TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

Einreihige Kategorien und dazu assoziierte lokale Ringe

An der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz eingereichte

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Mathematiker

(Dipl.-Math.)

Vorgelegt von

Pierre Landrock

geboren am 19. Dezember 1989 in Torgau

Betreuer: PD Dr. Dirk Kussin
Dipl. Math. Matthias Warkentin

Chemnitz, den 31. März 2014

Das vorliegende pdf-Dokument ist eine überarbeitete und mit internen Referenzen versehene Version der Orginalarbeit.

Danksagung

An erster Stelle möchte ich meinen Eltern danken, ohne die ich nie den Weg zur Mathematik gefunden hätte und ohne die ein Studium nicht möglich gewesen wäre. Ein besonderer Dank geht auch an Matthias Warkentin, der in mir das Interesse für die Darstellungstheorie geweckt hat. Weiterhin danke ich meinem Betreuer, Dr. Kussin, für die Ermöglichung dieser Arbeit und die hilfreichen Eingebungen. Nicht zu vergessen sind außerdem all die tollen Menschen, die mich auf meinem Weg durch das Studium begleitet haben.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In vielen Bereichen der modernen Mathematik, wie etwa der Algebra oder der Topologie, hat es sich als sehr fruchtbar herausgestellt, mit dem Konzept von Kategorien und einer universellen, kategoriellen Betrachtungsweise zu arbeiten. Als eine relativ einfach zugängliche Klasse von Kategorien stellen sich hierbei die so genannten einreihigen Kategorien heraus. Diese sind dadurch charakterisiert, dass sich die Unterobjekte jedes ihrer unzerlegbaren Objekte durch Inklusion total ordnen lassen. In dieser Arbeit werden wir uns mit den Eigenschaften einreihiger Kategorien beschäftigen, welche in der Darstellungstheorie beim Studium einer bestimmten Klasse von Algebren, und zwar den so genannten zahm-erblichen Algebren, auftreten. Es stellt sich heraus, dass eine wesentliche Komponente der Modulkategorie $\operatorname{mod} A$ einer endlichdimensionalen, zahm-erblichen k-Algebra A in ein Produkt von einreihigen Kategorien zerfällt, welche in diesem Kontext auch „Röhren“ genannt werden. Jede Röhre ist wiederum als eine Erweiterungskategorie einer bestimmten Familie einfacher Objekte darstellbar.

Es gibt viele Resultate, welche Röhren mit anderen mathematischen Objekten in Verbindung setzen. So konnte Crawley-Boevey in [3] zeigen, dass sich die Gesamtheit aller Röhren einer vorgegebenen zahm-erblichen Algebra durch eine projektive Kurve parametrisieren lässt. Ein weiterer Zusammenhang ist in [19] zu finden. In diesem Paper zeigt Ringel, dass für eine spezielle Klasse von Algebren ein gewisser Schief-Potenzreihenring mit Ableitung bereits die Gesamtheit aller Röhren mit einer Ausnahme charakterisiert. Ein für die vorliegende Arbeit wesentliches Resultat wurde von Ringel in [20] angegeben. Es ist in der Tat so, dass eine Röhre aus der Modulkategorie einer zahm-erblichen k-Algebra äquivalent ist zur Modulkategorie eines gewissen Rings, der sich wiederum aus den Endomorphismenringen der Objekte in der Röhre selbst konstruieren lässt.

Am Beginn dieser Arbeit stand die Frage danach, ob sich für eine konkret gegebene Röhre die genaue Struktur dieses von Ringel konstruierten Ringes bestimmen lässt. Hierbei werden wir uns auf so genannte homogene Röhren einschränken. Dies sind Röhren, welche sich als Erweiterungskategorie eines einzigen einfachen Objektes ergeben. Im Fall, dass der zugrunde liegende Skalarkörper k algebraisch abgeschlossen ist, ist eine Antwort auf die Frage bereits bekannt gewesen. Es ist dann so, dass der Ring, welcher eine homogene Röhre beschreibt, der Ring $k[[T]]$ der formalen Potenzreihen über k ist. Es lag die Vermutung nahe, dass auch im allgemeinen Fall ein gewisser modifizierter Potenzreihenring auftritt. Hierfür kamen insbesondere so genannte Schief-Potenzreihenringe in Frage, welche als formale Potenzreihenringe gesehen werden können, für die es eine zusätzliche Vorschrift dafür gibt, wie die Koeffizienten mit den Variablen vertauschen (vgl. Definition 4.1). Da eine homogene Röhre wie oben erwähnt als Erweiterungskategorie eines einzelnen einfachen Objektes entsteht, ging der Ansatz in die Richtung, dass sich der Schief-Potenzreihenring allein aus Informationen gewinnen lassen sollte, die aus diesem einfachen Objekt abgeleitet werden können. Es hat sich im Laufe der Arbeit herausgestellt, dass sich die Endomorphismenalgebra des einfachen Objekts und die Wirkung der Auslander-Reiten-Translation τ auf diese als die geeigneten Größen herausstellen. Unter der Zusatzannahme, dass der Körper k ein vollkommener Körper ist, konnte folgendes Resultat bewiesen werden:

Hauptresultat. *Sei A eine zahm-erbliche k-Algebra über einem vollkommenen Körper k und $\mathcal{T}$ eine homogene Röhre in* $\Gamma(\operatorname{mod} A)$. *Seien weiter* $S[1]$ *der einfach reguläre Modul aus $\mathcal{T}$, D seine Endomorphismenalgebra, und τ wie in* (4.5). *Ist $\mathcal{H}$ der inverse Limes des Systems* (3.11)*, so gibt es einen Isomorphismus*

$$\mathcal{H} \cong D[[T; \tau^{-1}]]$$

von k-Algebren.

Hierbei ist $\mathcal{H}$ gerade der von Ringel in [20] konstruierte Ring, welcher die homogene Röhre $\mathcal{T}$ charakterisiert, und τ ist die Auslander-Reiten-Translation unter der Identifikation von $S[1]$ mit $\tau S[1]$. Dieses Ergebnis weitet das bekannte Resultat für algebraisch abgeschlossene Körper k auf die wesentlich größere Klasse der vollkommenen Körper aus.

Wir werden im ersten Kapitel einen kurzen Abriss zu den zahm-erblichen Algebren liefern. Insbesondere werden wir den Begriff der Darstellung einführen, welcher im letzten Kapitel noch einmal eine wichtige Rolle einnehmen wird. Weiterhin sammeln wir einige wichtige Definitionen und Standardresultate. Wir werden eine kombinatorische Invariante einer k-Algebra kennen lernen, welche uns die Charaktierisierung der Algebren vom zahm-erblichen Typ ermöglicht.

Das zweite Kapitel soll eine kurze Einführung in die Auslander-Reiten-Theorie darstellen, wobei wir die wesentlichen Notationen einführen werden und auch die Auslander-Reiten-Formeln (Theorem 2.8) wiederholen, welche für die Arbeit von zentraler Bedeutung sind. Im Abschnitt 2.2 werden wir eine wichtige Formel ableiten, welche die Auslander-Reiten-Translation in Verbindung bringt mit dem Ext^1-Raum gewisser unzerlegbarer Moduln. Diese Formel wird sich als wichtig erweisen für die Berechnungen, welche wir in Abschnitt 4.2 des letzten Kapitels tätigen werden. Abgeschlossen wird das zweite Kapitel von einem kurzem Abriss zum Begriff des Auslander-Reiten-Köchers einer k-Algebra.

Im dritten Kapitel werden wir zunächst den Begriff der Röhre einführen und einige wesentliche Eigenschaften dieser Objekte kennen lernen. Es wird ein bekanntes Theorem folgen, welches die Struktur des regulären Teils des Auslander-Reiten-Köchers einer zahmerblichen k-Algebra als ein Produkt von Röhren charakterisiert. Dem folgend werden wir uns eine homogene Röhre herausgreifen und die Eigenschaften der Endomorphismenalgebren der unzerlegbaren Moduln dieser Röhre herausarbeiten. Anschließend wird die Konstruktion von Ringel erläutert, und wir werden die wesentlichen Eigenschaften der Algebra $\mathcal{H}$, welche im Hauptresultat auftritt, untersuchen. Zum Abschluss dieses Kapitels gehen wir kurz auf so genannte Torsionsmoduln ein.

Im finalen vierten Kapitel werden wir schließlich das Hauptresultat beweisen. Dazu werden wir die Algebra $\mathcal{H}$ mit einer konkreten Tensoralgebra vergleichen und einen Isomorphismus konstruieren, welcher das angegebene Resultat liefert. Als eine konkrete Darstellung der Moduln der Algebra $\mathcal{H}$ werden wir im Anschluss die so genannten kleinen Darstellungen kennen lernen und studieren. Hierbei wird sich auf natürliche Weise die Algebra $\mathcal{H}$ aus deren Endomorphismenalgebren zurückgewinnen lassen.

Kapitel 1

Erbliche Algebren und Gattungen

Im ersten Kapitel werden wir einen kurzen Überblick über erbliche Algebren und Gattungen liefern. Die erblichen Algebren bilden in einem gewissen Sinne nach den halbeinfachen Algebren die nächstkomplizierte Klasse von Algebren und sie wurden und werden umfangreich studiert. Von besonderem Interesse werden im Laufe der Arbeit die sogenannten zahm-erblichen Algebren sein, die unendlich viele Isomorphieklassen unzerlegbarer Moduln besitzen, welche sich aber durch eindimensionale Kurven parametrisieren lassen.

Wir beginnen damit, grundlegende Bezeichnungen zu vereinbaren und einige wichtige Resultate der Darstellungstheorie endlichdimensionaler Algebren zu wiederholen. Diese können in Standardwerken wie [1] nachgeschlagen werden. Im folgenden bezeichnet k stets einen (nicht notwendigerweise algebraisch abgeschlossenen) Körper und A bezeichnet eine assoziative, endlichdimensionale k-Algebra mit 1. Wenn wir im Folgenden von Moduln reden, wird es sich (wenn nicht explizit anders formuliert) stets um rechte Moduln handeln. Mit $\operatorname{Mod} A$ bezeichnen wir die Kategorie der A-Moduln und mit $\operatorname{mod} A$ bezeichnen wir die Kategorie der endlich erzeugten A-Moduln. Nach einem Standardresultat ist ein Modul einer endlichdimensionalen k-Algebra A genau dann endlich erzeugt, wenn er als Vektorraum über k endlichdimensional ist (vgl. [1, I.2]), weshalb wir $\operatorname{mod} A$ auch als Kategorie der über k endlichdimensionalen A-Moduln verstehen können.

Sind weiter M und N zwei A-Moduln, so bezeichnen wir mit $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ den Raum der A-Modulhomomorphismen $f : M \longrightarrow N$. Weiter sei $\operatorname{End}_A(M) := \operatorname{Hom}_A(M, M)$. Mit diesen Bezeichnungen wird $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ mit der üblichen Verkettung von Abbildungen auf natürliche Weise zu einem $\operatorname{End}_A(N)$-$\operatorname{End}_A(M)$-Bimodul. Mit $\operatorname{Ext}^1_A(M, N)$ bezeichnen wir den Raum aller Erweiterungen zwischen den A-Moduln M und N. Auch dieser kann durch Pushout- bzw. Pullbackkonstruktionen auf natürlich Weise zu einem $\operatorname{End}_A(N)$-$\operatorname{End}_A(M)$-Bimodul gemacht werden. Mit $\operatorname{rad} A$ bezeichnen wir das **Jacobson-Radikal** der Algebra A. Dieses wird sich als wichtiges Hilfsmittel dazu erweisen, einer erblichen Algebra A einen Graphen zuzuordnen, welcher gewisse Invarianten der Algebra sofort ablesbar macht und welcher fast die gesamte Darstellungstheorie dieser Algebra beschreibt.

Eine entscheidende Rolle in der Darstellungstheorie endlichdimensionaler Algebren spielen die unzerlegbaren Moduln. Wir erinnern daran, dass ein von Null verschiedener A-Modul M **unzerlegbar** heißt, wenn aus $M \cong M_1 \oplus M_2$ schon $M_1 = 0$ oder $M_2 = 0$ folgt. In diesem Zusammenhang steht folgendes zentrale Resultat:

Theorem 1.1. *(Krull-Remak-Schmidt). Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra. Dann besitzt jeder von Null verschiedene Modul M aus* $\operatorname{mod} A$ *eine Zerlegung $M \cong M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$, wobei $M_1, \cdots, M_n$ unzerlegbare Moduln mit lokalen Endomorphismenringen sind. Ist ferner $M \cong M'_1 \oplus \cdots \oplus M'_m$ eine weitere Zerlegung von M in Unzerlegbare, so gilt $m = n$ und es gibt eine Permutation $\pi \in S_n$, sodass $M_i \cong M'_{\pi(i)}$ für $i = 1, \cdots, n$ gilt.*

Dieses Theorem wirft sofort die Frage danach auf, ob es für eine gegebene k-Algebra A nur endlich viele oder unendlich viele Isomorphieklassen unzerlegbarer A-Moduln gibt. Im ersten Fall nennen wir die Algebra A **darstellungsendlich**, im zweiten Fall **darstellungsunendlich**. Wir werden uns in dieser Arbeit ausschließlich mit darstellungsunendlichen Algebren beschäftigen.

Eine k-Algebra A heißt **basisch**, wenn $A/\operatorname{rad} A$ das direkt Produkt von Schiefkörpern ist. Ist $A/\operatorname{rad} A$ selbst ein Schiefkörper, so nennen wie die Algebra A **lokal**.

Weiterhin wird eine Algebra A **zusammenhängend** genannt, wenn aus $A \cong A_1 \times A_2$ mit k-Algebren A_1 und A_2 folgt, dass $A_1 = 0$ oder $A_2 = 0$ ist. Wir werden bis zum Schluss der Arbeit unter einer k-Algebra stets eine basische und zusammenhängende Algebra verstehen.

Abschließend wollen wir noch festhalten, dass mit $\mathcal{D} := \operatorname{Hom}_k(-, k)$ die **Standarddualität** bezeichnet sei. Diese überführt rechte A-Moduln in linke (und umgekehrt) und der Funktor $\mathcal{D} : \operatorname{mod} A \longrightarrow \operatorname{mod} A^{op}$ liefert sogar eine Äquivalenz von Kategorien (vgl. [1, I, 2.9]).

1.1 Erbliche Algebren

Im folgenden Abschnitt werden wir einen kurzen (und unvollständigen) Überblick über erbliche Algebren liefern. Diese bilden nach der Klasse der halbeinfachen Algebren in gewissem Sinne die „nächstkomplizierte Klasse von Algebren“ und wir werden uns im Verlauf dieser Arbeit ausschließlich mit diesen befassen. Am Anfang steht folgendes bekannte Resultat:

Theorem 1.2. *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

- *Jeder Untermodul von A_A ist projektiv.*
- *Jeder Untermodul eines projektiven A-Moduls ist projektiv.*
- *Jeder Untermodul eines endlich erzeugten, projektiven A-Moduls ist projektiv.*

- *Das Radikal jedes unzerlegbaren, endlich erzeugten, projektiven A-Moduls ist projektiv.*
- *Jeder Quotient eines injektiven A-Moduls ist injektiv.*
- *Jeder Quotient eines endlich erzeugten, injektiven A-Moduls ist injektiv.*
- *Der Quotient jedes unzerlegbaren, endlich erzeugten, injektiven A-Moduls durch seinen einfachen Sockel ist injektiv.*
- *Für jeden A-Modul M gibt es eine exakte Sequenz* $0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ *mit P_0 und P_1 projektiv.*
- *Für jeden A-Modul M gibt es eine exakte Sequenz* $0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow 0$ *mit I_0 und I_1 injektiv.*
- $\mathrm{gl.\,dim}\, A \leq 1$.
- *Der Funktor* $\mathrm{Ext}^2_A(-,-) : (\mathrm{Mod}\, A)^{op} \times \mathrm{Mod}\, A \longrightarrow \mathrm{Mod}\ k$ *verschwindet.*

Für den Beweis dieses Resultats sei der Leser verwiesen auf [1, VII.1. und A.4].

Eine endlichdimensionale k-Algebra A, welche die in Theorem 1.2 genannten Bedingungen erfüllt, heißt **erbliche Algebra**. Im nachfolgenden Abschnitt werden wir eine kombinatorische Struktur kennen lernen, die den erblichen Algebren zugrunde liegt, und mit deren Hilfe wir einen Zugang zu den sogenannten zahm-erblichen Algebren finden können, welche uns dann im weiteren Verlauf der Arbeit beschäftigen werden.

Nachfolgend wollen wir zwei nützliche Folgerungen aus Theorem 1.2 ableiten.

Folgerung 1.3. *Sei A eine erbliche Algebra und P_1 sowie P_2 seien zwei unzerlegbare, projektive A-Moduln. Dann ist jedes von Null verschiedene $f \in \mathrm{Hom}_A(P_1, P_2)$ ein Monomorphismus.*

Beweis. Sei $f : P_1 \longrightarrow P_2$ ein von Null verschiedener Homomorphismus. Nach Theorem 1.2 ist $\mathrm{Im}(f) \subseteq P_2$ ebenfalls projektiv, und wir erhalten eine kurze exakte Sequenz der Gestalt $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, f \longrightarrow P_1 \longrightarrow \mathrm{Im}\, f \longrightarrow 0$, welche wegen der Projektivität von $\mathrm{Im}\, f$ spaltet. Da nun aber P_1 unzerlegbar und f nicht Null ist, folgt $P_1 \cong \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$ nebst $\mathrm{Im}\, f \neq 0$, woraus wir $\mathrm{Ker}\, f = 0$ folgern. Das bedeutet, dass f ein Monomorphismus ist. □

Hiermit erhalten wir unmittelbar:

Folgerung 1.4. *Sei A eine erbliche Algebra und P ein unzerlegbarer, projektiver A-Modul. Dann ist $\mathrm{End}_A(P)$ ein Schiefkörper.*

Beweis. Da der unzerlegbare, projektive Modul P isomorph zu einem direkten Summanden der regulären Darstellung A_A ist, und die Algebra A über k endlichdimensional ist, folgt sofort, dass auch $\dim_k(P) < \infty$ ist. Sei nun $f \in \mathrm{End}_A(P)$ von Null verschieden.

Da f nach Folgerung 1.3 ein Monomorphismus ist, und P endlichdimensional über k ist, ist f sofort auch ein Epimorphismus und damit ein Isomorphismus. Dies liefert die Behauptung. □

Wir wollen diesen Abschnitt mit einem Beispiel abschließen:

Beispiel 1.5. Seien F und G endlichdimensionale k-Divisionsalgebren und sei ferner ${}_FM_G$ ein F-G-Bimodul, welcher ebenfalls endlichdimensional über k sein soll. Dann können wir die k-Algebra

$$A := \begin{pmatrix} F & M \\ 0 & G \end{pmatrix}$$

betrachten. Dabei werden Addition und Multiplikation induziert durch die gewöhnliche Addition bzw. Multiplikation von Matrizen. Da sowohl F, G, als auch M endlichdimensional über k sind, wird A zu einer endlichdimensionalen k-Algebra. Weiter sehen wir unschwer, dass A auch eine erbliche Algebra ist, und zwar wie folgt:

Wir haben folgende Zerlegung der Eins aus A:

$$1_A := \begin{pmatrix} 1_F & 0 \\ 0 & 1_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_G \end{pmatrix}$$

Da nun aber F und G k-Divisionsalgebren sind, bilden $\begin{pmatrix} 1_F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_G \end{pmatrix}$ ein vollständiges System primitiver, orthogonaler Idempotenten für A und wir erhalten somit folgende Zerlegung von A in eine direkte Summe unzerlegbarer Projektiver:

$$A_A := \begin{pmatrix} F & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}.$$

Mit $P_1 := \begin{pmatrix} F & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $P_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$ erhalten wir damit ein vollständiges System von Repräsentanten der unzerlegbaren, projektiven, rechten A-Moduln. Wir zeigen nun, dass die Untermoduln von A_A gerade von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} F' & M' \\ 0 & G' \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

sind. Dabei sind $F' \in \{0, F\}$ und $G' \in \{0, G\}$, sowie M' ein rechter G-Untermodul von M, welcher im Falle $F' = F$ mit M zusammenfällt.

Einerseits ist klar, dass jede Menge dieser Gestalt ein Untermodul von A_A ist. Sei umgekehrt J ein beliebiger Untermodul von A_A, und $\begin{pmatrix} f & m \\ 0 & g \end{pmatrix}$ sei ein Element aus J. Dann gehören auch

$$\begin{pmatrix} f & m \\ 0 & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} f & m \\ 0 & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & g \end{pmatrix}$$

zu J. Dies liefert uns eine Zerlegung $J = J_1 \oplus J_2$, wobei $J_1 = J \cap \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $J_2 = J \cap \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & G \end{pmatrix}$ sind. Damit ist J_1 ein Rechtsideal in dem Ring $\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und dies impliziert, dass $J_1 \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ gilt, da wir F als k-Divisionsalgebra vorausgesetzt haben.
Wir sehen außerdem, dass J_2 ein rechter $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$-Untermodul von $\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & G \end{pmatrix}$ ist.
Da ferner die Inklusionskette

$$J_1 \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(J \cap \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq J \cap \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq J \cap \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & G \end{pmatrix} = J_2$$

gilt, muss im Falle $J_1 = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ die Inklusion $\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq J_2$ gelten.
Dies liefert uns, zusammen mit der Tatsache, dass auch G eine k-Divisionsalgebra ist, dass J gerade von der behaupteten Gestalt (1.1) ist.

Um nun nachzuweisen, dass A eine erbliche Algebra ist, sei J ein beliebiger Untermodul von A_A. Nach vorigen Überlegungen ist J von einer Gestalt wie in (1.1), d. h.:

$$J = \begin{pmatrix} F' & M' \\ 0 & G' \end{pmatrix}$$

mit den entsprechenden Bedingungen an F', G' und M'. Wir unterscheiden 2 Fälle:

1. Fall: F'=F
In diesem Fall haben wir sogar $J = \begin{pmatrix} F & M \\ 0 & G' \end{pmatrix}$. Damit ist J für $G' = 0$ gleich dem unzerlegbaren Projektiven P_1, und für $G' = G$ gleich der regulären Darstellung A_A, d. h., in beiden Fällen projektiv.

2.Fall: F'=0
Beim Vorliegen dieses Falles haben wir $J = \begin{pmatrix} 0 & M' \\ 0 & G' \end{pmatrix}$ mit einem rechten G-Untermodul M' von M. Da G eine k-Divisionsalgebra ist, ist M' isomorph zu einer direkten Summe von Kopien von Moduln G_G, sagen wir $M'_G \cong \bigoplus_{i=1}^{t} G_G$. Da ferner die A-Moduln $\begin{pmatrix} 0 & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$ isomorph sind, zerfällt J in eine direkte Summe von Kopien des unzerlegbaren

Projektiven P_2, und ist somit selbst projektiv.

Wir haben hiermit gezeigt, dass jeder Untermodul von A_A projektiv ist, wonach aus der Bemerkung nach Theorem 1.2 die Erblichkeit der Algebra A folgt.

1.2 Bewertete Graphen und k-Gattungen

Wir werden nachfolgend ein wichtiges kombinatorisches Hilfsmittel zum Studium erblicher Algebren und gewisser Kategorien einführen, und zwar so genannte bewertete Graphen und k-Gattungen. Es wird sich herausstellen, dass diese bereits wesentliche Invarianten der zugehörigen erblichen Algebra in sich speichern. So lassen sich beispielsweise sofort alle darstellungsendlichen, erblichen Algebren vollständig über ihre k-Gattung klassifizieren. Am Ende dieses Abschnittes werden wir auf den Begriff der Zahmheit von erblichen Algebren eingehen und eine Charakterisierung dessen mithilfe der zu der Algebra assoziierten k-Gattung angeben. Für eine detailliertere Beschreibung all dieser Begriffe sei der Leser beispielsweise verwiesen auf [5].

Wir starten damit, zu definieren, was wir unter einem bewerteten Graphen verstehen wollen und werden diesen Begriff dann in Beziehung zu erblichen Algebren setzen.

Definition 1.6. Unter einem **bewerteten Graphen** (Q, d) verstehen wir eine endliche Menge Q, die Menge der Ecken, zusammen mit einer Familie $\{d_{i,j}\}_{i,j \in Q}$ nichtnegativer ganzer Zahlen, wobei folgende Bedingungen gelten sollen:

1. $d_{i,i} = 0$, $\forall i \in Q$.
2. Es gibt natürliche Zahlen $\{f_i\}_{i \in Q}$, sodass $f_i d_{i,j} = f_j d_{j,i}$, $\forall i, j \in Q$, gilt.

