Pfeilspitze" kenntlich gemacht wird. Man nennt die Kanten in einem Köcher daher *Pfeile*. Formal ist ein Köcher $\Gamma = (V, E, \alpha, \omega)$, wobei (V, E) ein Graph ist (der *unterliegende* Graph, bezeichnet mit $|\Gamma|$) und $\alpha, \omega \colon E \longrightarrow V$ Abbildungen, wobei $\alpha(a)$ den Anfang und $\omega(a)$ das Ende (Pfeilspitze) eines Pfeiles bezeichnet: Für $i \xrightarrow{a} j$ ist $\alpha(a) = i$ und $\omega(a) = j$. Wir schreiben auch $a = (i, j) = (\alpha(a), \omega(a))$.

Man beachte, dass ein Graph auf verschiedene Arten orientiert werden kann, so dass also verschiedene Köcher denselben unterliegenden Graphen haben können.

8.1.2 (Wege, Zykel). Ein (orientierter) *Weg* in einem Köcher Γ ist eine Folge von Pfeilen $a_1, \ldots, a_s$ in Γ, so dass $\omega(a_i) = \alpha(a_{i+1})$ gilt für alle $i = 1, \ldots, s-1$. Gilt zusätzlich $\omega(a_s) = \alpha(a_1)$, so handelt es sich um einen (orientierten) *Kreis* oder *Zykel*. Wir nennen Γ *zykelfrei* (oder: *ohne orientierte Kreise*, falls Γ keine (orientierten) Kreise enthält. Falls hingegen der unterliegende Graph $|\Gamma|$ keine Zykel enthält, nennen wir Γ *azyklisch*.

8.2. Darstellungen von Köchern

Im folgenden sei K stets ein Körper.

DEFINITION 8.2.1 (Darstellungen). Sei $\Gamma = (I, E, \alpha, \omega)$ ein Köcher. Eine endlichdimensionale K-lineare Darstellung von Γ ist ein Tupel

$$V = (V(i), V(a))_{i \in I,\, a \in E},$$

wobei

- für jedes $i \in I$ ist $V(i)$ ein endlichdimensionaler K-Vektorraum;
- für jedes $a = (i, j) \in E$ ist $V(a) \colon V(i) \longrightarrow V(j)$ eine K-lineare Abbildung.

Im folgenden bedeute *Darstellung* immer *endlichdimensionale K-lineare Darstellung*.

BEISPIEL 8.2.2. (1) Sei Γ der Köcher $\overset{1}{\circ}\longrightarrow\overset{2}{\circ}$. Eine Darstellung von Γ ist nichts anderes als ein Paar von endlichdimensionalen K-Vektorräumen und einem Homomorphismus zwischen diesen.

(2) Sei Γ der Köcher bestehend aus einem Punkt mit einer Schlaufe. Eine Darstellung von Γ ist nicht anderes als ein endlichdimensionaler K-Vektorraum zusammen mit einem Endomorphismus.

8.2.3 (Dimensionsvektor). Sei $V = (V(i), V(a))$ eine K-lineare Darstellung des Köcher Γ. Das Tupel

$$\underline{\dim}(V) = (\dim_K V(1), \ldots, \dim_K V(n)) \in \mathbb{Z}^n$$

heißt der *Dimensionsvektor* von V. Dies ist eine wichtige Invariante der Darstellung V.

DEFINITION 8.2.4 (Morphismen). $\Gamma = (I, E, \alpha, \omega)$ ein Köcher. Seien $V = (V(i), V(a))$ und $W = (W(i), W(a))$ zwei K-lineare Darstellungen. Ein *Morphismus* von $f\colon V \longrightarrow W$ (nur Schreibweise!) ist ein Tupel $(f(i))_{i\in I}$ mit K-linearen Abbildungen $f(i)\colon V(i) \longrightarrow W(i)$, so dass für jeden Pfeil $a = (i, j) \in E$ das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} V(i) & \xrightarrow{f(i)} & W(i) \\ {\scriptstyle V(a)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle W(a)} \\ V(j) & \xrightarrow{f(j)} & W(j), \end{array}$$

also $W(a) \circ f(i) = f(j) \circ V(a)$ gilt.

Komposition zweier Morphismen $f = (f(i))_{i\in I}\colon V \longrightarrow W$ und $g = (g(i))_{i\in I}\colon W \longrightarrow U$ ist definiert als $gf = (g(i) \circ f(i))_{i\in I}\colon V \longrightarrow U$, und dies ist offenbar wieder ein Morphismus von Darstellungen.

Ein Morphismus $f = (f(i))\colon V \longrightarrow W$ heißt *Isomorphismus*, falls $f(i)$ für alle $i \in I$ Isomorphismen sind. Ein Morphismus $f = (f(i))\colon V \longrightarrow W$ heißt *Monomorphismus* (bzw. *Epimorphismus*), falls jedes $f(i)$ injektiv (bzw. surjektiv) ist. Falls $V = W$ gilt, heißt f auch *Endomorphismus*, und falls f zusätzlich Isomorphismus ist, so heißt f *Automorphismus*. Gibt es zwischen zwei Darstellungen V und W einen Isomorphismus, so heißen V und W *isomorph*, und wir schreiben $V \simeq W$.

Zwischen zwei Darstellungen gibt es immer den Nullmorphismus, und jede Darstellung V hat als Endomorphismus den identischen Morphismus $1_V = (1_{V(i)})_{i\in I}$.

Die Menge aller Morphismen von $f\colon V \longrightarrow W$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}(V, W)$. Im Fall $V = W$ schreiben wir $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$. Da man in offensichtlicher Weise die Summe $f + g$ von Morphismen $f, g\colon V \longrightarrow W$ erklären kann, ist $\mathrm{Hom}(V, W)$ ein K-Vektorraum und $\mathrm{End}(V)$ eine K-Algebra (ein Ring).

Die Kategorie aller endlichdimensionalen K-linearen Darstellungen von Γ bezeichen wir mit $\mathcal{L}_K(\Gamma)$. Dies ist eine K-Kategorie. Häufig unterdrücken wir das Wörter "K-linear" und "endlichdimensional" und sprechen nur von Darstellungen.

ÜBUNG 8.2.5. Ein Morphismus $f\colon V \longrightarrow W$ ist ein Isomorphismus genau dann, wenn es einen Morphismus $g\colon W \longrightarrow V$ gibt mit $gf = 1_V$ und $fg = 1_W$.

8.2.6 (Unter-/Faktordarstellungen). Sei $V = (V(i), V(a))$ eine Darstellung. Eine Darstellung $U = (U(i), U(a))$ heißt *Unterdarstellung* von V, falls $U(i) \subseteq V(i)$ Unterräume sind für alle $i \in I$, und falls die Inklusionen $U(i) \overset{\subseteq}{\to} V(i)$ einen Morphismus von Darstellungen definiere, falls also $V(a)(x) = U(a)(x)$ für alle $x \in U(i)$ und für alle Pfeile $a = (i, j)$ gilt.