Der bewertete Graph (Q, d) heißt **zusammenhängend**, wenn es für beliebige $i, j \in Q$ eine Folge von Ecken $i = l_0, l_1, \cdots, l_m = j$ gibt, sodass $d_{l_{k-1}, l_k} \neq 0$, $\forall k \in \{1, \cdots, m\}$, gilt. Wir werden Paare $\{i, j\}$, für welche $d_{i,j} \neq 0$ gilt, im Folgenden als **Kanten** des Graphen (Q, d) bezeichnen, und diese kurz in der Form $\bullet_i \overset{(d_{i,j}, d_{j,i})}{\rule[0.5ex]{2em}{0.4pt}} \bullet_j$ schreiben. Gilt hierbei zusätzlich $d_{i,j} = d_{j,i} = 1$, so schreiben wir einfach $\bullet_i \rule[0.5ex]{2em}{0.4pt} \bullet_j$ für diese Kante.

Wir erhalten eine **Orientierung** Ω des bewerteten Graphen (Q, d), indem wir für jede Kante $\{i, j\}$ eine Richtung vorgeben. Diese deuten wir durch einen Pfeil, etwa $\bullet_i \xrightarrow{(d_{i,j}, d_{j,i})} \bullet_j$ an. Unter einem **gerichteten Kreis** eines orientierten, bewerteten Graphen verstehen wir eine Folge von Ecken $(i_1, \cdots, i_t)$ aus Q, sodass $i_1 = i_t$ gilt, und die Kanten die Orientierung $\bullet_{i_k} \longrightarrow \bullet_{i_{k+1}}$ für $k \in \{1, \cdots, t-1\}$ besitzen. Einen gerichteten Kreis der Gestalt ${}_i\bullet \circlearrowleft$ nennen wir **Schlaufe**. Schließlich heißt ein orientierter, bewerteter Graph **zykelfrei**, wenn er keine gerichteten Kreise besitzt. Die zugehörige Orientierung Ω heißt in diesem Fall **zulässig**.

Wir bemerken abschließend zu dieser Definition noch, dass aufgrund der zweiten Bedingung an einen bewerteten Graphen für ein Paar von Ecken $\{i, j\}$ genau dann $d_{i,j} \neq 0$ ist, wenn $d_{j,i} \neq 0$ gilt. Damit ist es bei obiger Definition einer Kante ausreichend, nur $d_{i,j} \neq 0$ zu fordern, da diese Bedingung symmetrisch bezüglich i und j ist.

Bevor wir nun konkret auf die Bedeutung der bewerteten Graphen für erbliche Algebren eingehen, werden wir in einer weiteren Definition die Begriffe der *Modulation* und der *Realisierung* eines bewerteten Graphen (Q, d) eingehen. Diese stellen eine Verbindung her zwischen der kombinatorischen Struktur der Graphen und der algebraischen Struktur gewisser Schiefkörper und Bimoduln.

Definition 1.7. Unter einer **Modulation** $\mathcal{M}$ eines bewerteten Graphen (Q, d) verstehen wir eine Familie $\{D_i\}_{i\in Q}$ von Schiefkörpern zusammen mit einem D_i-D_j-Bimodul ${}_iM_j$ und einem D_j-D_i-Bimodul ${}_jM_i$ für jede Kante $\{i, j\}$ von (Q, d), sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\dim_{D_i}({}_iM_j) = d_{i,j}$.
2. Es gibt D_j-D_i-Bimodulisomorphismen ${}_jM_i \cong \mathrm{Hom}_{D_i}({}_iM_j, D_i) \cong \mathrm{Hom}_{D_j}({}_iM_j, D_j)$.

Eine **Gattung** $(\mathcal{M}, \Omega)$ eines bewerteten Graphen (Q, d) ist eine Modulation $\mathcal{M}$ zusammen mit einer zulässigen Orientierung Ω dieses Graphen.

Wir bemerken noch, dass mit den Bezeichnungen aus Definition 1.7 für eine Modulation $\mathcal{M}$ eines bewerteten Graphen (Q, d) folgende Gleichheit gilt:

$$\begin{aligned} d_{j,i} = \dim_{D_j}({}_jM_i) &\overset{2.}{=} \dim_{D_j}(\mathrm{Hom}_{D_j}({}_iM_j, D_j)) \\ &= \dim_{D_j}\left(\bigoplus_{k=1}^{\dim({}_iM_j)_{D_j}} \mathrm{Hom}_{D_j}(D_j, D_j)\right) \\ &= \dim({}_iM_j)_{D_j} \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Additivität des $\mathrm{Hom}_{D_j}(-, D_j)$-Funktors und die Tatsache, dass ${}_iM_j$ als rechter D_j-Modul in eine direkte Summe von Kopien von D_j zerfällt, genutzt.

Wir definieren noch zwei letzte Begriffe, die in den folgenden Kapiteln von zentralem Interesse sein werden. Hierbei geht es um die Begriffe der Darstellung einer Gattung eines bewerteten Graphen und des Morphismus zwischen zwei Darstellungen einer Gattung.

Definition 1.8. Eine **Darstellung** $V = (V_i, {}_i\phi_j)$ einer Gattung $(\mathcal{M}, \Omega)$ eines bewerteten Graphen (Q, d) ist eine Familie $\{V_i\}_{i\in Q}$ von endlichdimensionalen rechten D_i-Vektorräumen V_i zusammen mit D_j-linearen Abbildungen ${}_i\phi_j : V_i \otimes_{D_i} {}_iM_j \longrightarrow V_j$ für jede orientierte Kante $\bullet_i \longrightarrow \bullet_j$.

Unter einem Morphismus $\alpha : V \longrightarrow V'$ von einer Darstellung $V = (V_i, {}_i\phi_j)$ in eine

Darstellung $V = (V'_i, {}_i\phi'_j)$ versteht man eine Familie $\alpha = \{\alpha_i\}_{i\in Q}$ von D_i-linearen Abbildungen $\alpha_i : V_i \longrightarrow V'_i$, sodass für jede orientierte Kante $\bullet_i \longrightarrow \bullet_j$ die Gleichheit ${}_i\phi'_j\,(\alpha_i \otimes 1) = \alpha_j\,{}_i\phi_j$ gilt.

Es lässt sich zeigen, dass die Darstellungen einer Gattung $(\mathcal{M}, \Omega)$ stets eine abelsche Kategorie bilden.

Jetzt werden wir eine Konstruktion angeben, die es uns erlaubt, einer zusammenhängenden, basischen, erblichen k-Algebra A eine Gattung eines bewerteten Graphen zuzuordnen. Diese wird auch **k-Gattung** der Algebra A genannt. Wir werden ein Resultat angeben, mit dessen Hilfe wir anhand der k-Gattung einer erblichen Algebra sofort ihren Darstellungstyp ablesen können. Dies wird uns auch unmittelbar auf den Begriff der Zahmheit führen, in deren Kontext wir uns im weiteren Verlauf der Arbeit bewegen werden.

Sei uns also eine zusammenhängende, basische, erbliche k-Algebra A gegeben und sei $\{P_1, \cdots, P_n\}$ ein vollständiges System von Repräsentanten der Isomorphieklassen der unzerlegbaren, projektiven A-Moduln. Da A basisch ist, sind die unzerlegbaren direkten Summanden von A_A paarweise nicht isomorph und wir haben $A_A \cong \bigoplus_{k=1}^{n} P_k$. Nach einem klassischen Resultat der Darstellungstheorie ist für $\dim_k A < \infty$ die Algebra $A/\operatorname{rad} A$ halbeinfach. Dies liefert uns eine Zerlegung $A/\operatorname{rad} A = \prod_{k=1}^{n} D_k$ in ein direktes Produkt von k-Divisionsalgebren $D_k \cong \operatorname{End}_A(P_k/\operatorname{rad} P_k) \cong \operatorname{End}_A(P_k)$. Die letzte Isomorphie ist hierbei eine Konsequenz aus Folgerung 1.4. Weiterhin wird der A-Modul $\operatorname{rad} A/(\operatorname{rad} A)^2$ durch $\operatorname{rad} A$ von beiden Seiten annuliert, sodass $\operatorname{rad} A/(\operatorname{rad} A)^2$ eine natürliche $(A/\operatorname{rad} A)$-$(A/\operatorname{rad} A)$-Bimodulstruktur besitzt. Damit erhalten wir eine Zerlegung

$$\operatorname{rad} A/(\operatorname{rad} A)^2 = \bigoplus_{i,j=1}^{n} {}_iM_j \tag{1.2}$$

mit D_i-D_j-Bimoduln ${}_iM_j$. Man beachte, dass $A/\operatorname{rad} A = \prod_{k=1}^{n} D_k$ auf ${}_iM_j$ von links über D_i und von rechts über D_j operiert.

Wir definieren die **k-Gattung** von A als die Familie $(D_i,\, {}_iM_j)_{i,j=1}^{n}$. Den zugehörigen bewerteten Graphen (Q, d), seine Modulation $\mathcal{M}$ und seine Orientierung erhalten wir wie folgt:

1. Setze $Q := \{1, \cdots, n\}$.
2. Setze eine orientierte Kante $\bullet_i \longrightarrow \bullet_j$ zwischen i und j, falls ${}_iM_j \neq 0$ gilt.
3. Ordne der Ecke $i \in Q$ den Schiefkörper D_i zu.
4. Setze $d_{i,j} := \dim_{F_i}({}_iM_j)$ und $d_{j,i} := \dim({}_iM_j)_{F_j}$.

Wir werden diese Gattung im Folgenden mit $\mathcal{G}_A$, und den zugrunde liegenden bewerteten Graphen mit (Q_A, d_A) bezeichnen. Auf den Nachweis, dass dies tatsächlich eine Gattung im Sinne von Definition 1.7 ist, wollen wir an dieser Stelle aus Platzgründen verzichten. Eine besonders wichtige Rolle beim Studium erblicher Algebren spielen bestimmte, zu der k-Gattung der jeweiligen Algebra assoziierte, quadratische Formen. Sei dazu A eine erbliche k-Algebra wie oben. Dann sind sämtliche zuvor definierten k-Divisionsalgebren $\{D_i\}_{i=1}^n$ sowie die D_i-D_j-Bimoduln $\{{}_iM_j\}_{i,j=1}^n$ endlichdimensionale k-Vektorräume. Wir erhalten aus diesen eine quadratische Form $q_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$q_A(x_1, \cdots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} (\dim_k D_i) x_i^2 - \sum_{i,j=1}^{n} (\dim_k ({}_iM_j)) x_i x_j \,. \tag{1.3}$$

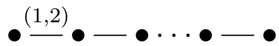
Es stellt sich heraus, dass eine gegebene erbliche k-Algebra A genau dann darstellungsendlich ist, wenn ihre so definierte quadratische Form positiv definit ist. Ist die quadratische Form positiv semidefinit, aber nicht positiv definit, so ist A darstellungsunendlich und von so genanntem **zahmen Darstellungstyp**. Ist hingegen q indefinit, so sagen wir, dass A von **wildem Darstellungstyp** ist. Diese Begriffe leiten sich daraus ab, dass eine erbliche Algebra von zahmem Darstellungstyp (wir werden diese im Folgenden kurz **zahm-erbliche Algebra** nennen) zwar unendlich viele Isomorphieklassen unzerlegbarer Moduln besitzt, sich diese aber durch eindimensionale Kurzen parametrisieren lassen (vgl. dazu [3]). Für eine Algebra A vom wilden Darstellungstyp existiert hingegen eine volle und treue Einbettung der Kategorie $\operatorname{mod}\langle X, Y\rangle$ der endlichdimensionalen Moduln der freien Algebra in zwei nichtkommutierenden Veränderlichen in die Kategorie $\operatorname{mod} A$. Während man prinzipiell die unzerlegbaren Moduln einer zahm-erblichen Algebra vollständig klassifizieren kann, entziehen sich die Algebren vom wilden Typ bis heute einer systematischen Untersuchung. Es wird sogar angenommen, dass es unmöglich ist, die Modulkategorie einer Algebra vom wilden Typ vollständig zu beschreiben. Wir werden uns im Weiteren Verlauf der Arbeit daher auf Algebren vom zahm-erblichen Typ einschränken.

Bemerkung 1.9. Liegt ein algebraisch abgeschlossener Körper k zugrunde, so erhalten wir für eine erbliche Algebra A sogar, dass sämtliche oben definierten k-Divisionsalgebren D_i isomorph zu k selbst sind. Wir können dann die zu A assoziierte Gattung $\mathcal{G}_A$ als einen Köcher verstehen, wobei wir die Zahlen $d_{i,j} = d_{j,i}$ als Vielfachheiten der zugehörigen Pfeile interpretieren. Man kann dann zeigen, dass A isomorph ist zur Wegealgebra des so erhaltenen Köchers (vgl [1, II.3. und VII.1.]).

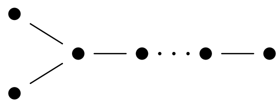
Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch eine Charakterisierung der darstellungsendlichen und der zahm-erblichen Algebren durch ihre bewerteten Graphen angeben. Hierzu sei bemerkt, dass sich diese aus dem Studium ihrer quadratischen Form q ergibt. Man sieht insbesondere, dass in der Formel (1.3) die konkrete Orientierung der Gattung $\mathcal{G}_A$ keine Rolle spielt, und dass wegen der Bedingung 2. aus Definition 1.6 auch die k-Dimensionen der k-Divisionsalgebren auf q (bis auf die Multiplikation mit einem Skalar) keinen Einfluss haben. Aus diesem Grund müssen wir lediglich den zugrunde liegenden bewerteten Graphen (Q_A, d_A) betrachten und erhalten folgendes Theorem (vgl. [4]):

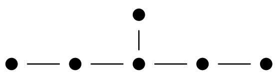
Theorem 1.10. *Sei A eine erbliche k-Algebra mit der Gattung $\mathcal{G}_A$ und deren zugrunde liegendem bewerteten Graphen (Q_A, d_A).*
A ist darstellungsendlich genau dann, wenn (Q_A, d_A) einer der folgenden bewerteten Graphen ist:

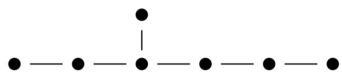
A_n :

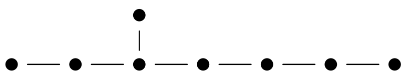
B_n : 

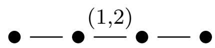
C_n : 

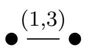
D_n : 

E_6 : 

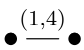
E_7 : 

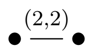
E_8 : 

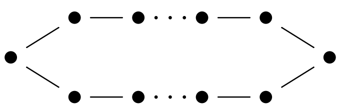
F_4 : 

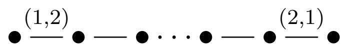
G_2 : 

A ist darstellungsunendlich vom zahmen Typ genau dann, wenn (Q_A, d_A) einer der folgenden bewerteten Graphen ist:

$\tilde{A}_{11}$: 

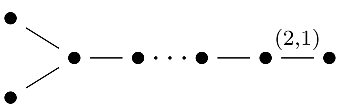
$\tilde{A}_{12}$: 

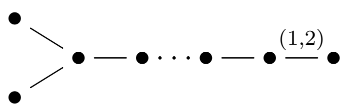
$\tilde{A}_{npq}$: 

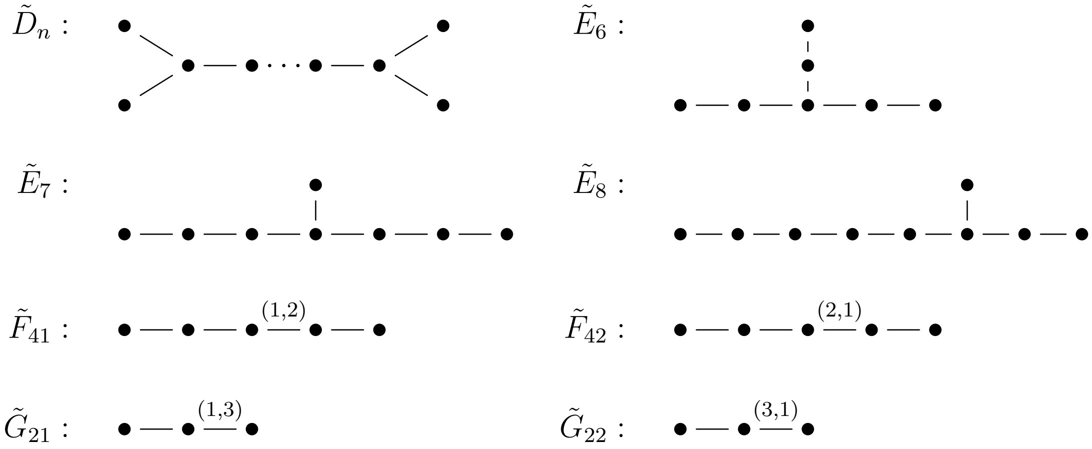
$\tilde{B}_n$: 

$\tilde{C}_n$: 

$\tilde{BC}_n$: 

$\tilde{BD}_n$: 

$\tilde{CD}_n$: 



Es ist nun weiterhin so, dass sich die unzerlegbaren Moduln einer zahm-erblichen Algebra A aus ihrer quadratischen Form und einer Gattung vom Typ $\tilde{A}_{11}$ oder $\tilde{A}_{12}$ ableiten lassen (vgl. ebenfalls [4]). Dies legt es nahe, die zahm-erblichen Algebren, deren bewerteter Graph von der Gestalt $\tilde{A}_{11}$ bzw. $\tilde{A}_{12}$ ist, näher zu untersuchen. Wir werden im nächsten Kapitel auf ein wesentliches Hilfsmittel der Darstellungstheorie eingehen. Bevor wir dazu übergehen, betrachten wir noch einmal die Algebra aus Beispiel 1.5:

Beispiel 1.11. Wir wollen für die erbliche Algebra $A = \begin{pmatrix} F & M \\ 0 & G \end{pmatrix}$ aus Beispiel 1.5 die k-Gattung und den zugehörigen bewerteten Graphen für den Fall $M \neq 0$ bestimmen. Dazu benötigen wir das Radikal $\operatorname{rad} A$ von A. Aus der Beschreibung (1.1) der rechten Untermoduln von A_A entnehmen wir sofort, dass A_A genau zwei maximale Untermoduln hat, und zwar:

$$\begin{pmatrix} F & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & G \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir, dass das Radikal als Schnitt dieser beiden maximalen Untermoduln die Gestalt $\operatorname{rad} A = \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt. Wir erhalten damit insbesondere $(\operatorname{rad} A)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Somit ergibt sich $A/\operatorname{rad} A \cong F \times G$ und $\operatorname{rad} A/(\operatorname{rad} A)^2 \cong {}_F M_G$. Damit besitzt A die k-Gattung $(\{F, G\}, {}_F M_G)$ und (Q_A, d_A) hat gerade zwei Ecken und ist von der Gestalt

$$\bullet \xrightarrow{(d_1,d_2)} \bullet\,,$$

wobei $d_1 = \dim_F({}_F M_G)$ und $d_2 = \dim({}_F M_G)_G$ gelten. Insbesondere ist die Algebra A nach Theorem 1.10 von zahmem Darstellungstyp genau dann, wenn $(\dim_F({}_F M_G)) \cdot (\dim({}_F M_G)_G) = 4$ gilt.

1.3 Duale Formulierung des Begriffs der Darstellung

Wir haben in Definition 1.8 den Begriff einer Darstellung einer Gattung eingeführt und wollen nun eine duale Variante angeben. Für einige weitere Ausführungen hierzu sei der Leser auf [7] verwiesen.

Sei $(\mathcal{M}, \Omega)$ die Gattung eines bewerteten Graphen (Q, d). Wir können eine Darstellung $V = (V_i, {}_i\psi_j)$ dieser Gattung nun definieren als eine Familie $\{V_i\}_{i \in Q}$ von endlichdimensionalen rechten D_i-Vektorräumen V_i zusammen mit D_i-linearen Abbildungen ${}_i\psi_j : \ V_i \longrightarrow V_j \otimes_{D_j} {}_jM_i$ für jede orientierte Kante $\bullet_i \longrightarrow \bullet_j$.

In diesem Kontext ist ein Morphismus $\alpha : \ V \longrightarrow V'$ von einer Darstellung $V = (V_i, {}_i\psi_j)$ in eine Darstellung $V = (V_i', {}_i\psi_j')$ eine Familie $\alpha = \{\alpha_i\}_{i \in Q}$ von D_i-linearen Abbildungen $\alpha_i : \ V_i \longrightarrow V_i'$, sodass für jede orientierte Kante $\bullet_i \longrightarrow \bullet_j$ gilt, dass ${}_i\psi_j' \, \alpha_i = (\alpha_j \otimes 1) \, {}_i\psi_j$ ist.

Um zu zeigen, dass es tatsächlich egal ist, welche der beiden Varianten man zur Definition einer Darstellung verwendet, werden wir nun angeben, wie man von der einen Variante zur anderen und wieder zurück gelangt. Wir werden hierbei wesentlich den in Definition 1.7 geforderten Bimodulisomorphismus ${}_jM_i \cong \mathrm{Hom}_{D_j}({}_iM_j, D_j)$ benutzen, welcher besagt, dass ${}_jM_i$ einfach als Dualraum zum rechten D_j-Vektorraum ${}_iM_j$ aufgefasst werden kann. Wir werden diese Bimoduln im Folgenden miteinander identifizieren.

Seien V_i ein rechter D_i-Vektorraum, V_j ein rechter D_j-Vektorraum, ${}_iM_j$ ein D_i-D_j-Bimodul und $f \ : \ V_i \otimes_{D_i} {}_iM_j \longrightarrow V_j$ eine D_j-lineare Abbildung. Sei ferner $d := \dim({}_iM_j)_{D_j}$. Wir wählen uns nun eine (rechte) D_j-Basis $\{m_1, m_2, \cdots, m_d\}$ von ${}_iM_j$ und bezeichnen die zugehörige (linke) Dualbasis in ${}_j(M)_i^* = {}_jM_i$ mit $\{\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_d\}$.

Wir definieren die zu f duale Abbildung $\overline{f} : \ V_i \longrightarrow V_j \otimes_{D_j} {}_jM_i$ durch

$$\overline{f}(x) := \sum_{k=1}^{d} f(x \otimes m_k) \otimes \Phi_k \, . \tag{1.4}$$

Ist uns umgekehrt eine Abbildung $g : \ V_i \longrightarrow V_j \otimes_{D_j} {}_jM_i$ gegeben und seien die Basen $\{m_1, m_2, \cdots, m_d\}$ und $\{\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_d\}$ wie oben. Da ${}_jM_i$ ein linker D_j-Vektorraum ist, und V_j ein rechter D_j-Vektorraum ist, lässt sich jedes Element $z \in V_j \otimes_{D_j} {}_jM_i$ schreiben als $z = \sum\limits_{k=1}^{d} z_k \otimes \Phi_k$ mit eindeutigen $z_k \in V_j$.

Seien nun $x \in V_i$ und $m \in {}_iM_j$. Dann haben wir $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{d} y_k \otimes \Phi_k$ mit eindeutigen $y_k \in V_j$ und $m = \sum\limits_{k=1}^{d} m_k a_k$ mit eindeutigen $a_k \in D_j$. Wir definieren nun die zu g duale

Abbildung $\overline{g}: \ V_i \otimes_{D_i} {}_iM_j \longrightarrow V_j$ durch

$$\overline{g}(x \otimes m) := \sum_{k=1}^{d} y_k a_k. \tag{1.5}$$

Wir zeigen nun noch, dass diese Abbildungsvorschriften tatsächlich zueinander inverse Bijektionen zwischen den beiden Darstellungsbegriffen etablieren:

Sei zunächst mit denselben Bezeichnungen wie oben $f : \ V_i \otimes_{D_i} {}_iM_j \longrightarrow V_j$ eine D_j-lineare Abbildung. Dann ist nach (1.4) die Abbildung $\overline{f}: \ V_i \longrightarrow V_j \otimes_{D_j} {}_jM_i$ gegeben durch $\overline{f}(x) = \sum_{k=1}^{d} f(x \otimes m_k) \otimes \Phi_k$. Seien nun $x \in V_i$ und $m \in {}_iM_j$ gegeben. Dann haben wir trivialerweise schon eine Zerlegung von $\overline{f}(x)$ in $\overline{f}(x) = \sum_{k=1}^{d} f(x \otimes m_k) \otimes \Phi_k$ und es sei $m = \sum_{k=1}^{d} m_k a_k$ mit $a_k \in D_j$. Es ergibt sich damit

$$\overline{\overline{f}}(x \otimes m) = \sum_{k=1}^{d} f(x \otimes m_k) a_k = f(x \otimes \sum_{k=1}^{d} m_k a_k) = f(x \otimes m)\,,$$

sodass tatsächlich $f = \overline{\overline{f}}$ gilt.