Ist U eine Unterdarstellung von V, so ist die Faktordarstellung V/U definiert als Faktorvektorraum $(V/U)(i) = V(i)/U(i)$ für jedes $i \in I$, und für alle Pfeile $a = (i, j)$ die K-lineare Abbildung $(V/U)(a)$ definiert wird durch $(V/U)(a)(x + U(i)) \overset{def}{=} V(a)(x) + U(j)$. Dies ist wohldefiniert: Denn ist $x \in U(i)$, so ist $V(a)(x) = U(a)(x) \in U(j)$. Nach Konstruktion liefert dies eine Darstellung.

Offenbar gilt: Ist U eine Unterdarstellung von V, so ist $\underline{\dim}(U) \leq \underline{\dim}(V)$ und $\underline{\dim}(V/U) \leq \underline{\dim}(V)$.

8.2.7 (Kern/Bild/Cokern). Der Kern: Sei $f\colon V \longrightarrow W$ ein Morphismus. Definiere $\mathrm{Kern}(f) = U = (U(i), U(a))$, wobei $U(i) = \mathrm{Kern}(f(i))$, und für jeden Pfeil $a = (i, j)$ sei $U(a)$ die eindeutig bestimmte K-lineare Abbildung $U(i) \longrightarrow U(j)$, so dass das linke

Quadrat im folgenden Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccccc} U(i) & \xrightarrow{\subseteq} & V(i) & \xrightarrow{f(i)} & W(i) \\ {\scriptstyle U(a)}\downarrow & & {\scriptstyle V(a)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle W(a)} \\ U(j) & \xrightarrow{\subseteq} & V(j) & \xrightarrow{f(j)} & W(j). \end{array}$$

Für $x \in U(i) = \operatorname{Kern} f(i)$ definiere $U(a)(x) = V(a)(x)$. Dann gilt

$$f(j)(U(a)(x)) = f(j)(V(a)(x)) = W(a)(f(i)(x)) = W(a)(0) = 0,$$

also liegt das Bild von $U(a)$ in $U(j)$. Das linke Quadrat kommutiert offenbar, und umgekehrt zeigt die Kommutativität, dass man $U(a)$ wie oben definieren muss.

Das Bild: Wird analog definiert. (Übung!)

Der Cokern: Dieser ist definiert als die Faktordarstellung $\operatorname{Cokern}(V) = W/\operatorname{Bild}(f)$.

8.2.8 (Exakte Folgen). Eine Folge

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$$

von Morphismen von Darstellungen heisst exakt, falls $\operatorname{Bild}(f) = \operatorname{Kern}(g)$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass für alle $i \in I$ die Folgen

$$U(i) \xrightarrow{f(i)} V(i) \xrightarrow{g(i)} W(i)$$

K-linear Abbildungen exakt sind.

8.2.9 (Einfache Darstellungen). Eine Darstellung V eines Köchers heißt *einfach*, falls $V \neq 0$ und für jede Unterdarstellung $U \subseteq V$ gilt, dass $U = 0$ oder $U = V$ ist.

Übung 8.2.10. Sei $V \neq 0$ eine Darstellung eines Köchers. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) V ist einfach.
(2) Jede Faktordarstellung von V ist 0 oder gleich V.
(3) Ist $f\colon U \longrightarrow V$ ein Monomorphismus, so gilt $U = 0$ oder f ist ein Isomorphismus.
(4) Ist $g\colon V \longrightarrow W$ ein Epimorphismus, so gilt $W = 0$ oder g ist ein Isomorphismus.

Übung 8.2.11. (1) Sei $\Gamma = (I, E, \alpha, \omega)$ ein Köcher. Für jedes $i \in I = \{1, \ldots, n\}$ definiere eine Darstellung S_i durch

$$S_i(j) = \begin{cases} K & j = i, \\ 0 & j \neq i. \end{cases}$$

und $V(a) = 0$ für alle Pfeile $a \in E$. Dann ist S_i eine einfache Darstellung. Für $i \neq j$ gilt $S_i \not\cong S_j$.

(2) Sei Γ ohne orientierte Kreise und $V \neq 0$ eine Darstellung. Es gibt ein $i \in I$ und einen Monomorphismus $S_i \longrightarrow V$. Es gibt ein $j \in I$ und einen Epimorphismus $V \longrightarrow S_j$.

Proposition 8.2.12. *Sei Γ ohne orientierte Kreise. Jede einfache Darstellung ist isomorph zu einem S_i (für ein $i \in I$).*

Beweis. Ist V einfach, so gibt es (wegen $V \neq 0$) nach vorstehender Übung ein i und einen Monomorphismus $S_i \longrightarrow V$, der aber wegen der Einfachheit von V auch ein Epimorphismus sein muss. □

Übung 8.2.13. Sei Γ der Köcher $\widetilde{\mathbb{A}}_0$ (ein Punkt 1 mit einer Schlaufe a). Für jedes $\alpha \in K$ sei S_α die Darstellung mit $S_\alpha(1) = K$ und $S_\alpha(a)\colon K \longrightarrow K$ die lineare Abbildung mit $S_\alpha(a)(x) = \alpha x$. Man zeige, dass alle S_α einfache Darstellungen sind mit $S_\alpha \not\cong S_\beta$ für alle $\alpha \neq \beta$.

8.2.14 (Direkte Summe). Sei $V = (V(i), (V(a))$ eine Darstellung. V ist *direkte Summe* von zwei Unterdarstellungen $U_1 = (U_1(i), U_1(a))$ und $U_2 = (U_2(i), U_2(a))$, und man schreibt $V = U_1 \oplus U_2$, falls

(1) für jedes $i \in I$ ist der Vektorraum $V(i) = U_1(i) \oplus U_2(i)$ direkte Summe der Unterräume $U_1(i)$ und $U_2(i)$;
(2) für jeden Pfeil a ist die lineare Abbildung $V(a) = U_1(a) \oplus U_2(a)$ direkte Summe der linearen Abbildungen $U_1(a)$ und $U_2(a)$.

Dabei ist die direkte Summe zweier linearer Abbildung wie folgt erklärt: Seien V, V' Vektorräume und $V = U_1 \oplus U_2$ sowie $V' = U_1' \oplus U_2'$ direkte Summen von Unterräumen. Seien $f_1 \colon U_1 \longrightarrow U_1'$ und $f_2 \colon U_2 \longrightarrow U_2'$ lineare Abbildungen. Dann ist $f_1 \oplus f_2 \colon V \longrightarrow V'$ definiert durch $(f_1 \oplus f_2)(u_1 + u_2) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$ für alle $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$.