Sei umgekehrt $g: \ V_i \longrightarrow V_j \otimes_{D_j} {}_jM_i$ eine D_i-lineare Abbildung und seien $x \in V_i$ und $m \in {}_iM_j$ mit $g(x) = \sum_{k=1}^{d} y_k \otimes \Phi_k$ sowie $m = \sum_{k=1}^{d} m_k a_k$. Dann ist nach (1.5) die Abbildung $\overline{g}: \ V_i \otimes_{D_i} {}_iM_j \longrightarrow V_j$ gegeben durch $\overline{g}(x \otimes m) := \sum_{k=1}^{d} y_k a_k$. Wir erhalten für $\overline{\overline{g}}$ somit

$$\overline{\overline{g}}(x) = \sum_{k=1}^{d} \overline{g}(x \otimes m_k) \otimes \Phi_k = \sum_{k=1}^{d} y_k \otimes \Phi_k = g(x)\,,$$

sodass auch in dieser Richtung $g = \overline{\overline{g}}$ gilt und die Behauptung somit gezeigt ist.

Bemerkung 1.12. Wir haben im vorangegangenen Abschnitt den Begriff „dual“ benutzt. Streng genommen muss jetzt noch gezeigt werden, dass die oben angegebenen Konstruktionen auch verträglich sind mit Homomorphismen zwischen Darstellungen. Da hier allerdings nur die Idee der Dualkonstruktion aufgezeigt werden sollte, wollen wir an der Stelle darauf verzichten.

Kapitel 2

Auslander-Reiten-Theorie

In der Darstellungstheorie endlichdimensionaler Algebren liegt besonderes Interesse auf dem Studium unzerlegbarer Moduln, da sich nach Theorem 1.1 jeder endlichdimensionale Modul eindeutig in eine direkte Summe solcher zerlegen lässt. Dabei sind insbesondere auch die Homomorphismen zwischen den unzerlegbaren Moduln ein zentraler Gegenstand der Untersuchung. In diesem Zusammenhang sind ein wichtiges Hilfsmittel die so genannten **fast spaltenden Sequenzen**, welche auch **Auslander-Reiten-Sequenzen**[1] genannt werden. Diese enthalten in einem gewissen Sinne Informationen über Homomorphismen, welche in einem unzerlegbaren Modul starten bzw. enden.

Es werden uns für unsere Arbeit relevante Bezeichnungen sammeln und einige wichtige Resultate auflisten. Für eine umfassende Einführung in die Auslander-Reiten-Theorie sei der Leser verwiesen auf [1, IV].

2.1 Fast spaltende Sequenzen

Wir werden nachfolgend einen kurzen Abriss über die wichtigsten Formeln geben und starten mit der Definition von irreduziblen Morphismen:

Definition 2.1. Ein Homomorphismus $f: M \longrightarrow N$ in $\operatorname{mod} A$ heißt **irreduzibel**, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. f ist kein spaltender Monomorphismus.

2. f ist kein spaltender Epimorphismus.

3. Sind $f_1 \in \operatorname{Hom}_A(M, L)$ und $f_2 \in \operatorname{Hom}_A(L, N)$, sodass $f = f_2 f_1$ gilt, dann ist f_1 ein spaltender Monomorphismus oder f_2 ein spaltender Epimorphismus.

[1] benannt nach Maurice Auslander und Idun Reiten

Die irreduziblen Morphismen sind genau diejenigen Homomorphismen, welche keine nichttriviale Faktorisierung zulassen. Dies legt es nahe, den irreduziblen Morphismen - analog den unzerlegbaren Moduln - eine besondere Wichtigkeit einzuräumen. Folgende Charakterisierung irreduzibler Morphismen stellt sich als besonders wichtig heraus:

Lemma 2.2. *Seien M und N unzerlegbare A-Moduln. Ein Homomorphismus $f \in \operatorname{Hom}_A(M,N)$ ist irreduzibel genau dann, wenn $f \in \operatorname{rad}_A(M,N) \setminus \operatorname{rad}_A^2(M,N)$ gilt.*

Beweis. Nachzulesen in [1, IV, 1.6]. □

Hierbei bezeichnen $\operatorname{rad}_A(M,N)$ die Menge der Nichtisomorphismen $f \in \operatorname{Hom}_A(M,N)$ und $\operatorname{rad}_A^2(M,N)$ die Menge der Morphismen $f \in \operatorname{Hom}_A(M,N)$, für die ein A-Modul L und Homomorphismen $g \in \operatorname{rad}_A(M,L)$ und $h \in \operatorname{rad}_A(L,N)$ existieren, sodass $f = hg$ gilt.

Irreduzible Morphismen hängen eng mit den fast spaltenden Sequenzen zusammen, welche wir im Folgenden definieren.

Definition 2.3. Eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

heißt **fast spaltend**, wenn M und N unzerlegbar sind und wenn f und g irreduzibel sind.

Es gibt für fast spaltende Sequenzen eine Reihe äquivalenter Formulierungen, wie sie etwa [1, IV, 1.13] entnommen werden können. Man kann zeigen, dass eine fast spaltende Sequenz bereits durch ihren Startterm (bzw. Endterm) in folgendem Sinne eindeutig bestimmt ist:

Lemma 2.4. *Seien*

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{g_1} M \longrightarrow 0 \quad \textit{und}$$
$$0 \longrightarrow N_2 \xrightarrow{f_2} E_2 \xrightarrow{g_2} M \longrightarrow 0$$

zwei fast spaltende Sequenzen. Dann existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "u"] & E_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "v"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N_2 \arrow[r, "f_2"] & E_2 \arrow[r, "g_2"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

mit Isomorphismen u und v.

Lemma 2.5. *Seien*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{g_1} M_1 \longrightarrow 0 \quad \textit{und}$$
$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f_2} E_2 \xrightarrow{g_2} M_2 \longrightarrow 0$$

zwei fast spaltende Sequenzen. Dann existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "v"] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f_2"] & E_2 \arrow[r, "g_2"] & M_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

mit Isomorphismen v und w.

Beweis. Nachzulesen in [21, 11.4 und 11.9]. □

Die Frage danach, ob fast spaltende Sequenzen existieren, ist nicht trivial. Es lässt sich jedoch zeigen, dass für jeden unzerlegbaren, nichtprojektiven Modul M eine fast spaltende Sequenz der Form (2.1) mit Endterm M existiert. Dual existiert zu jedem unzerlegbaren, nichtinjektiven Modul N eine fast spaltende Sequenz der Form (2.1) mit Startterm N. Sei nun A eine erbliche k-Algebra. Die übliche Konstruktion einer fast spaltenden Sequenz benutzt die Funktoren $\tau := \mathcal{D}\,\mathrm{Ext}^1_A(-, A)$ und $\tau^{-1} := \mathrm{Ext}^1_A(\mathcal{D}(-), A)$, welche jeweils von $\mathrm{mod}\, A$ zurück nach $\mathrm{mod}\, A$ operieren. Diese Funktoren werden auch **Auslander-Reiten-Translationen** genannt. Diese Schreibweise suggeriert zunächst, dass die beiden Funktoren zueinander quasi-invers sind, was aber im Allgemeinen nicht der Fall ist. Es gilt folgende Aussage:

Theorem 2.6. *Sei A eine erbliche k-Algebra. Dann sind τ und τ^{-1} ein Paar zueinander quasi-inverser Funktoren, welche eine Äquivalenz von Kategorien $\underline{\mathrm{mod}}A \underset{\tau^{-1}}{\overset{\tau}{\rightleftarrows}} \overline{\mathrm{mod}}A$ liefern.*

Hierbei bezeichnet $\underline{\mathrm{mod}}A$ die projektiv stabile und $\overline{\mathrm{mod}}A$ die injektiv stabile Modulkategorie. Diese erhält man aus $\mathrm{mod}\, A$ dadurch, dass man das Ideal aller Morphismen, welche über einen projektiven bzw. injektiven Modul faktorisieren, aus der Kategorie $\mathrm{mod}\, A$ herausteilt. Durch diesen Prozess werden gewissermaßen alle projektiven bzw. injektiven Moduln zu Nullobjekten gemacht.

Mithilfe der beiden Funktoren τ und τ^{-1} lassen sich die fast spaltenden Sequenzen zu einem gegebenen Start- bzw. Endterm konstruieren. Es ist in der Tat so, dass eine fast spaltende Sequenz der Form (2.1) korrespondiert zu einem von Null verschiedenen Repräsentanten eines Elements des einfachen Sockels des $\mathrm{End}_A(M)$-$\mathrm{End}_A(M)$-Bimoduls $\mathrm{Ext}^1_A(M, \tau M)$ (bzw. analog zu einem nicht-Null-Element des einfachen Sockels des $\mathrm{End}_A(N)$-$\mathrm{End}_A(N)$-Bimoduls $\mathrm{Ext}^1_A(\tau^{-1}N, N)$). Dies führt unmittelbar auf

Theorem 2.7. *(1) Sei M ein unzerlegbarer, nichtprojektiver A-Modul. Dann existiert eine fast spaltende Sequenz* $0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$.
(2) Sei N ein unzerlegbarer, nichtinjektiver A-Modul. Dann existiert eine fast spaltende Sequenz $0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow \tau^{-1}N \longrightarrow 0$.

Beweis. Nachzulesen in [1, IV, 3.1]. □

Beim Beweis werden insbesondere die so genannten **Auslander-Reiten-Formeln** genutzt, welche eine herausragende Rolle spielen, da sie eine funktorielle Isomorphie zwischen einem Ext-Funktor und zwei modifizierten Hom-Funktoren etablieren. Wir betrachten wieder nur den erblichen Fall:

Theorem 2.8. *Sei A eine erbliche k-Algebra und seien M und N zwei Moduln aus* $\operatorname{mod} A$. *Dann existieren in beiden Variablen funktorielle Isomorphismen*

$$\operatorname{Ext}^1_A(M,N) \cong \mathcal{D}\operatorname{Hom}_A(\tau^{-1}N, M) \cong \mathcal{D}\operatorname{Hom}_A(N, \tau M). \tag{2.2}$$

Beweis. Nachzulesen in [1, IV, 2.13 und 2.14]. □

Wir wollen diese kurze Einführung mit einer Folgerung abschließen, die uns im Fall einer erblichen k-Algebra A liefert, dass die Auslander-Reiten-Translationen eine funktorielle Isomorphie auf den Morphismenräumen induziert.

Folgerung 2.9. *Seien A eine erbliche k-Algebra und M und N zwei Moduln aus* $\operatorname{mod} A$. *Dann gelten:*
(1) Besitzt M keinen projektiven direkten Summanden, so gibt es einen in beiden Variablen funktoriellen Isomorphismus $\operatorname{Hom}_A(M,N) \cong \operatorname{Hom}_A(\tau M, \tau N)$.
(2) Besitzt N keinen injektiven direkten Summanden, so gibt es einen in beiden Variablen funktoriellen Isomorphismus $\operatorname{Hom}_A(M,N) \cong \operatorname{Hom}_A(\tau^{-1}M, \tau^{-1}N)$.

Es sei angemerkt, dass es ein Analogon zu Theorem 2.8 für beliebige (nicht notwendigerweise erbliche) k-Algebren gibt. Bei diesem müssen dann allerdings wieder die projektiv bzw. injektiv stabilen Morphismenräume betrachtet werden. Diese Unterscheidung entfällt im erblichen Fall wegen $\operatorname{gl.dim} A \leq 1$.

2.2 Ein Resultat für unzerlegbare, nichtprojektive Moduln

Wenn wir noch einmal Folgerung 2.9 betrachten, so fällt auf, dass der Funktor τ einen Isomorphismus $\operatorname{End}_A(X) \longrightarrow \operatorname{End}_A(\tau X)$ induziert, falls X ein unzerlegbarer, nichtprojektiver Modul ist. Dies wirft unmittelbar die Frage danach auf, ob man eine Beziehung zwischen einem Endomorphismus $f \in \operatorname{End}_A(X)$ und seinem Bild $\tau(f) \in \operatorname{End}_A(\tau X)$ finden kann. Es stellt sich heraus, dass dies tatsächlich der Fall ist, wenn wir die Wirkung von f bzw. $\tau(f)$ auf eine in X endende fast spaltende Sequenz betrachten.

Wir werden uns in diesem Abschnitt an den Bezeichnungen aus [16, 3.] halten. Sei A eine erbliche k-Algebra und sei für jeden unzerlegbaren, nichtprojektiven A-Modul X aus $\operatorname{mod} A$

$$\mu_X:\ 0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

eine fixierte, fast spaltende Sequenz. Ferner sei $\kappa_X:\ \operatorname{Ext}^1_A(X,\tau X) \longrightarrow k$ eine k-lineare Abbildung mit $\kappa_X(\mu_X) \neq 0$. Für zwei k-Vektorräume V und W heißt eine k-Bilinearform $\langle -,-\rangle:\ V \times W \longrightarrow k$ ein **perfektes Paar**, falls für jedes $x \in V\backslash\{0\}$ ein $y \in W$ existiert mit $\langle x,y\rangle \neq 0$, und falls analog für jedes $y \in W\backslash\{0\}$ ein $x \in V$ existiert mit $\langle x,y\rangle \neq 0$.

Seien nun X und Y zwei Moduln aus $\operatorname{mod} A$, wobei X unzerlegbar, nichtprojektiv sein soll. Setzen wir $V := \operatorname{Hom}_A(Y,\tau X)$ und $W := \operatorname{Ext}^1_A(X,Y)$, so erhalten wir nach [16, 3.1 f.] ein perfektes Paar

$$\langle -,-\rangle:\ \operatorname{Hom}_A(Y,\tau X) \times \operatorname{Ext}^1_A(X,Y) \longrightarrow k\ ,\ (f,\eta) \mapsto \kappa_X(f\eta). \tag{2.3}$$

Das Element $f\eta \in \operatorname{Ext}^1_A(X,\tau X)$ wird hierbei durch Pushout der Folge η durch f erzeugt, d. h., $f\eta$ ist auffassbar als die untere Zeile in folgendem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
\eta:\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, "f"] & E_1 \arrow[r] \arrow[d, "g"] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
f\eta:\ 0 \arrow[r] & \tau X \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Durch das perfekte Paar (2.3) wird ein in X und Y natürlicher Isomorphismus

$$\psi_{X,Y}:\ \operatorname{Hom}_A(Y,\tau X) \longrightarrow \mathcal{D}\operatorname{Ext}^1_A(X,Y)\ ,\ f \mapsto \langle f,-\rangle \tag{2.4}$$

induziert. Es sei angemerkt, dass man bei der Wahl der zu fixierenden fast spaltenden Sequenz μ_X und der k-linearen Abbildung κ_X freie Wahl hat, solange $\kappa_X(\mu_X) \neq 0$ gilt.

Wir schließen nun zwei bekannte Resultate an, die sich bei den folgenden Betrachtungen als sehr wichtig herausstellen werden. Das erste geht bereits auf Wedderburn (vgl. [23, Theorem 1]) zurück. Da der Beweis in der Orginalreferenz allerdings stellenweise sehr vage ist, verwenden wir folgende Version dieses Satzes (vgl. [17, Proposition 4.6]):

Lemma 2.10. *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra. Sei ferner $B \subseteq A$ ein multiplikativ abgeschlossener Untervektorraum von A, welcher von nilpotenten Elementen aufgespannt wird. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $B^n = 0$.*

Dieses Resultat gilt trivialerweise im Fall, dass A eine kommutative Algebra ist. Allerdings ist bemerkenswert, dass es zumindest für endlichdimensionale k-Algebren A auch im nichtkommutativen Fall gültig ist. Sei nun D eine k-Divisionsalgebra. Wir definieren den (additiven) Kommutatorunterraum

$$K(D) := \mathrm{span}_k\{ab - ba \mid a, b \in D\}$$

von D. Dann gilt (vgl. [11, Corollary]):

Lemma 2.11. *Sei D eine k-Divisionsalgebra mit $D = K(D)$. Dann ist jedes Element der Matrixalgebra $D^{2\times 2}$ eine Summe nilpotenter Elemente.*

Es ist anzumerken, dass dieses Resultat sogar für beliebige Schiefkörper D gültig ist. Mit Lemma 2.10, Lemma 2.11 und den anderen Vorbemerkungen können wir nun folgendes beweisen:

Theorem 2.12. *Sei A eine erbliche k-Algebra und sei X aus $\mathrm{mod}\, A$ unzerlegbar und nichtprojektiv, sodass $\mathrm{End}_A(X)$ eine k-Divisionsalgebra ist. Sei weiter*

$$\mu_X: \ 0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

eine fast spaltende Sequenz mit Endterm X. Dann gilt für alle $f \in \mathrm{End}_A(X)$ die Beziehung

$$\tau(f) \cdot \mu_X = \mu_X \cdot f.$$

Beweis. Sei $\psi_{X,Y}$ der zuvor angegebene, in X und Y natürliche, Isomorphismus. Dieser ist insbesondere ein Isomorphismus von $\mathrm{End}_A(X)$-$\mathrm{End}_A(Y)$-Bimoduln. Damit erhalten wir aus der $\mathrm{End}_A(Y)$-Linearität sowie aus der $\mathrm{End}_A(X)$-Linearität zunächst folgende Beziehungen für $\eta \in \mathrm{Ext}^1_A(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_A(Y, \tau X)$, $f \in \mathrm{End}_A(X)$ und $h \in \mathrm{End}_A(Y)$:

$$\langle g, h \cdot \eta\rangle = \langle gh, \eta\rangle, \qquad \langle g, \eta \cdot f\rangle = \langle \tau(f)g, \eta\rangle.$$

Sei nun im speziellen $Y = \tau X$ und $\mu_X \in \mathrm{Ext}^1_A(X, \tau X)$ sei eine fast spaltende Sequenz. Da nach Folgerung 2.9 und der Voraussetzung nun $D = \mathrm{End}_A(X) \cong \mathrm{End}_A(\tau X)$ eine (endlichdimensionale) k-Divisionsalgebra ist, ist $E := \mathrm{Ext}^1_A(X, \tau X)$ ein 1-dimensionaler D-D-Bimodul und damit ist insbesondere $D \cdot \mu_X = E = \mu_X \cdot D$. Damit existiert für jedes $f \in D = \mathrm{End}_A(X)$ ein eindeutiges $f' \in D = \mathrm{End}_A(\tau X)$ mit $f' \cdot \mu_X = \mu_X \cdot f$. Wir können damit die Abbildung
$\sigma: \ D \longrightarrow D$, $f \mapsto \sigma(f)$, definieren, wobei $\sigma(f)$ das eindeutig bestimmte Element aus D ist mit $\sigma(f) \cdot \mu_X = \mu_X \cdot f$. Man beachte weiter, dass wegen $E = D \cdot \mu_X$ und der Tatsache, dass jedes von Null verschiedene Element aus D invertierbar ist, jedes von Null verschiedene Element aus E eine fast spaltende Sequenz ist. Wir behaupten nun, dass mit

den Bezeichnungen von zuvor $D \neq K(D)$ gilt. Nehmen wir an, dass $D = K(D)$ wäre. Nach Lemma 2.11 ist jedes Element der Matrixalgebra

$$B := \begin{pmatrix} D & D \\ D & D \end{pmatrix}$$

eine Summe nilpotenter Elemente. Da mit D aber auch B endlichdimensional über k ist und da B, wie eben bemerkt, von nilpotenten Elementen aufgespannt wird, erhalten wir aus Lemma 2.10 die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$ mit $B^n = 0$. Insbesondere ist also das Einselement von B nilpotent, was natürlich ein Widerspruch ist. Daher muss also $D \neq K(D)$ gelten. Da die Abbildung $D \longrightarrow E$, $d \mapsto d \cdot \mu_X$, ein Isomorphismus von k-Vektorräumen ist, erhalten wir unmittelbar, dass auch $E = D \cdot \mu_X \neq K(D) \cdot \mu_X$ gilt. Sei nun $\nu \in (E \backslash K(D)) \cdot \mu_X$ eine beliebige fast-spaltende Sequenz. Dann existiert ein Untervektorraum R von E, sodass $E = \operatorname{span}_k\{\nu\} \oplus (K(D) \cdot \mu_X) \oplus R$ (als Zerlegung in k-Vektorräume) ist. Für ein beliebiges Element $\eta \in E$ schreiben wir im Folgenden $\eta = \alpha \cdot \nu + r$ mit $\alpha \in k$ und $r \in (K(D) \cdot \mu_X) \oplus R$ und definieren damit die k-lineare Abbildung $\kappa_X : E \longrightarrow k$, $\eta = \alpha \cdot \nu + r \mapsto \alpha$. Für das durch diese Abbildung κ_X induzierte perfekte Paar $\langle -.- \rangle$ gilt dann insbesondere $\langle d, \mu_X \rangle = 0$ für jedes $d \in K(D)$. Seien nun $f \in D$ und $\eta \in E$ beliebig. Dann existiert ein $d \in D$, sodass $\eta = d \cdot \mu_X$ gilt und wir erhalten folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned} \langle \tau(f), \eta \rangle = \langle 1, \eta \cdot f \rangle = \langle 1, (d \cdot \mu_X) \cdot f \rangle &= \langle 1, d \cdot (\sigma(f) \cdot \mu_X) \rangle = \langle d\sigma(f), \mu_X \rangle \\ &= \langle d\sigma(f), \mu_X \rangle + \langle \sigma(f)d - d\sigma(f), \mu_X \rangle = \langle \sigma(f)d, \mu_X \rangle \\ &= \langle \sigma(f), d \cdot \mu_X \rangle = \langle \sigma(f), \eta \rangle. \end{aligned}$$

Aus der k-Bilinearität von $\langle -, - \rangle$ folgt damit $\langle \tau(f) - \sigma(f), \eta \rangle = 0$. Da $f \in D$ und $\eta \in E$ beliebig waren und da $\langle -, - \rangle$ ein perfektes Paar ist, folgt $\tau(f) = \sigma(f)$ für jedes $f \in D$. Nach Definition von σ ist letztlich $\mu_X \cdot f = \sigma(f) \cdot \mu_X = \tau(f) \cdot \mu_X$ für jedes $f \in D$ und somit ist die Behauptung gezeigt. □

Das vorangegangene Theorem hat einige interessante Konsequenzen. So lässt sich beispielsweise zeigen, dass unter denselben Voraussetzungen wie in Theorem 2.12 aus der Existenz eines kommutativen Diagramms mit exakten Zeilen der Gestalt

$$\begin{tikzcd} \mu_X : 0 \arrow[r] & \tau X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"] & E \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ \mu_X : 0 \arrow[r] & \tau X \arrow[r, "u"] & E \arrow[r, "v"] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

bereits $f' = \tau(f)$ folgt. Dies impliziert insbesondere, dass für jedes $\alpha \in k$ die Beziehung $\tau(\alpha \cdot 1_{\operatorname{End}_A(X)}) = \alpha \cdot 1_{\operatorname{End}_A(X)}$ gilt.

2.3 Der Auslander-Reiten-Köcher einer Algebra A

In der Darstellungstheorie endlichdimensionaler Algebren wird besonderes Augenmerk auf das Studium der unzerlegbaren Moduln und der irreduziblen Morphismen zwischen diesen gelegt. Man kann diese Informationen in einem gerichteten Graphen, dem so genannten **Auslander-Reiten-Köcher** kombinatorisch speichern. Ist A eine k-Algebra und M ein A-Modul, so bezeichnen wir mit $[M]$ die Klasse aller zu M isomorphen A-Moduln. Damit erhalten wir den zu A gehörigen Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ durch folgende zwei Schritte:

1. Assoziiere zu jeder Isomorphieklasse $[M]$ eines unzerlegbaren A-Moduls M aus $\operatorname{mod} A$ eine Ecke in $\Gamma(\operatorname{mod} A)$.

2. Seien $[M]$ und $[N]$ Isomorphieklassen unzerlegbarer Moduln aus $\operatorname{mod} A$. Seien ferner

$$a := \dim(\operatorname{rad}_A(M,N)/\operatorname{rad}_A^2(M,N))_{\operatorname{End}_A(M)/\operatorname{rad}\operatorname{End}_A(M)} \text{ und}$$
$$b := \dim_{\operatorname{End}_A(N)/\operatorname{rad}\operatorname{End}_A(N)}(\operatorname{rad}_A(M,N)/\operatorname{rad}_A^2(M,N)).$$

   Ist eine der Zahlen a oder b von Null verschieden, so fügen wir einen Pfeil $[M] \xrightarrow{(a,b)} [N]$ hinzu. Gilt hierbei $a = b = 1$, so schreiben wir einfach $[M] \longrightarrow [N]$.

Der zweite Punkt motiviert sich dadurch, dass nach Lemma 2.2 die irreduziblen Morphismen gerade die Homomorphismen aus $\operatorname{rad}_A(M,N)\setminus \operatorname{rad}_A^2(M,N)$ sind und die Dimensionen des Faktorraums $\operatorname{rad}_A(M,N)/\operatorname{rad}_A^2(M,N)$ in gewisser Weise die Anzahl der wesentlich voneinander verschiedenen, irreduziblen Abbildungen von M nach N messen. Wir werden im Folgenden die eckigen Klammern weglassen, sofern dies nicht zu Missverständnissen führt.