Sind B_i bzw. B_i' Basen von U_i bzw. U_i' $(i = 1, 2)$, so sind $B = (B_1, B_2)$ bzw. $B' = (B_1', B_2')$ Basen von V bzw. V', und bzgl. solcher Basen wird die lineare Abbildung $f_1 \oplus f_2 \colon V \longrightarrow V'$ dargestellt durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

wobei A_i die Darstellungsmatrix von f_i bzgl. der entsprechenden Basen ist $(i = 1, 2)$.

Man kann die direkte Summe nicht nur für Unterdarstellungen einer Darstellunge definieren, sondern allgemeiner: Sind $V = (V(i), V(a))$ und $W = (W(i), W(a))$ Darstellungen, so definiert man

$$V \oplus W \stackrel{def}{=} (V(i) \oplus W(i), V(a) \oplus W(a)).$$

8.2.15 (Unzerlegbarkeit). Eine Darstellung V heißt *unzerlegbar*, falls $V \neq 0$ ist, und falls aus einer Zerlegung $V = U_1 \oplus U_2$ in eine direkte Summe von Unterräumen stets folgt, dass $U_1 = 0$ oder $U_2 = 0$ gilt.

Offenbar ist jede einfache Darstellung insbesondere unzerlegbar. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

Die beiden folgenden Aussagen zeigt man genau wie für endlichdimensionale Moduln; wir werden später aber noch einen alternativen Beweis dafür via einer Äquivalenz von Kategorien sehen.

Proposition 8.2.16. *Sei V eine Darstellung. Dann sind äquivalent:*

(1) *V ist unzerlegbar.*
(2) *$\mathrm{End}(V)$ hat genau die beiden Idempotenten 0 und 1.*
(3) *$\mathrm{End}(V)$ ist lokal.*

Satz 8.2.17 (Krull-Remak-Schmidt). *Jede K-lineare Darstellung V eines Köchers Γ besitzt eine direkte Zerlegung*

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$$

in unzerlegbare Unterdarstellungen V_i. Jede solche Zerlegung ist bis auf Isomorphie und Reihenfolge der Summanden eindeutig.

8.2.18 (Endlicher Darstellungstyp). Ein Köcher Γ heißt von *endlichem Darstellungstyp* (über dem Körper K), falls es bis auf Isomorphie nur endlich viele unzerlegbare Darstellungen gibt.

8.2.19 (Normalformen). Isomorphie von Darstellungen (oder anderen "Objekten") ist eine Äquivalenzrelation. Man möchte Objekte bis auf Isomorphie klassifizieren. Eine Äquivalenzrelation liefert eine Einteilung in die Äquivalenzklassen. Grob gesprochen ist eine Normalform eines Objektes ein Repräsentant derselben Äquivalenzklasse, welcher sich relativ leicht und prägnant beschreiben lässt und welcher einem Objekt eindeutig zugeordnet werden kann.

In der Linearen Algebra studiert man solche Normalformen in gewissen Fällen. Etwa die Klassifikation von $m \times n$-Matrizen bis auf Äquivalenz. Oder die Klassifikation der quadratischen Matrizen (Endomorphismen) bis auf Ähnlichkeit, welche auf die Jordansche Normalform führt (über algebraisch abgeschlossenem Körper K). Oder die Normalformen orthogonaler, symmetrischer oder unitärer Abbildungen, etc.

Wir gehen nun auf die erstgenannten Probleme näher ein.

Beispiel 8.2.20. Sei $f\colon K^n \longrightarrow K^m$ eine lineare Abbildung. Dies ist gerade eine Darstellung des Köchers $\Gamma\colon \overset{1}{\circ}\longrightarrow\overset{2}{\circ}$. Wir fixieren auf K^n und K^m Basen, etwa die Standardbasen, so dass f durch eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ gegeben ist. Zwei solche Matrizen A und B heißen äquivalent, falls es Matrizen $P \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt mit $B = PAQ$. Anders ausgedrückt, lineare Abbildungen $f, g\colon K^n \longrightarrow K^m$ heißen äquivalent, falls es Isomorphismen $\varphi\colon K^n \longrightarrow K^n$ und $\psi\colon K^m \longrightarrow K^m$ gibt mit $g = \psi f \varphi^{-1}$, bzw. $g\varphi = \psi f$. Dies bedeutet gerade, dass $K^n \xrightarrow{f} K^m$ und $K^n \xrightarrow{g} K^m$ isomorphe Darstellungen von Γ liefern. In der Lineare Algebra I wird eine Normalform für f bzw. angegeben: A ist äquivalent zu der Matrix

$$R = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \end{pmatrix},$$

wobei $r = \mathrm{Rang}(A)$ viele Einsen auftreten und sonst nur Nullen. Wäre $m = n$, so wäre offenbar $R = (1) \oplus (1) \oplus \ldots \oplus (1) \oplus (0) \oplus \ldots (0)$ (r-mal 1), bzw. wäre die Darstellung $K^n \xrightarrow{f} K^m$ isomorph zu einer direkten Summe von Darstellungen der Form

$$\mathbf{1} = (K \xrightarrow{1} K)\ (r\text{-mal}) \text{ und } (K \xrightarrow{0} K) = (K \xrightarrow{0} 0) \oplus (0 \xrightarrow{0} K).$$

Es ist $\mathbf{1}$ eine unzerlegbare Darstellung von Γ, denn es ist offenbar $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = K$. Im Fall $m \neq n$ treten in der direkten Summe die Summanden der Form $0 \xrightarrow{0} K$ und $K \xrightarrow{0} 0$ mit ungleicher Vielfachheit auf. Dies sind einfache Darstellungen, also unzerlegbare Darstellungen.

Zusammengefasst:

Proposition 8.2.21. *Die unzerlegbaren Darstellungen des Köchers* $\Gamma\colon \overset{1}{\circ}\longrightarrow\overset{2}{\circ}$ *sind (bis auf Isomorphie) gegeben durch die drei Darstellungen*

$$K \xrightarrow{1} K,\ 0 \xrightarrow{0} K,\ K \xrightarrow{0} 0.$$

Insbesondere ist Γ *von endlichem Darstellungstyp.*

Bemerkung 8.2.22. (1) Die Dimensionsvektoren der obigen drei unzerlegbaren Darstellungen sind $(1,1)$, $(0,1)$ und $(1,0)$. Dies sind gerade die positiven Wurzeln des Graphen $|\Gamma| = \mathbb{A}_2$.

(2) Für den noch einfacheren Fall $\Gamma = \mathbb{A}_1$ ist die einzige unzerlegbare Darstellung K.

Beispiel 8.2.23. Sei nun Γ der Einschlaufenköcher. Eine Darstellung dieses Köchers ist gerade ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums. Isomorphie von Darstellungen bedeutet gerade Ähnlichkeit von Endomorphismen bzw. quadratischen Matrizen. Wir nehmen nun an, dass der Körper K algebraisch abgeschlossen ist, etwa $K = \mathbb{C}$. In der Linearen Algebra II wird gezeigt, dass der Satz von der Jordanschen Normalform gilt: Jede quadratische Matrix ist ähnlich zu einer direkten Summe von Jordankästchen

der Form

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K).$$

(Einsen ununterbrochen auf der Nebendiagonalen.)

Behauptung: *Die Darstellungen $(K^n, J_n(\lambda))$ sind unzerlegbar und paarweise nicht-isomorph ($n \geq 1$, $\lambda \in K$.)*

Eine direkte Zerlegung von $(V, f) = (K^n, J_n(\lambda))$ ist eine direkte Zerlegung des Vektorraums $V = U_1 \oplus U_2$ in Unterräume U_1 und U_2, die f-invariant sind, d. h. $f(U_1) \subseteq U_1$ und $f(U_2) \subseteq U_2$. Ist $g = f - \lambda \cdot 1_V$, so sind U_1 und U_2 auch g-invariant, und g ist nilpotent mit Nilpotenzindex genau n (was man der Matrix $J_n(0)$ ansieht). Die Einschränkungen von g auf U_1 und U_2 sind ebenfalls nilpotent. Wären dies Matrizen kleineren Formats, so würde dies einen kleineren Nilpotenzindex liefern.

Vergleich der Dimensionen bzw. der Eigenwerte liefert die Nicht-Isomorphie. (Der Beweis gilt offenbar über jedem Körper K.)

Proposition 8.2.24. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Die unzerlegbaren Darstellungen des Einschlaufenköchers sind (bis auf Isomorphie) gegeben durch die Darstellungen*

$$(K^n, J_n(\lambda)) \qquad (n \geq 1,\ \lambda \in K),$$

und diese sind paarweise nicht-isomorph. Insbesondere ist der Einschlaufenköcher nicht von endlichem Darstellungstyp über K.

Bemerkung 8.2.25. Obige Darstellungen sind auch unzerlegbare Darstellungen des Einschlaufenköchers über einem beliebigen Körper K. Jedoch gibt es über nicht-algebraisch abgeschlossenem Körper weitere unzerlegbare Darstellungen.

Bemerkung 8.2.26. Man mache sich umgekehrt klar, dass obige Klassifikationen der unzerlegbaren Darstellungen die beiden beschriebenen Normalformenprobleme aus der Linearen Algebra lösen.

Übung 8.2.27. Sei Γ der Einschlaufenköcher mit Punkt 1 und Schlaufe a. Sei $K = \mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen. Man zeige, dass folgendes V eine einfache Darstellung ist, wobei $V(1) = \mathbb{R}^2$ und $V(a)$ gegeben ist durch die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Man zeige $\mathrm{End}(V) \simeq \mathbb{C}$.

Theorem 8.2.28 (Gabriel). *Sei K ein Körper und Γ ein zusammenhängender Köcher und $|\Gamma|$ der unterliegende Graph. Dann sind äquivalent:*

(1) *Γ ist von endlichem Darstellungstyp.*
(2) *$|\Gamma|$ ist ein Dynkin-Graph $\mathbb{A}_n$ ($n \geq 1$), $\mathbb{D}_n$ ($n \geq 4$) oder $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$, $\mathbb{E}_8$.*

8.3. Darstellungen und Moduln

Sei weiterhin K stets ein Körper.

8.3.1 (Die Wegealgebra eines Köchers). Sei Γ ein Köcher mit Punktmenge $I = \{1, \ldots, n\}$ und Pfeilmenge E. Definiere eine K-Algebra A wie folgt: Als K-Vektorraum wird A frei erzeugt von allen (gerichteten) Wegen in Γ. Dabei gibt es formal auch Wege ε_i der Länge 0 zu jedem Punkt $i \in I$. Die Wege der Länge 1 sind gerade die Pfeile in E. Dieser K-Vektorraum ist offenbar genau dann endlichdimensional, wenn es nur endlich

viele Wege in Γ gibt, und dies gilt genau dann, wenn Γ keine orientierten Kreise enthält. Elemente in A sind also formale Summen

$$\sum_{w \text{ Weg}} \alpha_w \cdot w,$$

wobei $\alpha_w \in K$ fast alle $= 0$ sind; in der obigen Summe sind die Koeffizienten α_w eindeutig bestimmt. Addition und Multiplikation mit Skalaren geschieht "komponentenweise".

Es wird nun eine Multiplikation auf A definiert. Für jeden Weg w sei (ähnlich wie für Pfeile) $\alpha(w)$ der Punkt, in dem w beginnt, und $\omega(w)$ der Punkt, in dem w endet. Seien w_1 und w_2 zwei Wege in Γ. Falls $\alpha(w_2) = \omega(w_1)$ gilt, so kann man w_2 und w_1 *konkatenieren*, d. h. den zusammengesetzten Weg $w_1 * w_2$ mit $\alpha(w_1 * w_2) = \alpha(w_1)$ und $\omega(w_1 * w_2) = \omega(w_2)$ bilden. Definiere

$$w_1 w_2 = w_1 \cdot w_2 \overset{def}{=} \begin{cases} w_1 * w_2 & \alpha(w_2) = \omega(w_1), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Multiplikation zwischen Wegen (also auf den obigen Basiselementen von A) wird bilinear auf ganz A fortgesetzt. Offenbar ist sie assoziativ und es gelten die Distributivgesetze. Es gilt:

(1) $\varepsilon_i w = \delta_{i,\alpha(w)} \cdot w$;
(2) $w\varepsilon_j = \delta_{j,\omega(w)} \cdot w$;
(3) $\varepsilon_i \varepsilon_j = \delta_{ij}\varepsilon_i$ (d. h. $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ bilden "orthogonale Idempotente").

Setzt man $1 \overset{def}{=} \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n \in A$, so folgt $1 \cdot w = w = w \cdot 1$ für jeden Weg w. Es ist also 1 das Einselement in A. Damit ist A ein (in der Regel nichtkommutativer) Ring mit Einselement. Weil A auch ein K-Vektorraum ist, so dass die Beziehung

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$$

für alle $\alpha \in K$ und alle a, $b \in A$ gilt, ist dies eine K-Algebra.

Bezeichnung: A heißt die *Wegealgebra* von Γ über K, und man schreibt $A = K\Gamma$.

In der Darstellungstheorie von Algebren werden die Moduln über einer Algebra untersucht.