Bemerkung 2.13. Falls k algebraisch abgeschlossen ist, sind mit den vorhergehenden Bezeichnungen die k-Divisionsalgebren $\operatorname{End}_A(M)/\operatorname{rad}\operatorname{End}_A(M)$ und $\operatorname{End}_A(N)/\operatorname{rad}\operatorname{End}_A(N)$ schon isomorph zu k und wir erhalten damit $a = b$. In diesem Fall wird die Beschriftung der Pfeile weggelassen und man setzt stattdessen $a = b$ Pfeile von $[M]$ nach $[N]$.

Der Auslander-Reiten-Köcher einer darstellungsunendlichen Algebra wird in der Regel mehrere Zusammenhangskomponenten besitzen. Man unterscheidet im Wesentlichen drei verschiedene Typen von Komponenten des Auslander-Reiten-Köchers einer Algebra A, die wir im Folgenden definieren werden.

Definition 2.14. Sei A eine k-Algebra und $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ ihr Auslander-Reiten-Köcher. Ein unzerlegbarer Modul M heißt **postprojektiv**, wenn ein unzerlegbarer, projektiver A-Modul P und eine ganze Zahl $n \geq 0$ existieren, sodass $\tau^n(M) \cong P$ ist. M heißt **präinjektiv**, wenn ein unzerlegbarer, injektiver A-Modul I und eine ganze Zahl $m \geq 0$

existieren, sodass $\tau^{-m}(M) \cong I$ ist. Schließlich heißt M **regulär**, wenn M weder postprojektiv noch präinjektiv ist. Ferner werden wir einen beliebigen Modul N aus Mod A regulär nennen, wenn er weder postprojektive noch präinjektive direkte Summanden besitzt.

Eine Zusammenhangskomponente des Auslander-Reiten-Köchers $\Gamma(\mathrm{mod}\, A)$ heißt postprojektiv/präinjektiv/regulär, wenn alle in ihr liegenden Moduln entsprechend postprojektiv/präinjektiv/regulär sind.

Während im Falle von zahm-erblichen Algebren die postprojektiven und präinjektiven Komponenten des Auslander-Reiten-Köchers einfach zugänglich und bestens verstanden sind, stellt sich das Studium der regulären Komponenten als ungleich schwieriger heraus. Wir werden uns in den folgenden Kapiteln diesem regulären Teil des Auslander-Reiten-Köchers einer zahm-erblichen Algebra A widmen und im Speziellen die einzelnen Zusammenhangskomponenten, welche auch **Röhren** genannt werden, näher studieren.

Ist A eine zahm-erbliche k-Algebra, so gibt es jeweils genau eine postprojektive und eine präinjektive Komponente. Bezeichnen wir die postprojektive Komponente mit $\mathcal{P}(A)$, die präinjektive Komponente mit $\mathcal{Q}(A)$ und die Gesamtheit der regulären Komponenten mit $\mathcal{R}(A)$, so kann man sich den Auslander-Reiten-Köcher von A schematisch wie folgt vorstellen (vgl. [22]):

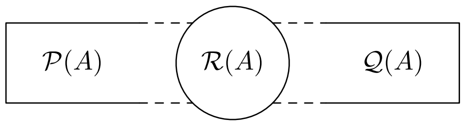


Abbildung 2.1: Auslander-Reiten-Köcher einer zahm-erblichen Algebra

Es ist bemerkenswerter Weise so, dass es keine Homomorphismen von Objekten in $\mathcal{Q}(A)$ zu Objekten in $\mathcal{R}(A)$ oder $\mathcal{P}(A)$ und keine Homomorphismen von Objekten in $\mathcal{R}(A)$ zu Objekten in $\mathcal{P}(A)$ gibt (vgl. [1, VIII, 2.13]). Alle nicht-Null-Homomorphismen laufen also gewissermaßen stets „von links nach rechts“.

Sind nun R_1, R_2 reguläre Moduln, so sind auch $\tau R_1, \tau R_2, \tau^{-1} R_1$ und $\tau^{-1} R_2$ reguläre Moduln und nach voriger Bemerkung kann kein nicht-Null-Homomorphismus $f: R_1 \longrightarrow R_2$ über einen projektiven oder injektiven Modul faktorisieren. Damit gilt

$$\overline{\mathrm{Hom}}_A(R_1, R_2) \cong \mathrm{Hom}_A(R_1, R_2) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_A(R_1, R_2)\ ,$$

und wir erhalten unmittelbar:

Folgerung 2.15. *Sei A eine zahm-erbliche k-Algebra. Dann induzieren die Auslander-Reiten-Translationen τ und τ^{-1} zueinander quasi-inverse Äquivalenzen*

$$add\,\mathcal{R}(A) \underset{\tau^{-1}}{\overset{\tau}{\rightleftarrows}} add\,\mathcal{R}(A) \tag{2.5}$$

auf der Unterkategorie $add\,\mathcal{R}(A)$ der regulären A-Moduln.

Kapitel 3

Die Struktur des regulären Teils von $\Gamma(\operatorname{mod} A)$

Wir werden in diesem Kapitel die Struktur der regulären Teils des Auslander-Reiten-Köchers einer zahm-erblichen Algebra A näher untersuchen. Die Untersuchung wird sogar noch ausgeweitet auf eine Klasse von Moduln aus $\operatorname{Mod} A$, und zwar sogenannte reguläre Torsionsmoduln. Es stellt sich heraus, dass die Klasse der regulären Torsionsmoduln über einer zahm-erblichen Algebra eine exakte abelsche Unterkategorie von $\operatorname{Mod}(A)$ ist, und dass sie zerfällt in ein Produkt von Kategorien, von denen jede äquivalent zur Kategorie der Torsionsmoduln über einer gewissen Matrixalgebra ist (vgl. [20, 4.4]).

Zunächst werden wieder einige wichtige Definitionen und Standardresultate vorangestellt. Ein wesentliches Hilfsmittel zum Beweis dieser Resultate ist die in (1.3) definierte quadratische Form q_A der Algebra A und deren so genannter Defekt δ_A. Wir werden hier nicht näher auf diese eingehen, da sie keine vordergründige Relevanz für diese Arbeit haben. Die wichtigsten Eigenschaften der quadratischen Form und des Defekts und ihre Bedeutung für das Studium regulärer Moduln sind etwa [4] zu entnehmen.

Im ersten Abschnitt werden wir so genannte Röhren einführen und einige ihrer wesentlichen Eigenschaften auflisten, um dann in den folgenden Abschnitten ein zentrales Strukturtheorem anzugeben und konkreter auf die Eigenschaften der Moduln in den so genannten homogenen Röhren einzugehen. Am Ende des Kapitels wird eine Charakterisierung der Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{R}(A)$, welche die Struktur einer homogenen Röhre besitzen, stehen.

3.1 Röhren

Unter einer Röhre werden wir eine spezielle Familie von Köchern verstehen, die man sich so vorstellen kann, dass sie auf einem einseitig unendlichen langen Zylinder liegen (daher auch der Begriff „Röhre“). Wir betrachten dazu zunächst einen Köcher $\mathbb{B}$, den wir durch folgende Vorschrift erhalten:

1. Assoziiere eine Ecke zu jedem Element aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.
2. Es gibt jeweils genau einen Pfeil von (n, m) nach $(n, m+1)$ und von $(n, m+1)$ nach $(n-1, m)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$.

Wir können diesen Köcher wie folgt visualisieren:

$$\mathbb{B}: \quad \begin{tikzcd}[column sep=small]
{} \arrow[dr] & \vdots & {} \arrow[dr] & \vdots & {} \arrow[dr] & \vdots & {} \arrow[dr] & \vdots & {} \\
& (2,3) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (1,3) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (0,3) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (-1,3) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & (1,2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (0,2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (-1,2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
& (1,1) \arrow[ur] & & (0,1) \arrow[ur] & & (-1,1) \arrow[ur] & & (-2,1) \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Wir definieren nun auf $\mathbb{B}$ eine Translation τ. Diese soll auf den Ecken durch $\tau(n, m) := (n+1, m)$ wirken und einen Pfeil $\alpha : (n_1, m_1) \longrightarrow (n_2, m_2)$ auf den Pfeil $\tau\alpha : (n_1+1, m_1) \longrightarrow (n_2+1, m_2)$ abbilden. Die so definierte Abbildung τ ist, genau wie jede ihrer Potenzen τ^r ($r \in \mathbb{Z}$), ein Automorphismus des Köchers $\mathbb{B}$.

Bezeichnen wir mit (τ^r) die zyklische Gruppe der Automorphismen, welche durch τ^r erzeugt wird, so operiert diese auf natürliche Weise auf dem Köcher $\mathbb{B}$. Wir bezeichnen mit $\mathbb{B}/(\tau^r)$ die Menge der Orbits, die unter der Operation von (τ^r) auf $\mathbb{B}$ entstehen. Diese Menge entsteht also dadurch, dass in $\mathbb{B}$ jeweils die Punkte $\tau^{kr}(n, m)$ ($k \in \mathbb{Z}$) und die Pfeile $\tau^{kr}\alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$) miteinander identifiziert werden. In einem gewissen Sinne „rollt“ man also den Köcher $\mathbb{B}$ auf einen einseitig unendlichen Zylinder auf.

Dies bringt uns unmittelbar zu folgender Definition:

Definition 3.1. Sei (Γ, τ) ein Köcher mit einer Translation. Dann heißt (Γ, τ) eine **Röhre vom Rang** r, wenn es einen Isomorphismus von Translationsköchern $\Gamma \cong \mathbb{B}/(\tau^r)$ gibt, wobei $\mathbb{B}$ der Köcher aus (3.1) ist. Ist hierbei $r = 1$, so nennen wir die Röhre **homogen**. Ferner heißt die Menge aller Punkte von Γ, welche genau einen direkten Vorgänger (bzw. Nachfolger) besitzen, der **Mund** der Röhre.

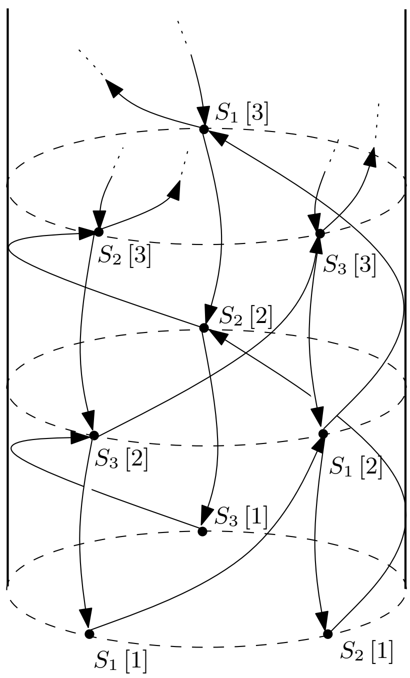
Wir werden uns im Weiteren für Zusammenhangskomponenten von Auslander-Reiten-Köchern zahm-erblicher Algebren interessieren, welche gerade die Struktur einer Röhre besitzen. Dabei werden die Ecken mit Isomorphieklassen unzerlegbarer Moduln belegt sein und die Pfeile entsprechend zu den irreduziblen Morphismen zwischen diesen korrespondieren. Hat eine Komponente $\mathcal{C}$ des Auslander-Reiten-Köchers einer Algebra A die Struktur einer Röhre vom Rang r und ist M ein Objekt aus $\in \mathcal{C}$, so gilt $\tau^r M \cong M$ und $\tau^k M \not\cong M$ für $1 \leq k < r$.

Bezeichnen wir mit $\{S_1[1], S_2[1], \cdots, S_r[1]\}$ eine Familie von Moduln auf dem Mund der Röhre $\mathcal{C}$, sodass $\tau S_1[1] = S_r[1]$ und $\tau S_i[1] = S_{i-1}[1]$ für $i = 2, \cdots, r$ gilt, so gibt es für jedes $i \in \{1, \cdots, r\}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Modul $S_i[n]$ in $\mathcal{C}$. Für diese gelten wieder die Beziehungen $\tau S_1[n] = S_r[n]$ und $\tau S_i[n] = S_{i-1}[n]$ für $i = 2, \cdots, r$ und $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin existieren irreduzible Morphismen $\iota_{i,n} : \ S_i[n] \longrightarrow S_i[n+1]$ und $p_{i,n} : \ S_{i-1}[n+1] \longrightarrow S_i[n]$, sodass folgende kurze exakte Sequenzen fast spaltend sind:

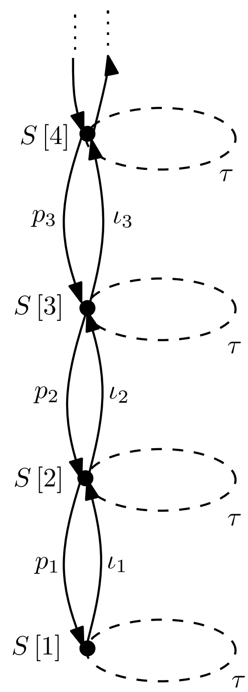
$$\mu_{i,n} : \ 0 \longrightarrow S_i[n] \xrightarrow{\begin{bmatrix} \iota_{i,n} \\ p_{i+1,n-1} \end{bmatrix}} S_i[n+1] \oplus S_{i+1}[n-1] \xrightarrow{\begin{bmatrix} p_{i+1,n} & \iota_{i+1,n-1} \end{bmatrix}} S_{i+1}[n] \longrightarrow 0\,. \tag{3.2}$$

Hierbei ist $S_{r+1}[n] = S_1[n]$ und $S_i[0] = 0$ zu setzen für alle $i \in \{1, \cdots, r\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Im Falle einer homogenen Röhre lassen wir die Indizes „i“ einfach weg. Wir können Röhren im Auslander-Reiten-Köcher einer Algebra A also wie folgt visualisieren:



(a) Röhre vom Rang 3



(b)
Homogene Röhre

Abbildung 3.1: Röhren im Auslander-Reiten-Köcher

Betrachten wir in der fast spaltenden Sequenz (3.2) die k-Dimensionen der Moduln, so erhalten wir die Gleichung

$$\dim_k(S_i[n+1]) + \dim_k(S_{i+1}[n-1]) = \dim_k(S_i[n]) + \dim_k(S_{i+1}[n])$$

Hieraus folgen induktiv die Beziehungen $\dim_k(S_i[n+1]) > \dim_k(S_i[n])$ und $\dim_k(S_i[n+1]) > \dim_k(S_{i+1}[n])$ für alle $i \in \{1, \cdots r\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Da weiterhin jeder irreduzible Morphismus ein echter Mono- oder Epimorphismus ist, erhalten wir, dass die $\iota_{i,n}$ allesamt Monomorphismen und die $p_{i,n}$ allesamt Epimorphismen sind.

Wir sind bisher davon ausgegangen, dass uns eine Röhre im Auslander-Reiten-Köcher einer Algebra A gegeben war und haben gesehen, dass wir damit unmittelbar alle fast spaltenden Sequenzen angeben können, welche in Objekten dieser Röhre starten (bzw. enden) und wir konnten auch von den irreduziblen Morphismen sofort angeben, ob es sich bei diesen um Mono- oder Epimorphismen handelt. Nun wollen wir uns auf den Standpunkt stellen, dass wir eine Familie von Moduln mit bestimmten Eigenschaften gegeben haben und Kriterien angeben, wann diese eine Röhre erzeugen.

3.2 Das Strukturtheorem für $\mathcal{R}(A)$

Es sei auch in diesem Abschnitt A wieder eine zahm-erblichen Algebra. Es werden zunächst wieder einige Definitionen und Notationen entwickelt und wir werden das Theorem angeben, welches eine (fast) vollständige Beschreibung der Zusammenhangskomponenten des regulären Teils von $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ liefert. Den Beweis und die dafür nötigen Einzelheiten werden wir nicht in voller Tiefe wiedergeben können, da dies den Rahmen der Arbeit sprengen würde. Wir werden aber auf die wesentlichen Schritte des Beweises eingehen. Für eine vollständige Darstellung des Falles, in dem k algebraisch abgeschlossen ist, welcher sich im übrigen mit einigen Abwandlungen auch auf den allgemeinen Fall übertragen lässt, sei auf [22, X-XI] verwiesen.

Wir starten mit einigen grundlegenden Definitionen.

Definition 3.2. Ein Modul E aus $\operatorname{mod} A$ heißt **Ziegel**[1], wenn die Endomorphismenalgebra $\operatorname{End}_A(E)$ ein Schiefkörper ist. Zwei Ziegel E_1 und E_2 heißen **orthogonal**, wenn $\operatorname{Hom}_A(E_1, E_2) = 0$ und $\operatorname{Hom}_A(E_2, E_1) = 0$ gelten.

Sei uns jetzt eine Familie $\{E_1, E_2, \cdots, E_r\}$ paarweise orthogonaler Ziegel gegeben. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{E} = \mathcal{EXT}_A(E_1, \cdots, E_r)$ die volle Unterkategorie von $\operatorname{mod} A$, deren Objektklasse aus dem Nullmodul und allen Moduln M besteht, für die eine Kette von Untermoduln

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_l = M \tag{3.3}$$

[1] engl.: brick

existiert, sodass $l \in \mathbb{N}$ und $M_i/M_{i-1} \cong E^i$ mit $E^i \in \{E_1, \cdots, E_r\}$ für alle $1 \leq i \leq l$ ist.

Es ist unschwer zu sehen, dass die so definierte Unterkategorie $\mathcal{E}$ additiv und abgeschlossen unter Erweiterungen ist. Seien hierzu M_1 und M_2 zwei Moduln aus $\mathcal{E}$ und M' eine Erweiterung von M_1 nach M_2, d. h., es gebe eine kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M' \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$. Dann können wir M_1 mit einem Untermodul von M' und M_2 mit einem Faktormodul von M' identifizieren. Die zu M' gehörige Folge von Untermoduln (3.3) lässt sich dann unmittelbar aus den zu M_1 und M_2 gehörigen Folgen zusammensetzen, sodass M' in $\mathcal{E}$ liegt. Umgekehrt kann man jeden Modul M aus $\mathcal{E}$ aus einem $M_1 \in \{E_1, \cdots, E_r\}$ durch eine Folge von Erweiterungen mit Moduln aus $\{E_1, \cdots, E_r\}$ erzeugen. Deshalb spricht man bei $\mathcal{E}$ auch von einer **Erweiterungskategorie**. Wir haben damit gezeigt, dass $\mathcal{E}$ die kleinste, additive, volle Unterkategorie von $\operatorname{mod} A$ ist, welche abgeschlossen unter Erweiterungen ist und welche die Moduln $\{E_1, \cdots, E_r\}$ enthält.

Wir nennen in Analogie zu den einfachen Objekten aus $\operatorname{mod} A$ ein Objekt S aus $\mathcal{E}$ **einfach**, wenn S in $\mathcal{E}$ nur 0 und sich selbst als Untermoduln besitzt. Schließlich nennen wir eine volle Unterkategorie $\mathcal{U}$ von $\operatorname{mod} A$ **exakt**, wenn der Inklusionsfunktor $\mathcal{U} \hookrightarrow \operatorname{mod} A$ ein exakter Funktor ist, d. h., wenn jede kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow U_1 \longrightarrow U' \longrightarrow U_2 \longrightarrow 0$$

in $\mathcal{U}$ als Sequenz von $\operatorname{mod} A$ betrachtet ebenfalls exakt ist.

Eine entscheidende Rolle beim Studium der Eigenschaften der Kategorien $\mathcal{EXT}_A(E_1, \cdots, E_r)$ spielt das Konzept der Einreihigkeit, welches wir nun allgemein definieren werden.

Definition 3.3. Sei $\mathcal{U}$ eine abelsche Unterkategorie von $\operatorname{mod} A$ und C ein Objekt aus $\mathcal{U}$. Das Objekt C heißt **einreihig**, wenn für beliebige Unterobjekte C_1 und C_2 von C in $\mathcal{U}$ stets eine der Inklusionen $C_1 \subseteq C_2$ oder $C_2 \subseteq C_1$ gilt. Die Kategorie $\mathcal{U}$ heißt einreihig, wenn jedes ihrer unzerlegbaren Objekte einreihig ist.

Für ein einreihiges Objekt bilden also seine Unterobjekte eine durch Inklusion total geordnete Kette. Wir haben nun alle Begriffe beisammen, um folgendes Theorem zu formulieren:

Theorem 3.4. *Sei A eine zahm-erbliche k-Algebra und seien $\{E_1, \cdots, E_r\}$ eine Menge paarweise orthogonaler Ziegel aus $\operatorname{mod} A$, sodass $\tau E_1 \cong E_r$ und $\tau E_{i+1} \cong E_i$ für $i = 1, \cdots, r-1$ gilt. Dann ist die Kategorie $\mathcal{E} = \mathcal{EXT}_A(E_1, \cdots, E_r)$ eine exakte, abelsche Unterkategorie von $\operatorname{mod} A$. Weiterhin ist jedes unzerlegbare Objekt M aus $\mathcal{E}$ einreihig und $\mathcal{E}$ bildet eine Röhre vom Rang r in $\Gamma(\operatorname{mod} A)$. Die Moduln $E_1, \cdots, E_r$ bilden eine vollständige Menge von Moduln, welche auf dem Mund dieser Röhre liegen.*

Beweis. Es sei verwiesen auf [22, X, 2.2 und 2.6]. □

Um nun zur eigentlichen Aussage über die Struktur des regulären Teils von $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ zu kommen, müssen wir noch eine Aussage zitieren, welche sich mithilfe des bereits erwähnten Defekts δ_A der zahm-erblichen Algebra A herleiten lässt, und zwar:

Lemma 3.5. *Sei A eine zahm-erbliche Algebra. Dann ist die volle Unterkategorie $add\,\mathcal{R}(A)$ von* $\operatorname{mod} A$ *abelsch und abgeschlossen unter Erweiterungen.*

Beweis. Vergleiche [22, XI, 2.4]. □

Wir nennen in Analogie zur Orthogonalität von Moduln zwei Komponenten $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$ von $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ orthogonal, wenn $\operatorname{Hom}_A(X, Y) = 0$ und $\operatorname{Hom}_A(Y, X) = 0$ für alle Moduln X aus $\mathcal{U}_1$ und alle Moduln Y aus $\mathcal{U}_2$ gelten.

Bevor wir nun zum angestrebten Theorem kommen können, brauchen wir noch eine Definition.

Definition 3.6. Sei A eine zahm-erbliche Algebra. Ein von Null verschiedener, regulärer A-Modul, welcher bis auf den Nullmodul und sich selbst keine weiteren regulären Untermoduln besitzt, heißt **einfach regulär**.

Wir kommen nun zum zentralen Theorem über die Struktur des regulären Teils von $\Gamma(\operatorname{mod} A)$.

Theorem 3.7. *Sei A eine zahm-erbliche Algebra. Dann bilden die Komponenten von $\mathcal{R}(A)$ eine Familie $\mathcal{T}^A = \{\mathcal{T}^A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von paarweise orthogonalen Röhren $\mathcal{T}^A_\lambda$ über einer gewissen Indexmenge Λ. Ferner ist die Kategorie $add\,\mathcal{R}(A)$ einreihig.*

Beweis. (Beweisskizze) Der Beweis kann ebenfalls in [22, XI, 2.8] gefunden werden. Wir werden kurz die wesentlichen Schritte auflisten.