8.3.2 (Moduln und Homomorphismen). Sei A eine K-Algebra. Ein K-Vektorraum M heißt ein *A-Modul* (genauer: Rechtsmodul), falls es eine Abbildung $M \times A \longrightarrow M$, $(m, a) \mapsto m \cdot a = ma$ gibt mit folgenden Eigenschaften:

$$m(a + a') = ma + ma',\ (m + m')a = ma + m'a,\ m(aa') = (ma)a',\ m1 = m$$

für alle m, $m' \in M$ und alle a, $a' \in A$.

Ein *Homomorphismus* $f\colon M \longrightarrow N$ zwischen A-Moduln M und N ist eine A-lineare Abbildung, d. h. es gilt $f(ma) = f(m)a$ für alle $a \in A$ und alle $m \in M$. Die Menge $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ aller A-linearen Abbildungen von M nach N bildet einen K-Vektorraum. *Kerne*, *Bilder* und *Cokerne* von Modulhomomorphismen sind wie für lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen oder Morphismen zwischen K-linearen Darstellungen definiert. Ähnliches gilt für *Untermoduln*, *direkte Summen*, *einfache Moduln*, *unzerlegbare Moduln*, etc.

Ähnlich wie $\mathcal{L}_K(\Gamma)$ bilden die *endlichdimensionalen* (sic!) A-Moduln zusammen mit den Homomorphismen eine *Kategorie* $\mathrm{mod}(A)$. (Aufgrund obiger aufgezählter Eigenschaften eine *abelsche* K-Kategorie.) (Häufig wird mit $\mathrm{mod}(A)$ die Kategorie der endlich erzeugten Moduln bezeichnet.)

Der nächste Satz besagt, dass das Studium der (endlichdimensionalen) Darstellungen von Γ gleichwertig ist zum Studium der (endlichdimensionalen) Moduln über der Wegealgebra $K\Gamma$.

Satz 8.3.3. *Sei Γ ein Köcher und $A = K\Gamma$ die Wegealgebra. Dann sind die K-Kategorien* $\mathrm{mod}(A)$ *und* $\mathcal{L}_K(\Gamma)$ *äquivalent.*

BEWEIS. Wir erklären, was dies bedeutet. Wir konstruieren Funktoren

$$\Phi\colon \operatorname{mod}(A) \longrightarrow \mathcal{L}_K(\Gamma)$$

und

$$\Psi\colon \mathcal{L}_K(\Gamma) \longrightarrow \operatorname{mod}(A)$$

die zueinander invers sind in folgendem Sinn: Für jeden endlichdimensionalen A-Modul M und für jede Darstellung V gibt es Isomorphismen $\Psi\Phi(M) \simeq M$ und $\Phi\Psi(V) \simeq V$, die in gewisser Weise *natürlich* sind (vgl. Beweispunkt (4)).

(1) Sei M ein endlichdimensionaler A-Modul. Definiere eine Darstellung $\Phi(M) = V = (V(i), V(a))$ wie folgt:

Sei $V(i)$ der K-Vektorraum $M\varepsilon_i$ für alle $i \in I$. Für jeden Pfeil $a\colon i \to j \in E$ definiere $V(a)\colon M\varepsilon_i \longrightarrow M\varepsilon_j$ durch $V(a)(m\varepsilon_i) \stackrel{def}{=} m\varepsilon_i a = ma\varepsilon_j$. Dies ist eine K-lineare Abbildung.

Sei nun $f\colon M \longrightarrow M'$ ein Homomorphismus von A-Moduln. Für alle $m \in M$ gilt $f(m\varepsilon_i) = f(m)\varepsilon_i$, also gilt $f(M\varepsilon_i) \subseteq M'\varepsilon_i$. Daher ergibt die Einschränkung von f eine lineare Abbildung $f(i)\colon V(i) \longrightarrow V'(i)$, und $\Phi(f) \stackrel{def}{=} (f(i))_{i\in I}$ liefert einen Morphismus $\Phi(f)\colon \Phi(M) \longrightarrow \Phi(M')$, denn für jeden Pfeil $a\colon i \to j$ gilt

$$\begin{aligned}(f(j) \circ V(a))(m\varepsilon_i) &= f(j)(ma\varepsilon_j) = f(ma\varepsilon_j) = f(m)a\varepsilon_j \\ &= V'(a)(f(m)\varepsilon_i) = (V'(a) \circ f(i))(m\varepsilon_i),\end{aligned}$$

also $f(j) \circ V(a) = V'(a) \circ f(i)$. Es ist leicht nachzurechnen, dass damit Φ einen K-linearen Funktor definiert.

(2) Sei $V = (V(i), V(a))$ eine (endlichdimensionale) Darstellung. Setze $\Psi(V) = M = \bigoplus_{i\in I} V(i)$. Definiere eine A-Modulstrukur auf M: Sei $m = (m_i)_{i\in I} \in M$. Sei w ein Weg in Γ. Ist $w = \varepsilon_i$, so sei $mw = m\varepsilon_i = m_i$. Sei $w = a_1 \dots a_s$ ein Weg von i nach j, Konkatenation von Pfeilen a_k. Sei $V(w) \stackrel{def}{=} V(a_s) \circ \dots \circ V(a_1)$. Definiere mw komponentenweise durch $(mw)_k = \delta_{kj} V(w)(m_i)$. Die einzige nicht-triviale Komponente von mw ist also die j-te, gegeben durch $(mw)_j = V(w)(m_i)$. Diese Aktion von Wegen wird fortgesetzt zu einer Aktion von $A = K\Gamma$ auf M, und M wird damit zu einem A-Modul.

Sei $f = (f(i))_{i\in I}$ ein Morphismus zwischen Darstellungen $V = (V(i), V(a))$ und $V' = (V'(i), V'(a))$. Definiere $\Psi(f) = \oplus_i f(i)\colon M = \bigoplus_{i\in I} V(i)) \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} V'(i) = M'$. Dies ist ein Homomorphismus von A-Moduln. Es genügt zu zeigen, dass für einen Weg w und $m \in M$ gilt $\Psi(f)(mw) = \Psi(f)(m)w$. Ist w wie oben, so gilt

$$\begin{aligned}\Psi(f)(mw) &= \oplus_k f(k)(V(w)(m_i)) = f(j)(V(w)(m_i)) \\ &= f(j)(V(w)(m_i)) = V'(w)f(i)(m_i) = f(i)(m_i)w \\ &= \Psi(f)(m)w.\end{aligned}$$

(3) Sei M ein endlichdimensionaler A-Modul. Dann gilt

$$\Psi\Phi(M) = \bigoplus_{i\in I} M\varepsilon_i \simeq M$$

wegen $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = 1$. Man überprüft leicht, dass dies eine Isomorphie von A-Moduln ist. (Sogar Gleichheit.)

Ist umgekehrt $V = (V(i), V(a))$ eine Darstellung, so ist $\Phi\Psi(V) = (W(i), (W(a))$, wobei $W(k) = \big(\bigoplus_{i\in I} V(i)\big)\varepsilon_k = V(k)$ gilt. Außerdem ist für Pfeile $a\colon i \to j$ mit $M = \Psi(V)$

$$W(a)(m\varepsilon_i) = ma\varepsilon_j = (ma)_j = V(a)(m_i) = V(a)(m\varepsilon_i),$$

also $W(a) = V(a)$.

(4) Die "Natürlichkeit" der Isomorphismen bedeutet folgendes: Bezeichne für jeden endlichdimensionalen A-Modul M den eben konstruierten Isomorphismus $\Psi\Phi(M) \simeq M$ mit α_M, und für jede Darstellung V von Γ mit β_V den Isomorphismus $\Phi\Psi(V) \simeq V$.

Dann bedeutet die Natürlichkeit der beiden Isomorphismen gerade, dass für jedes $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ und jedes $g \in \mathrm{Hom}_\Gamma(V,W)$ die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Psi\Phi(M) & \xrightarrow{\alpha_M} & M \\ {\scriptstyle \Psi\Phi(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \Psi\Phi(N) & \xrightarrow{\alpha_N} & N \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccc} \Phi\Psi(V) & \xrightarrow{\beta_V} & V \\ {\scriptstyle \Phi\Psi(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \Phi\Psi(W) & \xrightarrow{\beta_W} & W \end{array}$$

kommutieren. Dies verifiziere man als Übung. (Man sagt auch, dass der Funktor $\Psi\Phi$ (natürlich) isomorph ist zum identischen Funktor, und ebenso $\Phi\Psi$.) □

Übung 8.3.4. Sei Γ der Köcher $\overset{1}{\circ}\longrightarrow\overset{2}{\circ}$.

(a) Man zeige, dass die Wegealgebra $K\Gamma$ isomorph ist zur Algebra $A = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix} \subset \mathrm{M}_2(K)$, die aus den oberen 2×2-Dreiecksmatrizen über K besteht. (Zwei K-Algebren sind *isomorph*, falls es einen K-linearen Ringisomorphismus gibt.)

(b) Einen endlichdimensionalen A-Modul (Rechtsmodul) kann man auffassen als direkte Summe $V \oplus W$ endlichdimensionaler Vektorräume, gebildet zu einem Tripel (V,W,f) mit einer linearen Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$. (Warum?) Man erläutere, wie dabei die Operation

$$(v,w) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

definiert ist.

Übung 8.3.5. Sei Γ der Einschlaufenköcher.

(a) Man zeige $K\Gamma \simeq K[T]$ (Polynomring über K in der Unbestimmten T). Man zeige, dass die (unzerlegbaren) Darstellungen $(K^n, J_n(\lambda))$ aus Proposition 8.2.24 zu den endlichdimensionalen (unzerlegbaren) $K[T]$-Moduln $K[T]/((T-\lambda)^n)$ korrespondieren.

(b) Sei $K = \mathbb{C}$. Was sind die (endlichdimensionalen) einfachen $K[T]$-Moduln?

8.4. Exkurs: Verallgemeinerte Jordansche Normalformen

Sei (V,f) eine K-lineare endlichdimensionale Darstellung des Einschlaufenköchers über dem Körper K. Die Jordansche Normalform gilt allgemein nur über algebraisch abgeschlossenem Körper (sonst speziell nur, wenn alle Eigenwerte von f schon in K liegen). Bezeichne mit χ_f, $\mu_f \in K[T]$ das charakteristische bzw. das Minimalpolynom von f.

Die Darstellung (V,f) ist nichts anderes als ein endlichdimensionaler $K[T]$-Modul (wobei $T \cdot v = f(v)$, d. h. $p(T) \cdot v = p(f)(v)$ definiert wird). Es gelten daher Zerlegungssätze aus der Theorie der Moduln über Hauptidealbereichen, wobei man sich hier wegen der Endlichdimensionalität auf endlich erzeugte Torsionsmoduln beschränken kann. Untermoduln sind f-invariante Unterräume. Auch hier gilt der Satz von Krull-Remak-Schmidt 8.2.17. Wichtig ist hier nur zu bemerken, dass die unzerlegbaren endlichdimensionalen $K[T]$-Moduln genau die von der Form $K[T]/(p^n)$ sind für ein (normiertes) irreduzibles Polynom $p = p(T) \in K[T]$ und ein $n \geq 1$; vgl. auch Proposition 8.4.4.

Lemma 8.4.1. *Jedes normierte Polynom $p \in K[T]$ ist das charakteristische Polynom einer quadratischen Matrix. Genauer: Ist*

$$p = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_1 T + a_0 \in K[T],$$

so ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$$

mit

$$p = \chi_A.$$

Die Matrix $[p(T)|] := A$ nennt man die *Begleitmatrix* von $p = p(T)$.

Beweis. Entwicklung nach der letzten Spalte. □

Etwa ist das irreduzible Polynom $T^2 + 1 \in \mathbb{R}$ das charakteristische Polynom von der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 8.4.2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) (V, f) *ist einfach.*

(2) χ_f *ist irreduzibel.*

(3) $\chi_f = \mu_f$ *und* μ_f *ist irreduzibel.*

In diesem Fall ist $\mathrm{End}(V, f)$ *die Körpererweiterung* $K[T]/(\chi_f)$ *über* K.

Beweis. Die Äquivalenz von (2) und (3) ist klar.

(1)⇔(2),(3): Sei $n = \dim V$. Sei (U, g) eine Unterdarstellung von (V, f). Es ist also $g = f_{|U}$. Ergänzt man eine Basis von U zu einer Basis von V, so sieht man $\chi_f = \chi_g \cdot h$ für ein $h \in K[T]$. Ist χ_f irreduzibel, so ist h eine Einheit, und dann $U = V$, oder χ_g eine Einheit, und dann $U = 0$; also (V, f) einfach. Sei umgekehrt (V, f) einfach. Sei $0 \neq x \in V$; sei $k \geq 0$ maximal mit

$$x,\ f(x),\ f^2(x), \dots, f^{k-1}(x) \tag{8.4.1}$$

linear unabhängig. Da diese Elemente offenbar einen f-invarianten Unterraum von V aufspannen, folgt aus der Einfachheit, dass (8.4.1) eine Basis von V ist, also $k = n$. Dann gilt $\mu_f = \chi_f$. Denn hat μ_f einen kleineren Grad $k < n$, etwa

$$\mu_f = T^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i T^i,$$

so folgt $\mu_f(f)(x) = 0$, und das System (8.4.1) wäre damit linear abhängig, Widerspruch. Angenommen, $\mu_f = h_1 \cdot h_2$ mit $h_1, h_2 \in K[T]$, keine Einheiten. Dann $0 = \mu_f(f) = h_1(f) \circ h_2(f)$. Es ist $U = \mathrm{Kern}(h_1(f))$ ein f-invarianter Unterraum. Denn ist $h_1(f)(x) = 0$, so gilt auch $h_1(f)(f(x)) = f(h_1(f)(x)) = f(0) = 0$. Es folgt $U = 0$, und damit $h_1(f)$ injektiv, oder $U = V$, und damit $h_1(f) = 0$. Letzteres ist unmöglich, da μ_f das Minimalpolynom von f ist. Im ersten Fall folgt $h_2(f) = 0$, was ebenso unmöglich ist. Also ist μ_f irreduzibel. □

Der Endomorphismus f heisst *zyklisch*, wenn der zugehörige $K[T]$-Modul zyklisch ist (also von der Form $K[T]/I$ für ein Ideal I). Folgende Kennzeichnung ist unmittelbar klar.