Nach Folgerung 2.15 induzieren die Funktoren τ und τ^{-1} zueinander quasi-inverse Äquivalenzen auf $add\,\mathcal{R}(A)$. Damit bilden sie insbesondere einfach reguläre Moduln wieder in solche ab. Sei nun S ein einfach regulärer Modul. Dann können wir die Familie $\{\tau^k S \mid k \in \mathbb{Z}\}$ aller τ-Verschiebungen von S betrachten. Man kann nun indirekt zeigen, dass diese Familie endlich ist. Da dies bereits aus $S \cong \tau^m S$ für ein $m \neq 0$ folgen würde, nehmen wir an, dass alle $\tau^k S$, $k \in \mathbb{Z}$, paarweise nicht isomorph sind. Dann folgt für $s \neq t$ sofort $\operatorname{Hom}_A(\tau^s S, \tau^t S) = 0$, da die Moduln $\tau^s S$ und $\tau^t S$ nicht isomorphe einfache Objekte von $add\,\mathcal{R}(A)$ sind. Wir definieren den Modul $M := S \oplus \tau^2 S \oplus \tau^4 S \oplus \cdots \oplus \tau^{2n} S$. Hierbei sei n der Rang der Grothendieck-Gruppe von A, oder gleichbedeutend die Anzahl der Ecken der k-Gattung von A. Dann ist M die Summe von $n+1$ unzerlegbaren Moduln und es gilt $\operatorname{Hom}_A(M, \tau M) = 0$. Dies widerspricht allerdings einem Resultat aus der Kipptheorie, welches besagt, dass es einen solchen Modul nicht geben kann (vgl. [1, VIII, 5.3]). Somit ist unsere Annahme falsch, und die Familie $\{\tau^k S \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist tatsächlich endlich. Man sieht unmittelbar, dass diese die Voraussetzungen von Theorem 3.4 erfüllt und damit eine Röhre in $\mathcal{R}(A)$ erzeugt. Ist nun N ein beliebiger unzerlegbarer regulärer Modul, so gibt es einen einfach regulären Modul S_N, welcher sich in N einbetten lässt. Damit gehört N zur Röhre, welche S_N auf ihrem Mund enthält. Somit liegt jeder unzerlegbare reguläre Modul in einer Röhre. Nach Theorem 3.4 folgt hiermit auch die Einreihigkeit der Kategorie $add\,\mathcal{R}(A)$. Die paarweise Orthogonalität der Röhren folgt daraus, dass zwischen den einfach regulären Moduln aus verschiedenen Röhren keine von Null verschiedenen Homomorphismen existieren. □

Wir können aus dem vorangegangenen Theorem eine wichtige Invariante ableiten, welche in Analogie zum Begriff der Länge eines Moduls aus $\mathrm{mod}\,A$ steht. Sei uns ein unzerlegbar regulärer Modul M gegeben. Dann gibt es eine eindeutige Kette von Untermoduln

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_l = M$$

mit einem $l \in \mathbb{N}$, sodass die Faktoren M_i/M_{i-1} für $i = 1, \cdots, l$ einfach regulär sind. Die Zahl l ist also eine Invariante für den Modul M. Dies gilt offenbar auch noch, wenn wir M nicht als unzerlegbar annehmen. Dann geht lediglich die Eindeutigkeit der Kette von Untermoduln verloren, nicht aber die ihrer Länge.

Definition 3.8. Sei A eine zahm-erbliche Algebra und M ein regulärer Modul. Sei weiter

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_l = M$$

mit $l \in \mathbb{N}$ und mit einfach regulären Faktoren M_i/M_{i-1} für $i = 1, \cdots, l$. Die Größe l wird **reguläre Länge** von M genannt und mit $rl(M)$ bezeichnet.

Es ist bekannt, dass für eine zahm-erbliche Algebra A sämtliche Röhren bis auf maximal drei Ausnahmen homogen sind (vgl. [4, Main Theorem]). Dies legt es nahe, besonderes Augenmerk auf das Studium homogener Röhren zu legen. Wir werden im folgenden Abschnitt näher auf die Eigenschaften dieser eingehen und insbesondere Zusammenhänge zwischen den Endomorphismenalgebren der Moduln innerhalb der Röhre herstellen.

3.3 Homogene Röhren

Es sei A wieder eine zahm-erbliche Algebra und $\mathcal{T}$ eine homogene Röhre aus $\mathcal{R}(A)$. Wir übernehmen die Bezeichnungen aus Abbildung 3.1. Seien also $S[n]$, $n \in \mathbb{N}$, die regulären Moduln, welche in $\mathcal{T}$ liegen. Dann gibt es irreduzible Morphismen $\iota_n : S[n] \longrightarrow S[n+1]$ sowie $p_n : S[n+1] \longrightarrow S[n]$, welche der Auslander-Reiten-Relation $p_1\iota_1 = 0$ bzw. $\iota_n p_n = -p_{n+1}\iota_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, genügen.

Wir werden zur Vereinfachung ein neues System irreduzibler Morphismen verwenden. Seien hierzu für $n \in \mathbb{N}$:

$$\hat{p}_n := p_n \text{ und}$$
$$\hat{\iota}_n := (-1)^{n+1}\iota_n.$$

Dann gilt:

$$\hat{\iota}_n \hat{p}_n = \hat{p}_{n+1} \hat{\iota}_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.4}$$

Wir werden nachfolgend mit diesen neuen irreduziblen Morphismen arbeiten und verwenden statt $\hat{\iota}$ bzw. $\hat{p}$ einfach wieder die Bezeichnungen ι bzw. p für diese.

Die Moduln $S[n]$ sind nach Theorem 3.7 einreihig. Wir zeigen, dass $rl(S[n]) = n$ gilt. Zunächst ist $S[1]$ einfach regulär, sodass $rl(S[1]) = 1$ folgt. Nehmen wir an, dass für ein $m \in \mathbb{N}$ die Gleichheit $rl(S[m]) = m$ gilt. Da es einen irreduziblen Monomorphismus $\iota_m : \ S[m] \longrightarrow S[m+1]$ gibt, ist zunächst $rl(S[m+1]) \geq m+1$. Weiter ist $rl(\operatorname{Im}\, \iota_m) = m$. Wäre $rl(S[m+1]) \geq m+2$, so gäbe es einen Untermodul U von $S[m+1]$ und Inklusionen $\operatorname{Im}\, \iota_m \subsetneq Q \subsetneq S[m+1]$. Seien nun h die Inklusion $Q \hookrightarrow S[m+1]$ und g die Komposition

$$S[m] \overset{\iota_m}{\twoheadrightarrow} \operatorname{Im}\, \iota_m \hookrightarrow Q\ .$$

Dann erhalten wir eine Faktorisierung $\iota_m = hg$, in welcher g kein spaltender Monomorphismus und h kein spaltender Epimorphismus ist. Dies widerspricht aber der Definition 2.1 irreduzibler Morphismen. Somit muss $rl(S[m+1]) = m+1$ gelten und es folgt induktiv $rl(S[n]) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Man beachte, dass sich dieses Argument auch auf nicht-homogenen Röhren auf dieselbe Weise durchführen lässt. Es sei weiterhin bemerkt, dass sämtliche reguläre Kompositionsfaktoren von $S[n]$ isomorph zu $S[1]$ sind und dass $\tau S[n] \cong S[n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ferner ist die Endomorphismenalgebra des einfach regulären Moduls $S[1]$ eine k-Divisionsalgebra. Dies lässt sich in Analogie zum Lemma von Schur beweisen.

Wir starten unsere Untersuchungen mit einem Lemma, welches auch als Homotopielemma bekannt ist.

Lemma 3.9. *Sei in* $\operatorname{mod} A$ *ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen der folgenden Gestalt gegeben:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Dann existiert ein Homomorphismus $h_1 : \ B \longrightarrow A'$ *mit* $a = h_1 f$ *genau dann, wenn es einen Homomorphismus* $h_2 : \ C \longrightarrow B'$ *mit* $c = g'h_2$ *gibt.*

Beweis. Sei zunächst ein $h_1 : \ B \longrightarrow A'$ mit $a = h_1 f$ gegeben. Dann folgt $bf = f'a = f'h_1 f$, sodass $(b - f'h_1)f = 0$ gilt. Da die Abbildung $g : \ B \longrightarrow C$ der Kokern von f ist, gibt es nach der universellen Eigenschaft dessen ein eindeutiges $h_2 : C \longrightarrow B'$, für welches $h_2 g = b - f'h_1$ gilt. Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} && cg = g'b = g'(h_2 g + f'h_1) = g'h_2 g \\ \Rightarrow && (c - g'h_2)g = 0 \\ \overset{g \text{ Epim.}}{\Rightarrow} && c - g'h_2 = 0 \\ \Rightarrow && c = g'h_2. \end{aligned}$$

Sei uns umgekehrt ein $h_2 : C \longrightarrow B'$ mit $c = g'h_2$ gegeben. Dann haben wir zunächst $g'b = cg = g'h_2 g$, woraus $g'(b - h_2 g) = 0$ folgt. Da nun $f' : A' \longrightarrow B'$ der Kern von g' ist, gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $h_1 : B \longrightarrow A'$ mit $f'h_1 = b - h_2 g$. Somit ergibt sich folgende Implikationskette:

$$\begin{aligned} && f'a = bf = (f'h_1 + h_2 g)f = f'h_1 f \\ \Rightarrow && f'(a - h_1 f) = 0 \\ \overset{f' \text{ Monom.}}{\Rightarrow} && a - h_1 f = 0 \\ \Rightarrow && a = h_1 f, \end{aligned}$$

womit der Beweis abgeschlossen ist. □

Wir werden im Folgenden eine Reihe von Aussagen darüber trefen, wie sich Homomorphismen von $\mathrm{End}_A(S[n])$ nach $\mathrm{End}_A(S[n+1])$ liften lassen. Hierzu benötigen wir zunächst einige weitere Vorbetrachtungen.

Zunächst bemerken wir, dass die irreduziblen Morphismen ι_n und p_n auf natürliche Art und Weise Algebrenhomomorphismen von $\mathrm{End}_A(S[n+1])$ nach $\mathrm{End}_A(S[n])$ induzieren. Um dies einzusehen, betrachten wir zunächst $\iota_n : S[n] \longrightarrow S[n+1]$. Da es sich bei diesem irreduziblen Morphismus um einen Monomorphismus handelt und $rl(S[m]) = m, \forall m \in \mathbb{N}$, gilt, induziert ι_n einen Isomorphismus von $S[n]$ nach rad $S[n+1]$, sodass wir eine kurze exakte Sequenz der Form:

$$0 \longrightarrow S[n] \xrightarrow{\iota_n} S[n+1] \xrightarrow{\text{Coker } \iota_n} S[n+1]/\,\text{rad } S[n+1] \longrightarrow 0$$

erhalten. Ist nun $f \in \mathrm{End}_A(S[n+1])$ ein Endomorphismus von $S[n+1]$, so gilt $f(\text{rad } S[n+1]) \subseteq \text{rad } S[n+1]$,, sodass Coker $\iota_n \circ f \circ \iota_n = 0$ ist. Wegen der universellen Eigenschaft des Kerns obiger kurzer exakter Sequenz können wir f einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\bar{f} \in \mathrm{End}_A(S[n])$ zuordnen, welcher folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} S[n+1] \arrow[r, "f"] & S[n+1] \\ S[n] \arrow[u, "\iota_n"] \arrow[r, "\bar{f}"] & S[n] \arrow[u, "\iota_n"] \,. \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

Dies liefert uns einen Homomorphismus $\tilde{\iota}_n : \ \mathrm{End}_A(S[n+1]) \longrightarrow \mathrm{End}_A(S[n])$, $f \mapsto \bar{f}$, von Algebren.
Betrachten wir statt ι_n die irreduziblen Epimorphismen p_n, so gilt für diese $\mathrm{Ker}\ p_n = \mathrm{soc}\ S[n+1]$. Wir erhalten damit wieder eine kurze exakte Sequenz, welche von folgender Gestalt ist:

$$0 \longrightarrow \mathrm{soc}\ S[n+1] \xrightarrow{\mathrm{Ker}\ p_n} S[n+1] \xrightarrow{p_n} S[n] \longrightarrow 0\,.$$

Da für ein gegebenes $f \in \mathrm{End}_A(S[n+1])$ die Inklusion $f(\mathrm{soc}\ S[n+1]) \subseteq \mathrm{soc}\ S[n+1]$ gilt, erhalten wir $p_n \circ f \circ \mathrm{Ker}\ p_n = 0$, sodass wir aus der universellen Eigenschaft des Kokerns in obiger exakter Sequenz einen eindeutigen Homomorphismus $f' \in \mathrm{End}_A(S[n])$ erhalten, welcher folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} S[n+1] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_n"] & S[n+1] \arrow[d, "p_n"] \\ S[n] \arrow[r, "f'"] & S[n] \,. \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

Wieder erhalten wir einen Homomorphismus $\tilde{p}_n : \ \mathrm{End}_A(S[n+1]) \longrightarrow \mathrm{End}_A(S[n])$, $f \mapsto f'$, von Algebren.

Wir werden nun zeigen, dass es sich bei $\tilde{\iota}_n$ und $\tilde{p}_n$ um Epimorphismen handelt.

Lemma 3.10. *Mit denselben Bezeichnungen wie im Vorangegangenen ist $\tilde{\iota}_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Epimorphismus.*

Beweis. Wir benötigen zunächst eine Aussage über den Raum $\mathrm{Ext}^1_A(S[1], S[n])$. Unter Ausnutzung der Formeln aus Theorem 2.8 und unter Beachtung von $\tau S[n] \cong S[n]$ erhalten wir einen natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Ext}^1_A(S[1], S[n]) \cong \mathcal{D}\,\mathrm{Hom}_A(S[n], S[1])$. Ist nun $g \in \mathrm{Hom}_A(S[n], S[1])$, so faktorisiert g als

$$g = \ S[n] \xrightarrow{p_1 \cdots p_{n-1}} S[1] \xrightarrow{\hat{g}} S[1]\,.$$

Hierbei ist $\hat{g} \in D := \mathrm{End}_A(S[1])$. Da sich also jeder Homomorphismus $g \in \mathrm{Hom}_A(S[n], S[1])$ in der Form $g = \hat{g} p_1 \cdots p_{n-1}$ schreiben lässt, folgern wir, dass der Raum $\mathrm{Ext}^1_A(S[1], S[n])$ ein eindimensionaler rechter D-Vektorraum ist. Dies impliziert Folgendes:

Ist $\eta_0 : \ 0 \longrightarrow S[n] \xrightarrow{u} E_1 \xrightarrow{v} S[1] \longrightarrow 0$ eine nicht spaltende, kurze exakte Sequenz und $\eta : \ 0 \longrightarrow S[n] \xrightarrow{u'} E_2 \xrightarrow{v'} S[1] \longrightarrow 0$ eine beliebige kurze exakte Sequenz, so existiert ein $h \in \mathrm{End}_A(S[1])$ mit $\eta = \eta_0 h$. D. h., η lässt sich als Pullback von η_0 schreiben:

$$\begin{tikzcd} \eta : 0 \arrow[r] & S[n] \arrow[r, "u'"] \arrow[d, equal] & E_2 \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "h'"] & S[1] \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ \eta_0 : 0 \arrow[r] & S[n] \arrow[r, "u"] & E_1 \arrow[r, "v"] & S[1] \arrow[r] & 0 . \end{tikzcd}$$

Die Eigenschaft, dass g durch $p_1 \cdots p_{n-1}$ faktorisiert, ist nicht trivial. Wir geben eine kurze Begründung hierfür an und verwenden die Tatsache, dass der Homomorphismus

$$S[n] \xrightarrow{\begin{bmatrix} \iota_n \\ p_{n-1} \end{bmatrix}} S[n+1] \oplus S[n-1] \, ,$$

welcher Teil der fast spaltenden Sequenz (3.2) ist, ein so genannter links minimal fast spaltender Morphismus ist (vgl. [1, IV, 1.1 und 1.13]). Es ergibt sich, dass ein Homomorphismus $(u_1, u_2) : \ S[n+1] \oplus S[n-1] \longrightarrow S[1]$ existiert mit $g = u_1 \iota_n + u_2 p_{n-1}$. Da ferner ι_n in den Kern von u_1 abbildet, ist $u_1 \iota_n = 0$ und damit $g = u_2 p_{n-1}$ mit $u_2 \in \mathrm{Hom}_A(S[n-1], S[1])$. Induktives Fortführen dieses Arguments liefert die besagte Faktorisierung von g.

Wir müssen nun zeigen, dass für jedes $\bar{f} \in \mathrm{End}_A(S[n])$ ein $f \in \mathrm{End}_A(S[n+1])$ existiert mit $\iota_n \bar{f} = f \iota_n$. Sei uns also ein $\bar{f} \in \mathrm{End}_A(S[n])$ gegeben. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$\nu : \ 0 \longrightarrow S[n] \xrightarrow{\iota_n} S[n+1] \xrightarrow{p_1 \cdots p_n} S[1] \longrightarrow 0$$

und das folgende aus ν durch Pushout mittels $\bar{f}$ erzeugte kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \nu : 0 \arrow[r] & S[n] \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[d, "\bar{f}"] & S[n+1] \arrow[r, "p_1 \cdots p_n"] \arrow[d, "h_1"] & S[1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ \bar{f}\nu : 0 \arrow[r] & S[n] \arrow[r, "u"] & E \arrow[r, "v"] & S[1] \arrow[r] & 0 . \end{tikzcd} \tag{3.7}$$

Da es sich bei ι_n um einen nicht spaltenden Monomorphismus handelt, ist die Sequenz ν ebenfalls nicht spaltend. Nach unseren Vorüberlegungen gibt es daher ein $g \in \mathrm{End}_A(S[1])$, sodass $\bar{f}\nu = \nu g$ ist. Wir erhalten folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\nu : 0 \arrow[r] & S[n] \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[d, "\bar{f}"] & S[n+1] \arrow[r, "p_1\cdots p_n"] \arrow[d, "h_1"] & S[1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\bar{f}\nu = \nu g : 0 \arrow[r] & S[n] \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "v"] \arrow[d, "h_2"] & S[1] \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
\nu : 0 \arrow[r] & S[n] \arrow[r, "\iota_n"] & S[n+1] \arrow[r, "p_1\cdots p_n"] & S[1] \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd} \tag{3.8}$$

Es folgt $\iota_n\bar{f} = h_2h_1\iota_n$, sodass die Behauptung für $f := h_2h_1$ folgt. $\square$

Es folgt ein weiteres Lemma für die durch die p_n erzeugten Homomorphismen $\tilde{p}_n$.

Lemma 3.11. *Mit denselben Bezeichnungen wie im Vorangegangenen ist $\tilde{p}_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Epimorphismus.*

Beweis. Der Beweis läuft analog zum Beweis von Lemma 3.10 ab. Wir betrachten den Raum $\operatorname{Ext}^1_A(S[n], S[1]) \cong \mathcal{D}\operatorname{Hom}_A(S[1], S[n])$. Man zeigt wieder, dass jedes $g \in \operatorname{Hom}_A(S[1], S[n])$ in $g = \iota_{n-1}\cdots\iota_1\hat{g}$ mit einem $\hat{g} \in D := \operatorname{End}_A(S[1])$ faktorisiert. Hieraus folgt, dass $\operatorname{Ext}^1_A(S[n], S[1])$ ein eindimensionaler linker D-Vektorraum ist.

Sei nun wieder $f' \in \operatorname{End}_A(S[n])$. Wir müssen zeigen, dass es ein $f \in \operatorname{End}_A(S[n+1])$ gibt, sodass $p_nf = f'p_n$ gilt. Betrachten wir nun die nicht spaltende Sequenz

$$\nu^* :\ 0 \longrightarrow S[1] \xrightarrow{\iota_n\cdots\iota_1} S[n+1] \xrightarrow{p_n} S[n] \longrightarrow 0$$

und das hieraus durch Pullback mittels f' erzeugte kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\nu^*f' : 0 \arrow[r] & S[1] \arrow[r, "u'"] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "h_2'"] & S[n] \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & 0 \\
\nu^* : 0 \arrow[r] & S[1] \arrow[r, "\iota_n\cdots\iota_1"] & S[n+1] \arrow[r, "p_n"] & S[n] \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd} \tag{3.9}$$

Da ν^* nicht spaltet, existiert ein $g' \in \operatorname{End}_A(S[1])$ mit $\nu^*f' = g'\nu^*$. Wir erhalten dadurch folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\nu^* : 0 \arrow[r] & S[1] \arrow[r, "\iota_n\cdots\iota_1"] \arrow[d, "g'"] & S[n+1] \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "h_1'"] & S[n] \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\nu^*f' = g'\nu^* : 0 \arrow[r] & S[1] \arrow[r, "u'"] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "h_2'"] & S[n] \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & 0 \\
\nu^* : 0 \arrow[r] & S[1] \arrow[r, "\iota_n\cdots\iota_1"] & S[n+1] \arrow[r, "p_n"] & S[n] \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd} \tag{3.10}$$

Es ergibt sich $f'p_n = p_n h_2' h_1'$, sodass die Behauptung mit $f := h_2' h_1'$ folgt. $\square$

Im Weiteren werden speziell die Algebrenepimorphismen $\tilde{p}_n$ eine Rolle spielen. Wir werden die Kette von Epimorphismen

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{End}_A(S[4]) \xrightarrow{\tilde{p}_3} \mathrm{End}_A(S[3]) \xrightarrow{\tilde{p}_2} \mathrm{End}_A(S[2]) \xrightarrow{\tilde{p}_1} \mathrm{End}_A(S[1]) \qquad (3.11)$$

betrachten und über diese den so genannten inversen Limes bilden. Die so entstehende Algebra wird uns die zugrundeliegende Röhre vollständig beschreiben. Bevor wir allerdings dazu übergehen, studieren wir die Endomorphismenalgebren $\mathrm{End}_A(S[n])$ und die Wirkung der $\tilde{p}_n$ speziell auf deren Ideale.

Wir haben für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen ausgezeichneten Endomorphismus $\pi_n := \iota_{n-1} p_{n-1} \in \mathrm{End}_A(S[n])$, wobei $\pi_1 := 0$ zu setzen ist. Es gilt für diese Endomorphismen $\mathrm{Ker}\ \pi_n = \mathrm{soc}\ S[n]$ und $\mathrm{Im}\ \pi_n = \mathrm{rad}\ S([n])$.

Wir starten damit, zu zeigen, dass das von π_n in $\mathrm{End}_A(S[n])$ erzeugte Linksideal gleich dem von π_n erzeugten Rechtsideal ist (und somit gleich dem von π_n erzeugten zweiseitigen Ideal).

Lemma 3.12. *Sei* $\pi_n \in \mathrm{End}_A(S[n])$ *wie zuvor definiert. Dann gilt*

$$\pi_n \,\mathrm{End}_A(S[n]) = \mathrm{End}_A(S[n])\pi_n = (\pi_n).$$

Beweis. Die Behauptung ist klar für $n = 1$. Wir nehmen also im Folgenden $n \geq 2$ an.

Sei zunächst $\pi_n f \in \pi_n \mathrm{End}_A(S[n])$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass es ein $f' \in \mathrm{End}_A(S[n])$ gibt, für welches $\pi_n f = f'\pi_n$ gilt. Betrachten wir dazu $\tilde{p}_{n-1}(f) \in \mathrm{End}_A(S[n-1])$. Dann finden wir nach Lemma 3.10 ein $f' \in \mathrm{End}_A(S[n])$ mit $\tilde{\iota}_{n-1}(f') = \tilde{p}_{n-1}(f)$. Es folgt:

$$\pi_n f = \iota_{n-1} p_{n-1} f = \iota_{n-1} \tilde{p}_{n-1}(f) p_{n-1} = \iota_{n-1} \tilde{\iota}_{n-1}(f') p_{n-1} = f' \iota_{n-1} p_{n-1} = f' \pi_n.$$

Ist umgekehrt $g\pi_n \in \pi_n \mathrm{End}_A(S[n])$. Dann finden wir nach Lemma 3.11 ein $g' \in \mathrm{End}_A(S[n])$ mit $\tilde{\iota}_{n-1}(g) = \tilde{p}_{n-1}(g')$ und wir erhalten analog:

$$g\pi_n = g\iota_{n-1} p_{n-1} = \iota_{n-1} \tilde{\iota}_{n-1}(g) p_{n-1} = \iota_{n-1} \tilde{p}_{n-1}(g') p_{n-1} = \iota_{n-1} p_{n-1} g' = \pi_n g'.$$

Damit haben wir $\pi_n \mathrm{End}_A(S[n]) = \mathrm{End}_A(S[n])\pi_n$ und es ist damit auch unmittelbar klar, dass dies ein zweiseitiges Ideal ist, welches gerade von π_n erzeugt wird, womit die Behauptung bewiesen ist. $\square$

Als nächstes wollen wir eine vollständige Beschreibung der Ideale der Algebren $\mathrm{End}_A(S[n])$ liefern. Wir werden insbesondere sehen, dass jedes einseitige Ideal auch zweiseitig ist und von einem Element erzeugt wird.

Lemma 3.13. *Sei I ein (einseitiges) Ideal in $\mathrm{End}_A(S[n])$. Dann existiert ein $n_0 \in \{0, \cdots n\}$, sodass $I = \{f \in \mathrm{End}_A(S[n]) \mid \mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{rad}_A^{n_0} S[n]\}$ gilt. I ist ferner ein zweiseitiges Hauptideal.*

Beweis. Sei o. B. d. A. I ein Linksideal in $\mathrm{End}_A(S[n])$. Da wir für $S[n]$ die Kette

$$0 = \mathrm{rad}_A^n(S[n]) \subsetneq \mathrm{rad}_A^{n-1}(S[n]) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{rad}_A^2(S[n]) \subsetneq \mathrm{rad}_A^1(S[n]) \subsetneq \mathrm{rad}_A^0(S[n]) = S[n]$$

von regulären Untermoduln mit $\mathrm{rad}_A^k(S[n])/\,\mathrm{rad}_A^{k+1}(S[n])$ einfach regulär, für alle $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, haben, können wir die Zahl

$$n_0 := min\{m \in \mathbb{N}_0 \mid \exists g \in I : \mathrm{Im}\, g = \mathrm{rad}_A^m(S[n])\} \tag{3.12}$$

definieren. Ist $n_0 = n$, so ist $I = 0$ und die Behauptung ist trivial. Wir können daher $n_0 < n$ annehmen. Sei $g_0 \in I$ ein Homomorphismus, welcher gerade $\mathrm{Im}\, g_0 = \mathrm{rad}_A^{n_0}(S[n])$ erfüllt, und sei $h \in I$ beliebig. Nach der Definition von n_0 folgt sofort $\mathrm{Im}\, h \subseteq \mathrm{rad}_A^{n_0}(S[n])$. Da ferner $S[n - n_0]$ und $\mathrm{rad}_A^{n_0}(S[n])$ isomorph sind (ein Isomorphismus kann aus $\iota_{n-1} \cdots \iota_{n-n_0}$ abgeleitet werden), faktorisieren h und g_0 als $h = h_2 h_1$ bzw. $g_0 = g_2 g_1$ mit gewissen h_1, $g_1 \in \mathrm{Hom}_A(S[n], S[n-n_0])$ und h_2, $g_2 \in \mathrm{Hom}_A(S[n-n_0], S[n])$.