Lemma 8.4.3. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) f *ist zyklisch.*

(2) *Es gibt ein* $v \in V$, *so dass* $v,\ f(v),\ f^2(v), \dots, f^{n-1}(v)$ *eine* K*-Basis von* V *ist.*

(3) *Es gibt eine K-Basis $\mathcal{B}$, so dass die zugehörige Darstellungsmatrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ die Begleitmatrix $[\chi_f(T)|]$ ist.* □

Man nennt (3) auch die *rationale Normalform* (oder: *Frobenius-Normalform*) des zyklischen Endomorphismus' f. Aus der vorherigen Proposition folgt, dass f zyklisch ist, wenn (V, f) einfach ist. Aus der Theorie der Moduln über Hauptidealringen[1] folgt dies sogar aus der Unzerlegbarkeit von (V, f). Mit ähnlichen Argumenten bekommen wir daher:

PROPOSITION 8.4.4. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *(V, f) ist unzerlegbar.*

(2) *$\chi_f = \mu_f = p^n$ für ein irreduzibles $p \in K[T]$ und eine natürliche Zahl $n \geq 1$.*

Hier ist $\mathrm{End}(V, f)$ *isomorph zum lokalen Ring $K[T]/(p^n)$.* □

Im unzerlegbaren Fall ist eine verfeinerte Normalform zu bevorzugen, die sich im wesentlichen direkt aus dem irreduziblen Polynom p (im Gegensatz zu p^n) ergibt. Sei dazu $p = p(T) \in K[T]$ ein normiertes, irreduzibles Polynom vom Grad d. Wir nennen eine Matrix der Form

$$J_n([p(T)|]) := \left(\begin{array}{c|c|c|c} [p(T)|] & & & \\ \hline 1 & [p(T)|] & & \\ \hline & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \\ \hline & & 1 & [p(T)|] \end{array}\right) \in \mathrm{M}_{nd}(K) \tag{8.4.2}$$

ein *verallgemeinertes Jordan-Kästchen der zweiten Art*, wobei die $d \times d$-Matrix $[p(T)|]$ auf der Hauptdiagonalen n-mal vorkommt; die $d \times d$-Blöcke unterhalb der (Block-) Hauptdiagonalen bestehen jeweils aus einer einzigen 1 in der rechten, oberen Ecke, der gesamte Rest besteht aus Nullen.

Eine analoge Matrix $M_n([p(T)|])$, in der die Unterdiagonalblöcke allesamt ersetzt werden durch $d \times d$-Einheitsmatrizen E_d, heißt *verallgemeinertes Jordan-Kästchen der ersten Art* (oder in *Malzew-Darstellung*).

BEISPIEL 8.4.5. (1) Im Fall $p = T - \lambda$ ist $J_n([p(T)])$ gerade das Jordan-Kästchen $J_n(\lambda)$.

(2) Sei $p = (T - c)(T + c) \in \mathbb{R}[T]$ mit $c = a + bi$ mit $b \neq 0$. Dann ist z. B.

$$J_2([p(T)|]) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -|c|^2 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -|c|^2 \\ 0 & 0 & 1 & 2a \end{array}\right).$$

PROPOSITION 8.4.6 (Verallgemeinerte Jordansche Normalform zweiter Art, unzerlegbarer Fall). *Sei f ein unzerlegbarer Endomorphismus des endlichdimensionalen K-Vektorraums V mit $\chi_f = \mu_f = p^n$ mit einem normierten, irreduziblen Polynom $p \in K[T]$ vom Grad d, und $n \geq 1$. Dann gibt es ein $v \in V$, so dass*

$$\mathcal{B}\colon v,\ f(v), \ldots,\ f^{d-1}(v),\ p(f)(v),\ p(f)(f(v)), \ldots,\ p(f)(f^{d-1}(v)), \ldots$$
$$\ldots,\ p^{n-1}(f)(v)\ \ldots,\ p^{n-1}(f)(f^{d-1}(v))$$

eine Basis von V ist, und bzgl. dieser hat die Darstellungsmatrix die Form $J_n([p(T)|])$.

BEWEIS. Es ist klar, dass man aus der Form von $\mathcal{B}$ die Darstellungsmatrix $J_n([p(T)|])$ erhält; es ist also lediglich die Existenz zu zeigen. Es ist $\dim_K V = dn$. Weil f insbesondere zyklisch ist, gibt es ein $v \in V$, so dass $v,\ f(v), f^2(v), \ldots,\ f^{dn-1}(v)$ eine K-Basis von V ist. Weil die Polynome $T^i \cdot p^j$ für $0 \leq i \leq d-1$, $0 \leq j \leq n-1$ alle unterschiedlichen Grad haben, folgt daraus leicht die Behauptung. □

[1] Vgl. etwa XIV, Thm. 2.1 in S. Lang: *Algebra.* (Rev. 3rd Edition.) Springer, New York, 2002.

Im allgemeinen (zerlegbaren) Fall zerlegt man V in unzerlegbare f-invariante Summanden und erhält eine entsprechende Blockdiagonalmatrix mit Blöcken der Form $J_{n_i}([p_i(T)|])$.