Analog zu den Argumenten, welche in den Beweisen von Lemma 3.10 und Lemma 3.11 angebracht wurden, faktorisieren die h_i und g_i $(i = 1, 2)$ weiter in:

$$\begin{aligned} g_1 &= \hat{g}_1 p_{n-n_0} \cdots p_{n-1}\,, \\ h_1 &= \hat{h}_1 p_{n-n_0} \cdots p_{n-1}\,, \\ g_2 &= \iota_{n-1} \cdots \iota_{n-n_0} \hat{g}_2\,, \text{ sowie} \\ h_2 &= \iota_{n-1} \cdots \iota_{n-n_0} \hat{h}_2\,. \end{aligned}$$

Damit ist $g_0 = \iota_{n-1} \cdots \iota_{n-n_0} \tilde{g} p_{n-n_0} \cdots p_{n-1}$ und $h = \iota_{n-1} \cdots \iota_{n-n_0} \tilde{h} p_{n-n_0} \cdots p_{n-1}$ mit $\tilde{g}, \tilde{h} \in \mathrm{End}_A(S[n-n_0])$. Der Endomorphismus $\tilde{g}$ ist wegen der Bedingung $\mathrm{Im}\, g_0 = \mathrm{rad}_A^{n_0}(S[n])$ ein Isomorphismus, sodass für diesen

$$\tilde{g}\, \mathrm{End}_A(S[n-n_0]) = \mathrm{End}_A(S[n-n_0]) = \mathrm{End}_A(S[n-n_0])\tilde{g} \tag{3.13}$$

gilt. Da nach Lemma 3.10 bzw. Lemma 3.11 die Algebrenhomomorphismen $\tilde{p}_m$ und $\tilde{\iota}_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ surjektiv sind, erhalten wir für jedes $m \in \mathbb{N}$ zusätzlich die beiden Gleichheiten

$$p_m\, \mathrm{End}_A(S[m+1]) = \mathrm{End}_A(S[m]) p_m \text{ , und} \tag{3.14}$$

$$\mathrm{End}_A(S[m+1]) \iota_m = \iota_m\, \mathrm{End}_A(S[m]) \text{ .} \tag{3.15}$$

Es ergibt sich die Inklusionskette

$$\begin{aligned}
I &\subseteq \iota_{n-1}\cdots\iota_{n-n_0}\operatorname{End}_A(S[n-n_0])p_{n-n_0}\cdots p_{n-1}\\
&\overset{3.13}{=} \iota_{n-1}\cdots\iota_{n-n_0}\operatorname{End}_A(S[n-n_0])\tilde{g}p_{n-n_0}\cdots p_{n-1}\\
&\overset{3.15}{=} \operatorname{End}_A(S[n])\iota_{n-1}\cdots\iota_{n-n_0}\tilde{g}p_{n-n_0}\cdots p_{n-1}\\
&= \operatorname{End}_A(S[n])g_0\\
&\subseteq I\,,
\end{aligned}$$

aus der wir $I = \operatorname{End}_A(S[n])g$ schließen. Da sich weiterhin jedes $f \in \operatorname{End}_A(S[n])$ mit $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{rad}_A^{n_0}(S[n])$ nach obigen Ausführungen schreiben lässt als $f = \iota_{n-1}\cdots\iota_{n-n_0}\tilde{f}p_{n-n_0}\cdots p_{n-1}$ mit einem $\tilde{f} \in \operatorname{End}_A(S[n-n_0])$, und umgekehrt das Bild jedes Homomorphismus aus $\iota_{n-1}\cdots\iota_{n-n_0}\operatorname{End}_A(S[n-n_0])p_{n-n_0}\cdots p_{n-1}$ in $\operatorname{rad}_A^{n_0}(S[n])$ liegt, folgt

$$\begin{aligned}
I = \operatorname{End}_A(S[n])g_0 &= \iota_{n-1}\cdots\iota_{n-n_0}\operatorname{End}_A(S[n-n_0])p_{n-n_0}\cdots p_{n-1}\\
&= \{f \in \operatorname{End}_A(S[n]) \mid \operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{rad}_A^{n_0} S[n]\}\,.
\end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich aus (3.14) noch die Gleichheit:

$$\begin{aligned}
\operatorname{End}_A(S[n])g_0 &= \iota_{n-1}\cdots\iota_{n-n_0}\operatorname{End}_A(S[n-n_0])p_{n-n_0}\cdots p_{n-1}\\
&= \iota_{n-1}\cdots\iota_{n-n_0}\tilde{g}\operatorname{End}_A(S[n-n_0])p_{n-n_0}\cdots p_{n-1}\\
&= \iota_{n-1}\cdots\iota_{n-n_0}\tilde{g}p_{n-n_0}\cdots p_{n-1}\operatorname{End}_A(S[n])\\
&= g_0\operatorname{End}_A(S[n])\,.
\end{aligned}$$

Damit ist $I = g_0\operatorname{End}_A(S[n]) = \operatorname{End}_A(S[n])g_0 = (g_0)$ ein zweiseitiges Hauptideal und das Lemma ist bewiesen. □

Wir haben gezeigt, dass jede der Endomorphismenalgebren $\operatorname{End}_A(S[n])$ eine eindeutige Folge von ineinander geschachtelten Hauptidealen besitzt und diese tatsächlich alle (auch einseitigen) Ideale umfasst. Mit den Bezeichnungen aus obigem Beweis bemerken wir, dass wir für die Erzeuger der Ideale, welche wir mit g_0 bezeichnet hatten, insbesondere die Elemente $\iota_{n-1}\cdots\iota_{n-n_0}1_{S[n-n_0]}p_{n-n_0}\cdots p_{n-1}$ nehmen können. Dann sind die g_0 gerade die Potenzen von π_n, was wir durch iteriertes Anwenden von (3.4) einsehen können:

$$\begin{aligned}
g_0 &= \iota_{n-1}\cdots\iota_{n-n_0}p_{n-n_0}\cdots p_{n-1}\\
&\overset{3.4}{=} \iota_{n-1}p_{n-1}\iota_{n-1}p_{n-1}\cdots\iota_{n-1}p_{n-1}\\
&= \pi_n^{n_0}\,.
\end{aligned}$$

Dies führt uns unmittelbar auf:

Folgerung 3.14. *Die einzigen Ideale der Algebra* $\mathrm{End}_A(S[n])$ *sind die Hauptideale*

$$(\pi_n^k) = \mathrm{rad}^k\ \mathrm{End}_A(S[n]) = \{f \in \mathrm{End}_A(S[n]) \mid \mathrm{Im}\ f \subseteq \mathrm{rad}_A^k\ S[n]\}$$

für $k = 0, \cdots, n$.

Hierbei verstehen wir π_n^0 als $1_{S[n]}$. Da wir außerdem die Beziehung (3.4) haben, folgt

$$p_{n-1}\pi_n = p_{n-1}\iota_{n-1}p_{n-1} = \iota_{n-2}p_{n-2}p_{n-1} = \pi_{n-1}p_{n-1}, \text{ falls } n \geq 3 \text{ ist.}$$

Da wir $\pi_1 := 0$ gesetzt hatten, gilt diese Beziehung wegen $p_1\iota_1 = 0$ auch noch für $n = 2$. Somit wirkt der Algebrenepimorphismus $\tilde{p}_{n-1}$ auf π_n einfach durch $\tilde{p}_{n-1}(\pi_n) = \pi_{n-1}$. Wir folgern hieraus für die Wirkung der $\tilde{p}_{n-1}$ auf die Ideale (π_n^k) $(k = 0, \cdots, n)$:

$$\tilde{p}_{n-1}((\pi_n^k)) = (\pi_{n-1}^k) \text{ für } k \in \{0, \cdots, n-2\}\,, \tag{3.16}$$

$$\tilde{p}_{n-1}((\pi_n^k)) = 0 \text{ für } k \in \{n-1,\, n\}\,. \tag{3.17}$$

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse in folgendem Theorem zusammen:

Theorem 3.15. *Die Algebren* $\mathrm{End}_A(S[n])$ *sind für alle* $n \in \mathbb{N}$ *lokale Hauptidealringe. Ihre maximalen Ideale werden erzeugt durch* π_n *und alle Ideale von* $\mathrm{End}_A(S[n])$ *bilden eine durch Inklusion geordnete Kette*

$$0 = (\pi_n^n) \subsetneq (\pi_n^{n-1}) \subsetneq \cdots \subsetneq (\pi_n^2) \subsetneq (\pi_n^1) \subsetneq (\pi_n^0) = \mathrm{End}_A(S[n]) \enspace .$$

Weiterhin ist jedes einseitige Ideal von $\mathrm{End}_A(S[n])$ *auch ein zweiseitiges Ideal.*
Die Algebrenepimorphismen $\tilde{p}_n : \ \mathrm{End}_A(S[n+1]) \longrightarrow \mathrm{End}_A(S[n])$ *wirken auf die Ideale durch* $\tilde{p}_n((\pi_{n+1}^k)) = (\pi_n^k)$ *für* $k \in \{0, \cdots, n+1\}$*, wobei für* $k \in \{n,\, n+1\}$ *auf der rechten Seite der letzten Gleichung eine Null entsteht.*

Beweis. Die Lokalität von $\mathrm{End}_A(S[n])$ ist eine Konsequenz dessen, dass $\mathrm{rad}\ \mathrm{End}_A(S[n]) = (\pi_n)$ das eindeutige maximale Ideal in $\mathrm{End}_A(S[n])$ ist. Alle anderen Aussagen wurden in Lemma 3.13, Folgerung 3.14, sowie (3.16) und (3.17) gezeigt. □

Wir werden im folgenden Abschnitt sehen, dass wir eine (homogene) Röhre als eine Modulkategorie über einem gewissen Hauptidealring auffassen können. Dafür werden die eben erarbeiteten Eigenschaften der Algebren $\mathrm{End}_A(S[n])$ von entscheidender Bedeutung sein.

3.4 Röhren als Modulkategorien

Wir haben den vorangegangenen Abschnitt mit Theorem 3.15 abgeschlossen, welches uns eine vollständige Aussage über die (einseitigen) Ideale von $\mathrm{End}_A(S[n])$ liefert. Insbesondere erhalten wir, dass $\mathrm{End}_A(S[n])$ als rechter bzw. linker Modul über sich selbst betrachtet ein einreihiger Modul ist. Dies bedeutet wiederum, dass es sich bei $\mathrm{End}_A(S[n])$ um eine so genannte **Nakayama-Algebra** handelt. Diese Algebren sind bestens verstanden (für eine kurze Einführung vgl. [1, V]) und man kann die Modulkategorie mod $\mathrm{End}_A(S[n])$ vollständig beschreiben. Der Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(\mathrm{End}_A(S[n]))$ hat folgende Gestalt:

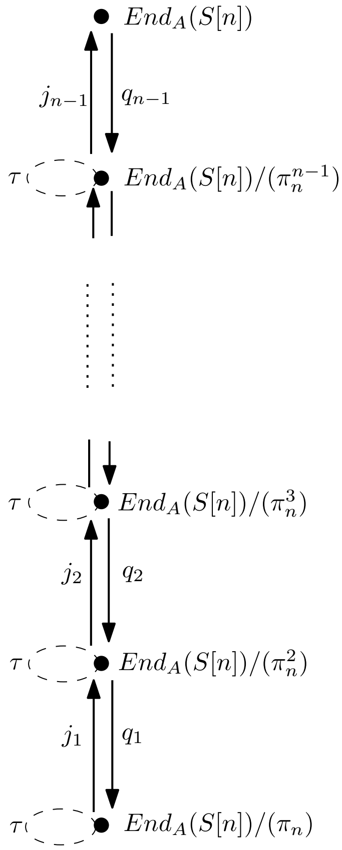


Abbildung 3.2: Auslander-Reiten-Köcher von $\mathrm{End}_A(S[n])$

Da sich jeder der A-Moduln $S[k]$ für $k = 1, \cdots, n$ mithilfe der $\tilde{p}_m$ auf natürliche Weise als $\mathrm{End}_A(S[n])$-Modul auffassen lässt, ist die Kategorie der endlichdimensionalen $\mathrm{End}_A(S[n])$-Moduln äquivalent zur vollen Unterkategorie $add\,(S[1] \oplus \cdots \oplus S[n])$ von $\mathrm{mod}\,A$. Gewissermaßen erhalten wir also die Kategorie mod $\mathrm{End}_A(S[n])$ dadurch, dass wir die Röhre, welche in $S[1]$ startet, nach dem n-ten unzerlegbaren Modul abschneiden. Wir haben im vorangegangenen Abschnitt außerdem gesehen, dass wir in einer homogenen Röhre eine durch die irreduziblen Morphismen induzierte Kette von Algebrenepimorphismen (3.11) haben. Dies führt auf die Idee, zur Beschreibung einer homogenen Röhre als Modulkategorie nach einer Algebra zu suchen, welche gewissermaßen durch „Zurückziehen“ aus der Folge (3.11) entsteht. Wir werden im Folgenden diese Idee präzisieren und das Konzept der inversen Limites von Algebren bzw. Moduln verwenden, welches uns genau dieses

Zurückziehen möglich machen wird. Wir beginnen mit einer Definition. Um eine doppelte Formulierung zu vermeiden, werden wir statt „Algebra oder Modul“ das Wort „Objekt“ und statt „Algebrenhomomorphismus oder Modulhomomorphismus“ das Wort „Morphismus“ verwenden. Sofern nicht anders erwähnt, sind alle Definitionen und Lemmata in beiden Kontexten gültig.

Definition 3.16. Seien $(I, \leq)$ eine halbgeordnete Menge und sei für jedes $i \in I$ ein Objekt T_i gegeben. Weiter sei für jedes Paar $(i,j) \in I \times I$ mit $i > j$ ein Morphismus $f_{i,j}: T_i \longrightarrow T_j$ gegeben. Die Familie $(T_i, f_{i,j})_{i,j\in I, i>j}$ heißt **inverses System**, falls für alle $i,j,k \in I$ mit $i > k > j$ die Beziehung $f_{i,j} = f_{k,j} f_{i,k}$ gilt.

Sei $(T_i, f_{i,j})_{i,j\in I, i>j}$ ein inverses System. Ein Objekt $\mathbb{T}$ zusammen mit einer Familie von Morphismen $(pr_i^{\mathbb{T}}: \mathbb{T} \longrightarrow T_i)_{i\in I}$ heißt **inverser Limes** von $(T_i, f_{i,j})_{i,j\in I, i<j}$, wenn für alle $i,j \in I$ mit $i > j$ die Beziehung $pr_j^{\mathbb{T}} = f_{i,j} pr_i^{\mathbb{T}}$ gilt, und wenn es für jedes weitere Objekt $\mathbb{S}$ mit Morphismen $(s_i: \mathbb{S} \longrightarrow T_i)_{i\in I}$, für die $s_j = f_{i,j} s_i$ für alle $i,j \in I$ mit $i > j$ gilt, einen eindeutigen Morphismus $c: \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{T}$ mit der Eigenschaft $s_i = pr_i^{\mathbb{T}} c$,$\forall i \in I$, gibt. Wir bezeichnen den inversen Limes $\mathbb{T}$ mit $\underset{\overleftarrow{i\in I}}{lim}\, T_i$ oder kurz mit $\underset{\overleftarrow{i}}{lim}\, T_i$.

Es sei bemerkt, dass sich durch einen Standardbeweis die Eindeutigkeit eines inversen Limes bis auf Isomorphie zeigen lässt, weswegen man häufig von „dem“ inversen Limes spricht. Wir werden im Folgenden für die Indexmenge I stets die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen mit der kanonischen Ordnung nehmen. Die letzte Eigenschaft aus obiger Definition, welche die universelle Eigenschaft des inversen Limes ist, lässt sich für $I = \mathbb{N}$ wie folgt visualisieren:

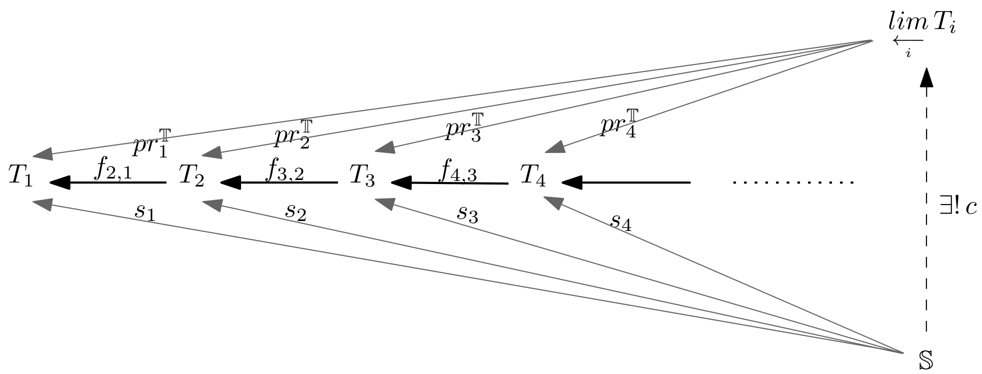


Abbildung 3.3: Universelle Eigenschaft des inversen Limes

Den inversen Limes kann man sich also gewissermaßen als das „kleinste“ Objekt vorstellen, für das $s_j = f_{i,j} s_i$ für alle $i,j \in I$ mit $i > j$ gilt. Der inverse Limes eines Systems $(T_i, f_{i,j})_{i,j\in \mathbb{N}, i>j}$ lässt sich auch als Teilmenge des Produkts $\prod_{i\in\mathbb{N}} T_i$ schreiben, und zwar konkret als

$$\varprojlim_i T_i = \{x = (x_1, x_2, x_3, \cdots) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} T_i \mid x_i = f_{i+1,i}(x_{i+1}), \forall i \in \mathbb{N}\}. \tag{3.18}$$

Die mit dem inversen Limes zusammenhängenden Abbildungen $pr_i^{\mathbb{T}} : \mathbb{T} \longrightarrow T_i$ sind hierbei gerade die Projektionen auf die i-ten Komponenten.

Diese alternative Beschreibung liefert zunächst, dass inverse Limites von inversen Systemen von Algebren oder Moduln stets existieren. Weiterhin ist sie sehr nützlich, wenn man konkret mit inversen Limites rechnen möchte und wir werden im Folgenden auch mehrfach darauf zurückgreifen. Zunächst werden einige Fakten und Eigenschaften inverser Limites zusammengetragen, welche wir im weiteren Verlauf der Arbeit benötigen werden.

Lemma 3.17. *Seien $(T_i, f_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}, i>j}$ sowie $(S_i, g_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}, i>j}$ inverse Systeme und $(a_i : T_i \longrightarrow S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Morphismen, für die $a_i f_{i+1,i} = g_{i+1,i} a_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, d. h., für welche folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
T_1 \arrow[d, "a_1"] & T_2 \arrow[l, "f_{2,1}"'] \arrow[d, "a_2"] & T_3 \arrow[l, "f_{3,2}"'] \arrow[d, "a_3"] & T_4 \arrow[l, "f_{4,3}"'] \arrow[d, "a_4"] & \cdots \arrow[l] \\
S_1 & S_2 \arrow[l, "g_{2,1}"'] & S_3 \arrow[l, "g_{3,2}"'] & S_4 \arrow[l, "g_{4,3}"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}.$$

Dann existiert ein eindeutiger Morphismus $\bar{a} : \varprojlim_i T_i \longrightarrow \varprojlim_i S_i$, für den $pr_i^{\mathbb{S}} \bar{a} = a_i pr_i^{\mathbb{T}}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Sind ferner alle a_i Isomorphismen, so ist auch $\bar{a}$ ein Isomorphismus.

Beweis. Sei uns ein $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots) \in \varprojlim_i T_i$ gegeben. Wir definieren $\bar{a}$ einfach durch

$$\bar{a}(x) := (a_1(x_1), a_2(x_2), a_3(x_3), a_4(x_4), \cdots). \tag{3.19}$$

Da alle a_i ($i \in \mathbb{N}$) Algebren- bzw. Modulhomomorphismen sind, ist auch $\bar{a}$ ein Algebren- bzw. Modulhomomorphismus, falls $(a_1(x_1), a_2(x_2), a_3(x_3), a_4(x_4), \cdots) \in \varprojlim_i S_i$ gilt. Dass dem so ist, sehen wir wie folgt:

$$g_{i+1,i}(a_{i+1}(x_{i+1})) \overset{Vor.}{=} a_i(f_{i+1,i}(x_{i+1})) \overset{(3.18)}{=} a_i(x_i) \ \ ,\forall i \in \mathbb{N}.$$

Es ist also tatsächlich $\bar{a}(x) \in \varprojlim_i S_i$. Somit ist $\bar{a}$ ein Morphismus, welcher trivialerweise $pr_i^{\mathbb{S}} \bar{a} = a_i pr_i^{\mathbb{T}}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, sei $a' : \varprojlim_i T_i \longrightarrow \varprojlim_i S_i$ ein beliebiger Morphismus mit $pr_i^{\mathbb{S}} a' = a_i pr_i^{\mathbb{T}}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Sei weiter $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots) \in \varprojlim_i T_i$. Dann ist das Bild $a'(x)$ von der Gestalt $y = a'(x) = (y_1, y_2, y_3, y_4, \cdots)$, wobei wir für jedes $i \in \mathbb{N}$ folgendes haben:

$$y_i = pr_i^{\mathbb{S}}(y) = pr_i^{\mathbb{S}}(a'(x)) = a_i(pr_i^{\mathbb{T}}(x)) = a_i(x_i) \ .$$

Somit folgt unmittelbar $a' = \bar{a}$. Um die letzte Aussage über die Isomorphismen zu zeigen, sei bemerkt, dass unter der Annahme, dass alle a_i Isomorphismen sind, auch folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
T_1 & T_2 \arrow[l, "f_{2,1}"'] & T_3 \arrow[l, "f_{3,2}"'] & T_4 \arrow[l, "f_{4,3}"'] & \cdots \arrow[l] \\
S_1 \arrow[u, "a_1^{-1}"'] & S_2 \arrow[l, "g_{2,1}"'] \arrow[u, "a_2^{-1}"'] & S_3 \arrow[l, "g_{3,2}"'] \arrow[u, "a_3^{-1}"'] & S_4 \arrow[l, "g_{4,3}"'] \arrow[u, "a_4^{-1}"'] & \cdots \arrow[l] \ .
\end{tikzcd}$$

Die hiervon induzierte Abbildung

$$\varprojlim_i S_i \longrightarrow \varprojlim_i T_i \ , \ (y_1, y_2, y_3, y_4, \cdots) \mapsto (a_1^{-1}(y_1), a_2^{-1}(y_2), a_3^{-1}(y_3), a_4^{-1}(y_4), \cdots)$$

ist dann die Umkehrabbildung zu $\bar{a}$. □

Wir benötigen noch eine letzte Aussage über das Verhalten von direkten Summen von Moduln unter der Bildung von inversen Limites, welche wir nun in einem abschließenden Lemma formulieren und zeigen werden.

Lemma 3.18. *Seien $(M_i, f_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}, i>j}$ sowie $(L_i, g_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}, i>j}$ inverse Systeme von Moduln über einer Algebra A, und sei*

$$\left(M_i \oplus L_i, \begin{bmatrix} f_{i,j} & 0 \\ 0 & g_{i,j} \end{bmatrix} \right)_{i,j \in \mathbb{N}, i>j}$$

das inverse System, welches durch Bildung direkter Summen aus den beiden entsteht. Dann gelten $\varprojlim_i (M_i \oplus L_i) = (\varprojlim_i M_i) \oplus (\varprojlim_i L_i)$ und

$$pr_i^{\mathbb{M} \oplus \mathbb{L}} = \begin{bmatrix} pr_i^{\mathbb{M}} & 0 \\ 0 & pr_i^{\mathbb{L}} \end{bmatrix} \ \textit{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage dadurch, dass wir die universelle Eigenschaft von $(\varprojlim_i M_i) \oplus (\varprojlim_i L_i)$ für das inverse System

$$M_1 \oplus L_1 \xleftarrow{\begin{bmatrix} f_{2,1} & 0 \\ 0 & g_{2,1} \end{bmatrix}} M_2 \oplus L_2 \xleftarrow{\begin{bmatrix} f_{3,2} & 0 \\ 0 & g_{3,2} \end{bmatrix}} M_3 \oplus L_3 \xleftarrow{\begin{bmatrix} f_{4,3} & 0 \\ 0 & g_{4,3} \end{bmatrix}} M_4 \oplus L_4 \longleftarrow \cdots \tag{3.20}$$

nachweisen. Zunächst haben wir die Beziehungen $f_{i,j} pr_i^{\mathbb{M}} = pr_j^{\mathbb{M}}$ und $g_{i,j} pr_i^{\mathbb{L}} = pr_j^{\mathbb{L}}$ für $i > j$, woraus wir

$$\begin{bmatrix} f_{i,j} & 0 \\ 0 & g_{i,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pr_i^{\mathbb{M}} & 0 \\ 0 & pr_i^{\mathbb{L}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pr_j^{\mathbb{M}} & 0 \\ 0 & pr_j^{\mathbb{L}} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

für alle $i > j$ folgern können. Sei nun $\mathbb{S}$ ein beliebiger Modul mit Homomorphismen $s_i = \begin{bmatrix} s_i^1 \\ s_i^2 \end{bmatrix} : \mathbb{S} \longrightarrow M_i \oplus L_i$, für die

$$\begin{bmatrix} f_{i,j} & 0 \\ 0 & g_{i,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_i^1 \\ s_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_j^1 \\ s_j^2 \end{bmatrix}$$

für alle $i > j$ gilt. Daraus erhalten wir, dass $f_{i,j} s_i^1 = s_j^1$ und $g_{i,j} s_i^2 = s_j^2$ für alle $i > j$ gelten, und nach der universellen Eigenschaft von $\varprojlim_i M_i$ bzw. $\varprojlim_i L_i$ erhalten wir eindeutig bestimmte Homomorphismen $c^1 : \mathbb{S} \longrightarrow \varprojlim_i M_i$ und $c^2 : \mathbb{S} \longrightarrow \varprojlim_i L_i$, welche $s_i^1 = pr_i^{\mathbb{M}} c^1$ sowie $s_i^2 = pr_i^{\mathbb{L}} c^2$ für alle $i \in \mathbb{N}$ erfüllen. Dies liefert uns einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $c = \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \end{bmatrix} : \mathbb{S} \longrightarrow (\varprojlim_i M_i) \oplus (\varprojlim_i L_i)$, für welchen

$$s_i = \begin{bmatrix} s_i^1 \\ s_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pr_i^{\mathbb{M}} c^1 \\ pr_i^{\mathbb{L}} c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pr_i^{\mathbb{M}} & 0 \\ 0 & pr_i^{\mathbb{L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^1 \\ c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pr_i^{\mathbb{M}} & 0 \\ 0 & pr_i^{\mathbb{L}} \end{bmatrix} c$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Damit haben wir die universelle Eigenschaft nachgewiesen, woraus die Behauptung folgt. □

Bevor wir nun wieder auf die konkrete Situation in homogenen Röhren zurückkommen, wollen wir noch eine letzte Definition erarbeiten. Sei hierzu eine Algebra B gegeben. Die Potenzen $\operatorname{rad}^k B$, $k \in \mathbb{N}$, des Radikals von B bilden eine durch Inklusion geordnete Folge von Idealen in B:

$$\operatorname{rad} B \supseteq \operatorname{rad}^2 B \supseteq \operatorname{rad}^3 B \supseteq \cdots . \tag{3.22}$$

Durch diese erhalten wir folgende kanonische Folge von Epimorphismen auf den Faktorräumen $B/\operatorname{rad}^k B$:

$$B/\operatorname{rad} B \xleftarrow{\kappa_1} B/\operatorname{rad}^2 B \xleftarrow{\kappa_2} B/\operatorname{rad}^3 B \longleftarrow \cdots . \tag{3.23}$$

Hierbei ist κ_i die Abbildung $x+(\operatorname{rad}^{i+1} B) \mapsto x+(\operatorname{rad}^i B)$. Mit diesen Bezeichnungen und den kanonischen Projektionen $B \longrightarrow B/\operatorname{rad}^k B$ haben wir ein kommutatives Diagramm der folgenden Gestalt:

$$\begin{tikzcd}
B/\operatorname{rad} B & B/\operatorname{rad}^2 B \arrow[l, "\kappa_1"'] & B/\operatorname{rad}^3 B \arrow[l, "\kappa_2"'] & B/\operatorname{rad}^4 B \arrow[l, "\kappa_3"'] & \cdots \arrow[l] \\
B \arrow[u] \arrow[r, equal] & B \arrow[u] \arrow[r, equal] & B \arrow[u] \arrow[r, equal] & B \arrow[u] \arrow[r, equal] & \cdots .
\end{tikzcd} \tag{3.24}$$

Da der inverse Limes der unteren Folge in (3.24) offenbar wieder B ist, liefert uns dieses Diagramm nach Lemma 3.17 einen kanonischen Homomorphismus $\kappa: \; B \longrightarrow \varprojlim_k (B/\operatorname{rad}^k B)$. Dies führt uns unmittelbar auf:

Definition 3.19. Seien B eine Algebra und rad B sein Radikal.
Der Ring $\hat{B} := \varprojlim_k (B/\operatorname{rad}^k B)$ heißt **Vervollständigung** von B (bezüglich rad B). Die Algebra B heißt **vollständig**, wenn der kanonische Homomorphismus $\kappa: \; B \longrightarrow \varprojlim_k (B/\operatorname{rad}^k B)$ ein Isomorphismus ist.

Es sei bemerkt, dass wir eine Algebra in Bezug auf ein beliebiges zweiseitiges Ideal vervollständigen können, und dabei nicht zwangsweise das Radikal verwenden müssen. Betrachten wir hierzu ein kleines Beispiel:

Beispiel 3.20. Sei k ein Körper und $k[T]$ der Polynomring über k in einer Veränderlichen. Dieser ist insbesondere eine k-Algebra. Es ist bekannt, dass rad $k[T] = 0$ ist, d. h., die Vervollständigung von $k[T]$ bezüglich rad $k[T]$ wird wieder $k[T]$ selbst liefern. Betrachten wir stattdessen das von T erzeugte Ideal (T) und die Vervollständigung $\varprojlim_i (k[T]/(T^i))$ nach diesem. Diese besteht aus Elementen der Form

$$x = (b_0 + (T), b_1 + (T^2), b_2 + (T^3), b_3 + (T^4), \cdots),$$

wobei die b_i aus $k[T]$ sind, und $b_i + (T^{i+1}) = b_{i+1} + (T^{i+1})$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Wir können somit den Ansatz $b_i = \sum_{l=0}^{i} a_{i,l} T^l$ machen und erhalten aus $b_i + (T^{i+1}) = b_{i+1} + (T^{i+1})$

sukzessive $a_{i,l} = a_{j,l}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ und $l \in \{0, \cdots, min\{i, j\}\}$. Damit ist jedes Element aus $\varprojlim_i (k[T]/(T^i))$ von der Gestalt

$$x = (a_0 + (T), a_0 + a_1T + (T^2), a_0 + a_1T + a_2T^2 + (T^3), \cdots)$$

mit $a_i \in k$. Auf diese Weise sieht man unmittelbar ein, dass $\varprojlim_i (k[T]/(T^i)) \cong k[[T]]$ der Ring der formalen Potenzreihen über k ist. Insbesondere ist $k[T] \ncong \varprojlim_i (k[T]/(T^i))$, sodass $k[T]$ nicht mit seiner Vervollständigung bezüglich (T) übereinstimmt.

Wir werden nun wieder eine homogene Röhre $\mathcal{T}$ einer zahm-erblichen Algebra A betrachten. Es werden dieselben Bezeichnungen wie in Abschnitt 3.3 verwendet. Wir hatten gesehen, dass die irreduziblen Epimorphismen $p_n : \ S[n+1] \longrightarrow S[n]$ eine Folge von Algebrenepimporphismen (3.11):

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{End}_A(S[4]) \xrightarrow{\tilde{p}_3} \mathrm{End}_A(S[3]) \xrightarrow{\tilde{p}_2} \mathrm{End}_A(S[2]) \xrightarrow{\tilde{p}_1} \mathrm{End}_A(S[1])$$

induzieren und wir haben die wichtigsten Eigenschaften der Algebren $\mathrm{End}_A(S[n])$ und der Epimorphismen $\tilde{p}_n$ in Theorem 3.15 zusammengetragen. Jetzt wollen wir hieraus eine Reihe von Schlussfolgerungen für den inversen Limes von (3.11) ziehen. Wir bemerken hierzu zunächst, dass (3.11) zu einem inversen System $(\mathrm{End}_A(S[n]), \tilde{p}_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N},\, n>m}$ wird, wenn wir $\tilde{p}_{n,m} := \tilde{p}_m \cdots \tilde{p}_{n-1}$ für $n > m$ setzen.

Sei nun $\mathcal{H} := \varprojlim_n \mathrm{End}_A(S[n])$ der inverse Limes von (3.11) und seien $pr_i : \ \varprojlim_n \mathrm{End}_A(S[n]) \longrightarrow \mathrm{End}_A(S[i])$ $(i \in \mathbb{N})$ die zugehörigen Projektionshomomorphismen. Wir zeigen zunächst ein Lemma, bevor wir zu einem zentralen Theorem über die Struktur der Algebra $\mathcal{H}$ kommen.

Lemma 3.21. *Seien $\mathcal{H}$ und pr_i, $i \in \mathbb{N}$, wie zuvor definiert. Dann ist pr_i für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein Epimorphismus.*

Beweis. Seien $i \in \mathbb{N}$ und $f_i \in \mathrm{End}_A(S[i])$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass es ein Element $f \in \mathcal{H}$ gibt, sodass $f_i = pr_i(f)$ gilt. Wir setzen dazu zunächst $f_j := (\tilde{p}_j \circ \cdots \circ \tilde{p}_{i-1})(f_i)$ für $j < i$. Ferner gibt es aufgrund dessen, dass die $\tilde{p}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ Epimorphismen sind, eine Folge von Algebrenhomomorphismen $(f_{i+1}, f_{i+2}, \cdots)$ mit $f_j \in \mathrm{End}_A(S[j])$ und $f_j = \tilde{p}_j(f_{j+1})$ für alle $j \geq i$. Man wähle dazu f_{i+1} als ein Urbild von f_i unter $\tilde{p}_i$, f_{i+2} als ein Urbild von f_{i+1} unter $\tilde{p}_{i+1}$, und so fort. Somit erhält man eine Folge $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, \cdots)$ mit $f_j = \tilde{p}_j(f_{j+1})$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Es folgt $f \in \mathcal{H}$ nebst $pr_i(f) = f_i$, womit die Behauptung gezeigt ist. $\square$

Wir hatten in einer Vorüberlegung zu Theorem 3.15 gesehen, dass für jedes $n \geq 2$ die Beziehung $\tilde{p}_{n-1}(\pi_n) = \pi_{n-1}$ gilt. Es folgt, dass das Element $\pi := (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \cdots)$ zur Algebra $\mathcal{H}$ gehört. Wieder werden wir π^0 als $1_{\mathcal{H}}$ verstehen. Ähnlich wie im Fall der $\mathrm{End}_A(S[n])$ wird sich ergeben, dass sämtliche Ideale von $\mathcal{H}$ als Hauptideale von Potenzen dieses π erzeugt werden. Bevor wir dies zeigen können, benötigen wir ein letztes, etwas technisches, Lemma.

Lemma 3.22. *Seien $\mathcal{H}$ und pr_i, $i \in \mathbb{N}$, wie zuvor definiert, und sei $a = (\pi_1^k a_1, \pi_2^k a_2, \pi_3^k a_3, \pi_4^k a_4, \cdots) \in \mathcal{H}$ mit einem $k \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathrm{End}_A(S[i])$. Dann existiert ein $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, \cdots) \in \mathcal{H}$, sodass $a = (\pi_1^k, \pi_2^k, \pi_3^k, \pi_4^k, \cdots)(b_1, b_2, b_3, b_4, \cdots) = \pi^k b$ gilt. Sind hierbei alle $a_i \in \mathrm{End}_A(S[i])$ Isomorphismen, so kann auch b als Einheit von $\mathcal{H}$ gewählt werden.*

Ist $c = (c_1\pi_1^k, c_2\pi_2^k, c_3\pi_3^k, c_4\pi_4^k, \cdots) \in \mathcal{H}$, so gibt es analog ein $d \in \mathcal{H}$ mit $c = d\pi^k$. Sind alle $c_i \in \mathrm{End}_A(S[i])$ Isomorphismen, so kann d als Einheit gewählt werden.

Beweis. Wir beweisen nur die erste Aussage, das der Beweis der zweiten völlig analog dazu ist. Sei also $a = (\pi_1^k a_1, \pi_2^k a_2, \pi_3^k a_3, \pi_4^k a_4, \cdots) \in \mathcal{H}$ mit einem $k \in \mathbb{N}$. Wir konstruieren nun sukzessive Folgen $a^j = (a_1^j, a_2^j, a_3^j, a_4^j, \cdots)$, für welche $\pi_i^k a_i^j = \pi_i^k a_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $a_i^j = \tilde{p}_i(a_{i+1}^j)$ für $i < j$ gelten. Dies machen wir wie folgt:
(1): Setzen wir $a^1 = (a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1, \cdots) := (a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots)$, so ist offenbar $\pi_i^k a_i^1 = \pi_i^k a_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
(2): Betrachten wir das Element $\pi_2^k a_2 = \pi_2^k a_2^1$. Wegen $a \in \mathcal{H}$ ist

$$\pi_1^k a_1 = \tilde{p}_1(\pi_2^k a_2) = \tilde{p}_1(\pi_2^k)\tilde{p}_1(a_2) = \pi_1^k \tilde{p}_1(a_2)\,, \tag{3.25}$$

woraus wir $\pi_1^k(a_1 - \tilde{p}_1(a_2))$ folgern. Wegen $k \geq 1$, haben wir $\pi_1^k a_1 = \pi_1^k \tilde{p}_1(a_2) = 0$. Setzen wir $a_1^2 := \tilde{p}_1(a_2)$ und $a_i^2 := a_i^1$ für $i > 1$, so gelten für $a^2 = (a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, \cdots)$ die geforderten Bedingungen.
$\vdots$
(m): Sei uns die Folge $a^{m-1} = (a_1^{m-1}, a_2^{m-1}, a_3^{m-1}, a_4^{m-1}, \cdots)$ gegeben, sodass $\pi_i^k a_i^{m-1} = \pi_i^k a_i$ für $i \in \mathbb{N}$ und $a_i^{m-1} = \tilde{p}_i(a_{i+1}^{m-1})$ für $i < m-1$ gelten. Betrachten wir nun das Element $\pi_m^k a_m = \pi_m^k a_m^{m-1}$. Wegen $a \in \mathcal{H}$ haben wir wieder

$$\pi_{m-1}^k a_{m-1}^{m-1} = \tilde{p}_{m-1}(\pi_m^k a_m^{m-1}) = \tilde{p}_{m-1}(\pi_m^k)\tilde{p}_{m-1}(a_m^{m-1}) = \pi_{m-1}^k \tilde{p}_{m-1}(a_m^{m-1})\,, \tag{3.26}$$

womit wir $\pi_{m-1}^k(a_{m-1}^{m-1} - \tilde{p}_{m-1}(a_m^{m-1})) = 0$ haben.

Ist $k \geq m-1$, so ist $\pi_{m-1}^k a_{m-1}^{m-1} = \pi_{m-1}^k \tilde{p}_{m-1}(a_m^{m-1}) = 0$. Setzen wir dann $a_{m-1}^m := \tilde{p}_{m-1}(a_m^{m-1})$, sowie $a_i^m := (\tilde{p}_i \circ \cdots \circ \tilde{p}_{m-2})(a_{m-1}^m)$ für $i < m-1$ und $a_i^m := a_i^{m-1}$ für $i > m-1$, so erfüllt dieses $a^m = (a_1^m, a_2^m, a_3^m, a_4^m, \cdots)$ die geforderten Bedingungen.

Ist hingegen $k < m-1$, so folgt aus $\pi_{m-1}^k(a_{m-1}^{m-1} - \tilde{p}_{m-1}(a_m^{m-1})) = 0$, dass sich $\tilde{p}_{m-1}(a_m^{m-1})$ schreiben lässt als $\tilde{p}_{m-1}(a_m^{m-1}) = a_{m-1}^{m-1} + \pi_{m-1}^{m-k-1} g_{m-1}$ mit einem gewissen $g_{m-1} \in \mathrm{End}_A([m-1])$. Setzen wir $a_{m-1}^m := a_{m-1}^{m-1} + \pi_{m-1}^{m-k-1} g_{m-1}$, sowie

$a_i^m := (\tilde{p}_i \circ \cdots \circ \tilde{p}_{m-2})(a_{m-1}^m) = a_i^{m-1} + \pi_i^{m-k-1}(\tilde{p}_i \circ \cdots \circ \tilde{p}_{m-2})(g_{m-1})$ für $i < m-1$ und $a_i^m := a_i^{m-1}$ für $i > m-1$, so erfüllt dieses $a^m = (a_1^m, a_2^m, a_3^m, a_4^m, \cdots)$ die geforderten Bedingungen. Man beachte hierzu, dass $\pi_i^{m-1} = 0$ ist, falls $i \leq m-1$ ist.

Damit haben wir eine Folge von $a^j = (a_1^j, a_2^j, a_3^j, a_4^j, \cdots) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{End}_A(S[n])$, für die $\pi_i^k a_i^j = \pi_i^k a_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $a_i^j = \tilde{p}_i(a_{i+1}^j)$ für $i < j$ gelten. Fixieren wir eine Zahl $i \in \mathbb{N}$ und schauen uns die Folgenglieder a_i^j für $j > k$ an. Nach obiger Konstruktion ist $a_i^{j+1} = a_i^j + \pi_i^{j-k} h_j$ mit einem $h_j \in \mathrm{End}_A(S[i])$. Da in $\mathrm{End}_A(S[i])$ aber $\pi_i^l = 0$ für alle $l \geq i$ gilt, sehen wir, dass $a_i^n = a_i^{k+i}$ für alle $n \geq k+i$ ist. D. h., die Folgen $(a_i^j)_{j=1}^\infty$ werden ab $j = k+i$ stationär.

Definieren wir nun die Folge $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, \cdots) := (a_1^{k+1}, a_2^{k+2}, a_3^{k+3}, a_4^{k+4}, \cdots)$, so gilt für diese dann $\pi_i^k b_i^j = \pi_i^k b_i$, sowie $b_i^j = \tilde{p}_i(b_{i+1}^j)$, für alle $i \in \mathbb{N}$. Damit ist $b \in \mathcal{H}$ und

$$a = (\pi_1^k a_1, \pi_2^k a_2, \pi_3^k a_3, \pi_4^k a_4, \cdots) = (\pi_1^k b_1, \pi_2^k b_2, \pi_3^k b_3, \pi_4^k b_4, \cdots) = \pi^k b \ ,$$

womit der erste Teil der Behauptung bewiesen ist.

Für die Aussage über den Isomorphismus bemerken wir, dass in der Konstruktion der a^j für ein festes $i \in \mathbb{N}$ in jedem Schritt entweder $a_i^{j+1} = a_i^j$, oder $a_i^{j+1} = (\tilde{p}_i \circ \cdots \circ \tilde{p}_{j-1})(a_j^{j+1})$, oder $a_i^{j+1} = a_i^j + \pi_i^{j-k} h_j$, mit $j > k$ und einem $h_j \in \mathrm{End}_A(S[i])$, gilt. Bei jeder dieser Konstruktionen gehen die Isomorphismen aus der Folge a^j wieder in Isomorphismen in der Folge a^{j+1} über. Dies ist klar im ersten Fall. Im zweiten Fall folgt es daraus, dass die $\tilde{p}_n$ nach Theorem 3.15 Isomorphismen wieder auf Isomorphismen abbilden. Und im dritten Fall ist wegen $\pi_i^{j-k} h_j \in \mathrm{rad}\, \mathrm{End}_A(S[j])$ und der Lokalität der Algebra $\mathrm{End}_A(S[j])$ der Homomorphismus a_i^{j+1} wieder ein Isomorphismus, wenn a_i^j ein solcher ist.

Starten wir also damit, dass alle a_i ($i \in \mathbb{N}$) Isomorphismen sind, so sind auch alle b_i ($i \in \mathbb{N}$) Isomorphismen. Wegen

$$b_i b_i^{-1} = 1_{\mathrm{End}_A(S[i])} = \tilde{p}_i(1_{\mathrm{End}_A(S[i+1])}) = \tilde{p}_i(b_{i+1} b_{i+1}^{-1}) = \tilde{p}_i(b_{i+1})\tilde{p}_i(b_{i+1}^{-1}) = b_i \tilde{p}_i(b_{i+1}^{-1})$$

ist $b_i^{-1} = \tilde{p}_i(b_{i+1}^{-1})$, womit die Folge $b^{-1} = (b_1^{-1}, b_2^{-1}, b_3^{-1}, b_4^{-1}, \cdots)$ in $\mathcal{H}$ liegt und gerade das Inverse zu $b \in \mathcal{H}$ ist. Mit obiger Konstruktion ist also $b \in \mathcal{H}$ eine Einheit, wenn alle a_i ($i \in \mathbb{N}$) Isomorphismen sind. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

□

Wir kommen nun zu:

Theorem 3.23. *Seien $\mathcal{H}$ und pr_i, $i \in \mathbb{N}$, wie zuvor definiert. Dann ist die Algebra $\mathcal{H}$ ein vollständiger, lokaler Hauptidealring, in welchem alle einseitigen Ideale auch zweiseitige Ideale sind*[2]*. Hierbei ist jedes Ideal von $\mathcal{H}$ entweder gleich Null oder von der Gestalt (π^k) für ein $k \in \mathbb{N}_0$, wobei $\pi := (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \cdots) \in \mathcal{H}$ ist. Die Ideale von $\mathcal{H}$ bilden eine durch Inklusion geordnete Kette*

$$\mathcal{H} = (\pi^0) \supsetneq (\pi^1) \supsetneq (\pi^2) \supsetneq (\pi^3) \supsetneq \cdots \supsetneq 0\,.$$

[2]Ein solcher Ring wird auch **vollständiger diskreter Bewertungsring** genannt.

Die Algebrenepimorphismen $pr_i: \ \mathcal{H} = \varprojlim_n \operatorname{End}_A(S[n]) \longrightarrow \operatorname{End}_A(S[i])$ wirken auf die Ideale (π^k) durch $pr_i((\pi^k)) = (\pi_i^k)$, wobei dies für $i \leq k$ gleich Null ist.

Beweis. Sei o. B. d. A. $J \neq 0$ ein Rechtsideal in $\mathcal{H}$.
Dann existiert die Zahl $m_0 := min\{m \in \mathbb{N} \mid \exists f = (f_1, f_2, f_3, f_4, \cdots) \in J : f_m \neq 0\}$. Gilt $m_0 = 1$, so gibt es ein $f^0 = (f_1^0, f_2^0, f_3^0, f_4^0, \cdots) \in J$ mit $f_1^0 \neq 0$. Da $\operatorname{End}_A(S[1])$ ein Schiefkörper ist, ist f_1^0 ein Isomorphismus. Da nach Theorem 3.15 die Menge der Isomorphismen von $\operatorname{End}_A(S[n])$ unter $\tilde{p}_n^{-1}$ auf die Menge der Isomorphismen von $\operatorname{End}_A(S[n+1])$ übergeht, folgt nun, dass f_n^0 für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Isomorphismus ist. Damit ist analog zum letzten Teil des Beweises von Lemma 3.22 das Element $f^0 \in J$ eine Einheit. Es folgt, dass $J = \mathcal{H} = (\pi^0)$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{H}$ ist.