PROPOSITION 8.4.7 (Verallgemeinerte Jordansche Normalform erster Art, unzerlegbarer Fall). *Sei $n \geq 2$. Ein Jordan-Kästchen $J_n([p(T)|])$ wie in (8.4.2) (mit $p \in K[T]$ normiert irreduzibel) ist ähnlich zu einem Kästchen in Malzew-Darstellung $M_n([p(T)|])$ genau dann, wenn p separabel über K ist (d. h. $p'(T) \neq 0$); insbesondere ist dies immer der Fall, wenn K ein perfekter Körper ist.*

BEWEIS. Da $J_n([p(T)|])$ unzerlegbar mit Minimalpolynom p^n ist, genügt es zu zeigen, dass p^n auch das Minimalpolynom von $M_n([p(T)|])$ ist, genau wenn $p' \neq 0$; vgl. Proposition 8.4.4. Zur Abkürzung setze $C = [p(T)|]$ und $M = M_n([p(T)|]) = M_n(C)$. Es ist leicht, die (Blöcke der) Potenzen M^i zu bestimmen (ein Vorteil der Malzew-Form). Insbesondere sieht man, da $p(C) = 0$, dass

$$p(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p'(C) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & p'(C) & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & * & \dots & p'(C) & 0 \end{pmatrix},$$

und man rechnet[2]

$$p(M)^{n-1} = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline p'(C)^{n-1} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{array}\right).$$

Im Fall $p' = 0$ erhält man sofort, dass p^n nicht das Minimalpolynom sein kann. Im Fall $p' \neq 0$ folgt dagegen (da p' und p teilerfremd sind), dass $p'(C)$ invertierbar, insbesondere $p(M)^{n-1} \neq 0$ ist, und daher muss p^n das Minimalpolynom sein. □

BEMERKUNG 8.4.8. Sind $A, B \in \mathrm{M}_d(K)$ ähnlich, $B = PAP^{-1}$ mit $P \in \mathrm{GL}_d(K)$, so sind auch die Malzew-Kästchen $M_n(A)$ und $M_n(B)$ ähnlich. Denn mit $\overline{P} = P^{\oplus n}$ gilt offenbar $M_n(B) = \overline{P} \cdot M_n(A) \cdot \overline{P}^{-1}$.

BEISPIEL 8.4.9 (Reelle Jordansche Normalform, unzerlegbarer Fall). Außer den linearen gibt es nur die normierten irreduziblen Polynome der Form $p = (T - c)(T - \bar{c})$ mit $c = a + ib$, $b \neq 0$. Die Begleitmatrix $[p(T)|]$ ist ähnlich zu der Matrix

$$A_c = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Ein unzerlegbarer Endomorphismus f mit $\chi_f = p$ hat eine Darstellungsmatrix der Form $J_n(\lambda)$ (mit $\lambda \in \mathbb{R}$) oder der (Malzew-) Form

$$M_n([A_c]) := \left(\begin{array}{c|c|c|c} [A_c] & & & \\ \hline [E_2] & [A_c] & & \\ \hline & [E_2] & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ \hline & & & [E_2] \quad [A_c] \end{array}\right) \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

[2] D. W. Robinson, *The generalized Jordan Canonical Form.* Amer. Math. Monthly 77 (1970), no. 4, 392–395.

mit E_2 die 2×2-Einheitsmatrix. Dies folgt aus der vorigen Bemerkung. Man kann dies alternativ auch aus der klassischen Jordanschen Normalform über $\mathbb{C}$ ableiten:

Zunächst haben wir nach Proposition 8.4.6 die verallgemeinerte Jordansche Normalform $J_n([p(T)|])$, siehe Beispiel zuvor. Aufgefasst als komplexe Matrix ist $J_n([p(T)|])$ trigonalisierbar, und wir erhalten über $\mathbb{C}$ die Jordansche Normalform $J_n(c) \oplus J_n(\bar{c})$, mit unzerlegbaren Jordankästchen zu den Eigenwerten c und $\bar{c}$. Durch geeignete Permutation erhält man dann die Malzew-Darstellung

$$M_n([p(T)|]) := \left(\begin{array}{c|c|c|c} [p(T)|] & & & \\ \hline [E_2] & [p(T)|] & & \\ \hline & [E_2] & \ddots & \\ & & \ddots & \\ \hline & & [E_2] & [p(T)|] \end{array}\right).$$

Ist nun also $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit $P[p(T)|]P^{-1} = A_c$, und $\overline{P}$ wie in der vorigen Bemerkung, so folgt

$$\overline{P} M_n([p(T)|]) \overline{P}^{-1} = M_n([A_c]).$$

Über $\mathbb{C}$ sind die Matrizen $J_n([p(T)])$ und $M_n([A_c])$ also ähnlich. Da beide Matrizen reell sind, sind sie aber auch über $\mathbb{R}$ ähnlich[3].

Satz 8.4.10. *Die Isomorphieklassen der unzerlegbaren endlichdimensionalen Darstellungen des Einschlaufenköchers über dem Körper K sind repräsentiert durch die Darstellungen $S_p[n] = \left(K^{nd}, J_n([p(T)|])\right)$, wobei $n \geq 1$ und $p = p(T) \in K[T]$ normiert irreduzibel vom Grad d ist. Jedes $S_p[n]$ hat die Länge n mit (einfachem) Sockel (und Top = Faktor modulo* Rad*)) $S_p[1]$; es ist* $\mathrm{End}(S_p[n]) = K[T]/(p^n)$.

Wir haben kanonische Injektionen $\iota_n \colon S_p[n] \to S_p[n+1]$ gegeben durch die $(n+1)d \times nd$-Matrizen $(0|E_{nd})^{tr}$ und Surjektionen $p_n \colon S_p[n+1] \to S_p[n]$ gegeben durch die $nd \times (n+1)d$-Matrizen $(E_{nd}|0)$. Mit diesen ergeben sich kurze exakte Folgen von Darstellungen

$$0 \to S_p[1] \xrightarrow{\iota_1} S_p[2] \xrightarrow{p_1} S_p[1] \to 0$$

und für $n \geq 2$

$$0 \to S_p[n] \xrightarrow{(p_{n-1}, \iota_n)} S_p[n-1] \oplus S_p[n+1] \xrightarrow{(\iota_{n-1}, \pm p_n)^{tr}} S_p[n] \to 0,$$

wobei das Vorzeichen mit n alternierend verläuft.

Sind p und q verschiedene normierte, irreduzible Polynome in $K[T]$, so gilt für alle $m, n \geq 1$ Hom-Orthogonalität $\mathrm{Hom}(S_p[n], S_q[m]) = 0$.

Man sagt, dass für jedes normierte, irreduzible $p \in K[T]$ die $S_p[n]$ (mit $n \geq 1$), zusammen mit den zuvor genannten Morphismen, eine (homogene) *Röhre* bilden; insgesamt spricht man von paarweise *orthogonalen* Röhren. Die genannten Morphismen sind sog. *irreduzible* Morphismen, und die kurzen exakten Folgen sind sog. *fast-zerfallende Folgen* (oder: *Auslander-Reiten-Folgen*).

[3] XIV, Cor. 2.3 in S. Lang: *Algebra*.

Literaturverzeichnis

[1] F. W. Anderson, K. R. Fuller: *Rings and Categories of Modules*, Springer Verlag, New York, 1974.

[2] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński: *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. 1: Techniques of Representation Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[3] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalø: *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[4] Yu. A. Drozd, V. V. Kirichenko: *Finite Dimensional Algebras*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.

[5] K. R. Goordearl, R. B. Warfield, Jr.: *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings* (2nd edition), Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[6] R. S. Pierce: *Associative Algebras*, Springer Verlag, New York, 1982.