Sei im Folgenden also $m_0 > 1$. Da die Algebrenhomomorphismen pr_i nach Lemma 3.21 surjektiv sind, ist $pr_i(J) \subseteq \operatorname{End}_A(S[i])$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ ebenfalls ein Rechtsideal. Ferner ist $pr_{m_0}(J) \neq 0$ und nach Theorem 3.15 existiert ein $k_0 \in \{0, \cdots, m_0-1\}$, sodass $pr_{m_0}(J) = (\pi_{m_0}^{k_0}) \neq 0$ gilt. Dies ist insbesondere ein zweiseitiges Ideal in $\operatorname{End}_A(S[m_0])$. Da nach Definition des inversen Limes die Beziehung $\tilde{p}_i pr_{i+1} = pr_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, und, wieder nach Theorem 3.15, die Gleichheiten $\tilde{p}_i((\pi_{i+1}^k)) = (\pi_i^k)$ $(i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0)$ und $\tilde{p}_i^{-1}((\pi_i^k)) = (\pi_{i+1}^k)$ $(i \in \mathbb{N}, k \in \{0, \cdots, i-1\})$ gelten, folgern wir $pr_m(J) = (\pi_m^{k_0})$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Zu der Beziehung $\tilde{p}_i^{-1}((\pi_i^k)) = (\pi_{i+1}^k)$ $(i \in \mathbb{N}, k \in \{0, \cdots, i-1\})$ sei bemerkt, dass nach Theorem 3.15 auf jedes Nicht-Null-Ideal von $\operatorname{End}_A(S[i])$ genau ein Ideal von $\operatorname{End}_A(S[i+1])$ surjektiv abgebildet wird. Ferner folgt aus der Definition von m_0, dass $(\pi_{m_0-1}^{k_0}) = pr_{m_0-1}(J) = 0$ und $(\pi_{m_0}^{k_0}) = pr_{m_0}(J) \neq 0$ gelten. Damit haben wir $k_0 = m_0 - 1$.

Da insbesondere $pr_{m_0}: \ \mathcal{H} \longrightarrow \operatorname{End}_A(S[m_0])$ ein Epimorphismus ist, finden wir ein $g^0 \in J$, welches von der Gestalt

$$g^0 = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{m_0-1}, \pi_{m_0}^{m_0-1}, g_{m_0+1}, g_{m_0+2}, \cdots) \tag{3.27}$$

ist. Wegen $\pi_{m_0}^{m_0-1} \in (\pi_{m_0}^{m_0-1}) \backslash (\pi_{m_0}^{m_0})$ folgt wieder nach Theorem 3.15 und obigen Ausführungen, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ auch $g_{m_0+i} \in (\pi_{m_0+i}^{m_0-1}) \backslash (\pi_{m_0+i}^{m_0})$ ist. Damit können wir jedes g_{m_0+i} in der Form $g_{m_0+i} = \pi_{m_0+i}^{m_0-1} h_{m_0+i}$ mit einem Isomorphismus $h_{m_0+i} \in \operatorname{End}_A(S[m_0+i])$ schreiben. Da ferner $0_{\operatorname{End}_A(S[j])} = \pi_j^{m_0-1} = \pi_j^{m_0-1} 1_{\operatorname{End}_A(S[j])}$ für alle $j < m_0$ gilt, können wir (3.27) auch schreiben als:

$$g^0 = (\pi_1^{m_0-1} 1_{\operatorname{End}_A(S[1])}, \cdots, \pi_{m_0}^{m_0-1} 1_{\operatorname{End}_A(S[m_0])}, \pi_{m_0+2}^{m_0-1} h_{m_0+2}, \cdots). \tag{3.28}$$

Nach Lemma 3.22 existiert nun eine Einheit $b \in \mathcal{H}$, sodass $g^0 = \pi^{m_0-1} b$ ist. Es folgt $\pi^{m_0-1} = g^0 b^{-1} \in J$, und insbesondere $\pi^{m_0-1} \mathcal{H} \subseteq J$.

Ist nun $g = (g_1, g_2, g_3, g_4, \cdots) \in J$ beliebig, so ist nach Definition von m_0:

$$g_1 = 0,\ g_2 = 0,\ \cdots,\ g_{m_0-1} = 0\,. \tag{3.29}$$

Sei $n_0 := min\{n \in \mathbb{N} \mid g_n \neq 0\} \geq m_0$. Es folgt wegen $pr_{n_0}(g) \neq 0$ und $pr_{n_0-1}(g) = 0$, dass $pr_{n_0}(g) = g_{n_0} = \pi_{n_0}^{n_0-1} h'_{n_0}$ mit einem $h'_{n_0} \in \mathrm{End}_A(S[n_0])$ gilt. Analog obigen Ausführungen zu dem g^0 ergibt sich, dass $g = \pi^{n_0-1} h$ mit einem $h \in \mathcal{H}$ gilt. Insbesondere haben wir:

$$g = \pi^{n_0-1} h = \pi^{m_0-1}(\pi^{n_0-m_0} h) \in \pi^{m_0-1}\mathcal{H}\,, \tag{3.30}$$

womit wir $J \subseteq \pi^{m_0-1}\mathcal{H}$ und, mit vorigen Ergebnissen, sogar $J = \pi^{m_0-1}\mathcal{H}$ gezeigt haben.

Da ferner $\pi_n \,\mathrm{End}_A(S[n]) = \mathrm{End}_A(S[n])\pi_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, und wir Lemma 3.22 auch in einer „linken“ Variante zur Verfügung haben, folgt unmittelbar $\pi^{m_0-1}\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}\pi^{m_0-1} \subseteq \pi^{m_0-1}\mathcal{H}$. Damit ist $\pi^{m_0-1}\mathcal{H} = \mathcal{H}\pi^{m_0-1} = (\pi^{m_0-1})$ sogar ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{H}$.

Wir haben damit fast alle Aussagen des Theorems gezeigt. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass $\mathcal{H}$ lokal und vollständig ist. Die Lokalität folgt sofort daraus, dass rad $\mathcal{H} = (\pi)$ das eindeutige maximale Ideal in $\mathcal{H}$ ist. Zeigen wir nun die Vollständigkeit. Sei dazu $\kappa :\ \mathcal{H} \longrightarrow \underset{\longleftarrow n}{lim}\,(\mathcal{H}/(\pi^n))$ der kanonische Homomorphismus (man beachte rad $\mathcal{H} = (\pi)$).

Es gilt für den Kern von κ zunächst:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\ \kappa &= \{f \in \mathcal{H} \mid f \in (\pi^i),\ \forall i \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (\pi^i)\,. \end{aligned}$$

Dieser ist als Schnitt von Idealen selbst ein Ideal in $\mathcal{H}$. Da er aber offenbar verschieden ist von allen (π^m) mit $m \in \mathbb{N}_0$, und dies bis auf das Nullideal alle Ideale aus $\mathcal{H}$ sind, muss Ker $\kappa = 0$ sein, sodass κ ein Monomorphismus ist.

Sei nun $a = (a^1{+}(\pi), a^2{+}(\pi^2), a^3{+}(\pi^3), a^4{+}(\pi^4), \cdots) \in \underset{\longleftarrow n}{lim}\,(\mathcal{H}/(\pi^n))$ beliebig. Hierbei seien $a^j = (a_1^j, a_2^j, a_3^j, a_4^j, \cdots) \in \mathcal{H}$ für $j \in \mathbb{N}$. Wir müssen ein $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, \cdots) \in \mathcal{H}$ finden, sodass $f + (\pi^m) = a^m + (\pi^m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt. Dazu bemerken wir, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ wegen $\pi_i^m = 0$ für $m \geq i$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned} a^m + (\pi^m) &= (a_1^m + (\pi_1^m), \cdots, a_m^m + (\pi_m^m), a_{m+1}^m + (\pi_{m+1}^m), a_{m+2}^m + (\pi_{m+2}^m), \cdots) \\ &= (a_1^m, \cdots, a_m^m, a_{m+1}^m + (\pi_{m+1}^m), a_{m+2}^m + (\pi_{m+2}^m), \cdots)\,. \end{aligned}$$

Da ferner $a^m + (\pi^m) = a^{m+1} + (\pi^m)$ gelten muss, folgt zunächst $a_i^m = a_i^{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $i \leq m$. Hieraus ergibt sich schließlich $a_i^m = a_i^l$ für alle $m, l \in \mathbb{N}$ und alle $i \leq min\{m, l\}$, sodass die Folgen $(a_i^m)_{m=1}^{\infty}$ für jedes i ab $m = i$ stationär werden. Definieren wir nun $f := (a_1^1, a_2^2, a_3^3, a_4^4, \cdots)$, so folgt aus der vorangegangenen Diskussion, dass $f \in \mathcal{H}$ und $\kappa(f) = a$ gelten. Somit ist κ auch surjektiv und damit ein Isomorphismus, womit die Vollständigkeit von $\mathcal{H}$ gezeigt ist. $\square$

Das vorangegangene Theorem 3.23 charakterisiert $\mathcal{H}$ wieder als eine Nakayama-Algebra. Ist M ein unzerlegbarer Modul aus mod $\mathcal{H}$, der Kategorie der endlichdimensionalen $\mathcal{H}$-Moduln, so wird dieser von einer Potenz des Radikals von $\mathcal{H}$ annuliert. Man erhält so, dass M isomorph ist zu einem Faktormodul von $\mathcal{H}$ der Form $\mathcal{H}/(\pi^n)$, wobei $n \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl ist, für welche (π^n) den Modul M annuliert. Man erhält folgendes Bild für den Auslander-Reiten-Köcher von $\mathcal{H}$:

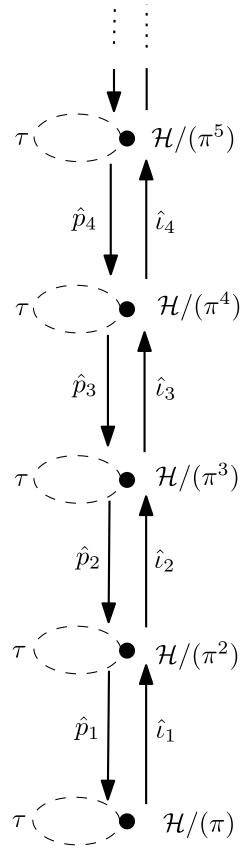


Abbildung 3.4: Auslander-Reiten-Köcher von $\mathcal{H}$

Wieder lässt sich jeder der A-Moduln $S[n]$, $n \in \mathbb{N}$, mittels der pr_n und der von $\operatorname{End}_A(S[n])$ induzierten Modulstruktur als ein endlichdimensionaler $\mathcal{H}$-Modul auffassen. Die Identifikation $\mathcal{H}/(\pi^n) \longleftrightarrow S[n]$ liefert uns:

Folgerung 3.24. *Sei A eine zahm-erbliche k-Algebra und $\mathcal{T}$ eine homogene Röhre in* $\Gamma(\operatorname{mod} A)$*, welche vom einfach regulären Modul* $S[1]$ *erzeugt wird. Sei weiter*

$\mathcal{H} = \varprojlim_i \operatorname{End}_A(S[i])$ *der inverse Limes des Systems* (3.11). *Dann sind die Kategorien* $add(\mathcal{T})$ *und* mod $\mathcal{H}$ *äquivalent.*

Wir haben uns bisher nur die Kategorien der endlichdimensionalen Moduln über den entsprechenden Algebren angeschaut. Im nächsten Abschnitt wollen wir kurz darauf eingehen, wie man die gewonnenen Resultate auf eine Unterkategorie von Mod A bzw. Mod $\mathcal{H}$ ausdehnen kann, deren Moduln sich in einem gewissen Sinne durch endlichdimensionale Moduln approximieren lassen, aber selbst nichtmehr endlichdimensional sein müssen.

Bemerkung 3.25. Wir können eine ähnliche Aussage wie in Folgerung 3.24 auch für nicht-homogene Röhren treffen. Wie dies funktioniert, beschreibt Ringel in [20, 4.4]: Ist uns eine Röhre $\mathcal{T}_r$ vom Rang $r > 1$ in $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ gegeben und seien die Moduln darin wie in Abschnitt 3.1 bezeichnet, so können wir einen einfach regulären Modul $S_i[1]$ betrachten. Für diesen erhalten wir mit der Festlegung $S_j[n] = S_{j+kr}[n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall j \in \{1, \cdots, r\}$, folgende Kette von Epimorphismen:

$$\cdots \longrightarrow S_{i-2}[3] \xrightarrow{p_{i-1,2}} S_{i-1}[2] \xrightarrow{p_{i,1}} S_i[1] \ . \tag{3.31}$$

Diese induziert wieder eine Kette von Algebrenhomomorphismen

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{End}_A(S_{i-2}[3]) \longrightarrow \operatorname{End}_A(S_{i-1}[2]) \longrightarrow \operatorname{End}_A(S_i[1]) \ , \tag{3.32}$$

für welche wir den inversen Limes $\mathcal{H}_0 := \varprojlim_n \operatorname{End}_A(S_{i+1-n}[n])$ definieren können. Es stellt sich heraus, dass dieses $\mathcal{H}_0$ unabhängig von der Wahl des einfach regulären Moduls $S_i[1]$ ist, und dass die Kategorie $add(\mathcal{T}_r)$ äquivalent ist zu der Kategorie mod $\hat{M}_r(\mathcal{H}_0)$, wobei $\hat{M}_r(\mathcal{H}_0)$ die Algebra

$$\hat{M}_r(\mathcal{H}_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_0 & \mathcal{H}_0 & \cdots & \mathcal{H}_0 \\ \operatorname{rad}\mathcal{H}_0 & \mathcal{H}_0 & & \mathcal{H}_0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \operatorname{rad}\mathcal{H}_0 & \cdots & \operatorname{rad}\mathcal{H}_0 & \mathcal{H}_0 \end{pmatrix}$$

bezeichnet.

3.5 Reguläre Torsionsmoduln

Wir werden in diesem Abschnitt kurz auf eine Methode eingehen, welche die Ergebnisse aus Folgerung 3.24 (bzw. Bemerkung 3.25) auf eine größere Klasse von Moduln verallgemeinert, und zwar die Klasse der so genannten Torsionsmoduln bzw. regulären Torsionsmoduln. Wir werden zunächst definieren, was wir hierunter verstehen wollen.

Definition 3.26. Sei A eine k-Algebra und M ein A-Modul. Ist M endlichdimensional, so nennt man den Modul M einen **Torsionsmodul**, falls er keinen von Null verschiedenen postprojektiven direkten Summanden besitzt. Ist M hingegen von beliebiger Dimension, so heißt der Modul M Torsionsmodul, falls $M = \mathcal{G}M$ gilt. Hierbei ist $\mathcal{G}M$ derjenige Untermodul von M, der von allen endlichdimensionalen Torsions-Untermoduln von M erzeugt wird. M heißt **regulärer Torsionsmodul**, wenn M sowohl ein Torsionsmodul als auch ein regulärer A-Modul ist.

Ist uns ein Torsionsmodul M gegeben, so können wir diesen nach obiger Definition schreiben als

$$M = \sum_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \,, \tag{3.33}$$

wobei $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ die Menge aller endlichdimensionalen Torsions-Untermoduln von M ist. Man kann eine Familie $\{V_\alpha \mid \alpha \in I\} \subseteq \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ von endlichdimensionalen Torsions-Untermoduln von M finden, sodass $(I, \leq)$ eine partiell geordnete Menge ist, die Inklusion $V_{\alpha_1} \subseteq V_{\alpha_2}$ für $\alpha_1, \alpha_2 \in I$, $\alpha_1 \leq \alpha_2$, gilt, und $M = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ ist. Somit können wir die (regulären) Torsionsmoduln als diejenigen Moduln verstehen, welche sich als Vereinigung von endlichdimensionalen (regulären) Torsionsmoduln[3] schreiben lassen.

Wir werden nun kurz auf ein Resultat aus [20] eingehen, welches besagt, dass die volle Unterkategorie der regulären Torsionsmoduln einer zahm-erblichen k-Algebra A eine exakte abelsche Unterkategorie von $\operatorname{Mod} A$ ist. Im Anschluss werden wir zur Verallgemeinerung von Folgerung 3.24 auf die Kategorie der regulären Torsionsmoduln kommen.

Theorem 3.27. *Sei A eine zahm-erbliche k-Algebra. Dann ist die volle Unterkategorie der regulären Torsionsmoduln eine exakte abelsche Unterkategorie von* $\operatorname{Mod} A$.

Beweis. Der Beweis ist zu finden in [20, 4.4]. Wir werden nur eine Skizze des Beweises geben. Es ist zu zeigen, dass für jeden Homomorphismus $f: M \longrightarrow N$ zwischen regulären Torsionsmoduln M und N sowohl der Kern als auch der Kokern wieder reguläre Torsionsmoduln sind. Da direkte Summen regulärer Torsionsmoduln auch wieder solche sind, wäre die Behauptung damit gezeigt. Es wird wesentlich die Tatsache genutzt, dass die volle Unterkategorie der endlichdimensionalen, regulären A-Moduln eine exakte, abelsche Unterkategorie von $\operatorname{mod} A$ ist (vgl. Lemma 3.5). Sei also $f: M \longrightarrow N$ ein Homomorphismus zwischen den regulären Torsionsmoduln M und N.

Betrachten wir zunächst den Kern $\operatorname{Ker} f$. Um zu zeigen, dass dieser ein regulärer Torsionsmodul ist, reicht es zu zeigen, dass er von endlichdimensionalen, regulären Untermoduln erzeugt wird. Dies geschieht dadurch, dass man zeigt, dass jeder endlichdimensionale Untermodul U von $\operatorname{Ker} f$ im Kern eines Homomorphismus $f': U_M \longrightarrow U_N$ zwischen

[3] Genauer müsste man hier vom **direkten Limes** von (regulären) Torsionsmoduln sprechen, welcher dual zum inversen Limes definiert ist.

endlichdimensionalen, regulären Moduln U_M und U_N enthalten ist. Dann folgt aus Lemma 3.5, dass U ebenfalls regulär ist. Da somit jeder endlichdimensionale Untermodul von Ker f regulär ist, ist Ker f selbst ein regulärer Torsionsmodul.

Für den Kokern Coker f gilt zunächst, dass er, als Faktormodul von N, von allen seinen endlichdimensionalen Torsions-Untermoduln erzeugt wird. Es bleibt nach einem Kriterium aus [20, 4.2] noch zu zeigen, dass Coker f keinen endlichdimensionalen, von Null verschiedenen präinjektiven Untermodul besitzt. Dies beweist man unter Zuhilfenahme der Tatsache, dass es in $\operatorname{mod} A$ keine Nicht-Null-Homomorphismen von präinjektiven in reguläre Moduln gibt. Damit ergibt sich, dass die Einbettung $V \hookrightarrow$ Coker f für jeden endlichdimensionalen, präinjektiven Untermodul von Coker f bereits Null ist, woraus $V = 0$ folgt. □

Wir kommen nun zu einer Konstruktion, welche an vielen Stellen in der Darstellungstheorie auftritt, und die es erlaubt, Äquivalenzen von bestimmten Kategorien auf größere Kategorien zu verallgemeinern. Sie basiert darauf, dass man durch die universelle Eigenschaft von Kokernen neue (eindeutige) Homomorphismen erzeugen kann. Dies gestattet es, Äquivalenzen von Kategorien auf diejenigen Kategorien zu erweitern, welche durch Hinzunahme von Kokernen entstehen. Ein Beispiel hierfür tritt bei der so genannten Projektivisierung auf.

Wir können im Kontext dieser Arbeit mit den Bezeichnungen aus Folgerung 3.24 die Kategorien $add(\mathcal{T})$ und $\operatorname{mod} \mathcal{H}$ betrachten. Sei uns in $\operatorname{Mod} A$ ein regulärer Torsionsmodul X gegeben, dessen endlichdimensionale Untermoduln aus $add(\mathcal{T})$ sind. Da dieser von seinen regulären Untermoduln endlicher Dimension erzeugt wird, finden wir einen Epimorphismus

$$\bigoplus_{\alpha \in I} U_\alpha \longrightarrow X \longrightarrow 0 \tag{3.34}$$

mit U_α aus $add(\mathcal{T})$ für alle $\alpha \in I$. Da nun der Kern dieses Epimorphismus nach Theorem 3.27 wieder ein regulärer Torsionsmodul ist, finden wir eine exakte Sequenz

$$\bigoplus_{\beta \in J} V_\beta \xrightarrow{f} \bigoplus_{\alpha \in I} U_\alpha \longrightarrow X \longrightarrow 0 \tag{3.35}$$

mit V_β aus $add(\mathcal{T})$ für alle $\beta \in J$, sodass sich X als Kokern eines Homomorphismus f zwischen direkten Summen von $add(\mathcal{T})$-Moduln schreiben lässt. Eine analoge Konstruktion lässt sich für die Torsionsmoduln aus $\operatorname{Mod} \mathcal{H}$, welche wir als Vereinigungen von Moduln aus $\operatorname{mod} \mathcal{H}$ schreiben können, durchführen. Da sich obige Abbildung f als eine Matrix aus Abbildungen $f_{\alpha,\beta} \in \operatorname{Hom}_A(V_\beta, U_\alpha)$ auffassen lässt, sehen wir, dass sich die Äquivalenz von $add(\mathcal{T})$ und $\operatorname{mod} \mathcal{H}$ ausdehnen lässt auf die entsprechenden (regulären) Torsionsmoduln. Wir haben damit:

Folgerung 3.28. *Sei A eine zahm-erbliche k-Algebra und $\mathcal{T}$ eine homogene Röhre in $\Gamma(\operatorname{mod} A)$, welche vom einfach regulären Modul $S[1]$ erzeugt wird. Sei weiter $\mathcal{H} = \varprojlim_{i} \operatorname{End}_A(S[i])$ der inverse Limes des Systems (3.11). Dann ist die Kategorie der regulären Torsionsmoduln aus $\operatorname{Mod} A$, deren endlichdimensionale Untermoduln in $add(\mathcal{T})$ liegen, äquivalent zur Kategorie der Torsionsmoduln aus $\operatorname{Mod} \mathcal{H}$.*

Kapitel 4

Die Struktur der Algebra $\mathcal{H}$

Wir gehen auch in diesem Kapitel wieder davon aus, dass wir eine zahm-erbliche k-Algebra A und eine homogene Röhre $\mathcal{T}$ aus $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ gegeben haben. Wir haben im letzten Kapitel erarbeitet, dass die Kategorie der endlichdimensionalen Moduln aus $add(\mathcal{T})$ äquivalent ist zur Kategorie mod $\mathcal{H}$, wobei $\mathcal{H}$ als inverser Limes der Kette (3.11) von Algebrenepimorphismen entsteht. Wir haben ferner in Theorem 3.23 gesehen, dass die Algebra $\mathcal{H}$ ein vollständiger Hauptidealring ist, in welchem sämtliche Links-, Rechts- und zweiseitigen Ideale Radikalpotenzen sind. Es entsteht die Frage danach, ob man die innere Struktur von $\mathcal{H}$ genau angeben kann. Da eine homogene Röhre durch einen einfach regulären A-Modul $S[1]$, welcher $\tau S[1] \cong S[1]$ erfüllt, entsteht, liegt die Vermutung nahe, dass die Algebra $\mathcal{H}$ vollständig durch gewisse homologische Eigenschaften des Moduls $S[1]$ gegeben ist. Dies führt unmittelbar dazu, nach einem Zusammenhang zwischen den Räumen $\operatorname{Ext}^n_A(S[1], S[1])$, $n \in \mathbb{N}_0$, und $\mathcal{H}$ zu suchen. Da wir eine erbliche Algebra A zugrunde liegen haben, werden nur $\operatorname{Hom}_A(S[1], S[1])$ und $\operatorname{Ext}^1_A(S[1], S[1])$ von Belang sein. Wir werden im Laufe des Kapitels sehen, dass unter gewissen Voraussetzungen an den Grundkörper k die Struktur von $\mathcal{H}$ tatsächlich vollständig durch $\operatorname{End}_A(S[1])$ und $\operatorname{Ext}^1_A(S[1], S[1])$ bestimmt ist. Außerdem wollen wir eine konkrete Realisierung einer zu mod $\mathcal{H}$ äquivalenten Kategorie kennen lernen, welche es gestattet, viele Rechnungen mit konkret gegebenen Darstellungen durchzuführen.

4.1 Charakterisierung von $\mathcal{H}$ als Schief-Potenzreihenring

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass es sich bei $\mathcal{H}$ um einen so genannten Schief-Potenzreihenring handelt. Es werden zunächst wieder einige Definitionen und Lemmata vorangestellt, welche für den Beweis dieses Resultats benötigt werden. Wir beginnen damit, die Schief-Potenzreihenringe zu definieren, und einige elementare Eigenschaften dieser zu erarbeiten.

Definition 4.1. Sei D eine k-Divisionsalgebra und $\sigma: \ D \longrightarrow D$ ein Algebrenendomorphismus von D. Der **Schief-Potenzreihenring** $D[[T;\sigma]]$ ist definiert als derjenige Ring, dessen zugrunde liegende Menge

$$\prod_{n=0}^{\infty} D = \{a = (a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots) \mid a_n \in D, \, \forall n \in \mathbb{N}_0\}$$

ist, und dessen Addition und Multiplikation erklärt sind durch:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots) + (b_0, b_1, b_2, b_3, \cdots) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \cdots),$$

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3, \cdots) := (c_0, c_1, c_2, c_3, \cdots) \text{ mit } c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \sigma^k(b_{n-k}).$$

Ein Schief-Potenzreihenring wie oben definiert ist insbesondere eine k-Algebra. Es ist klar, dass man für $\sigma = id_D$ den „gewöhnlichen" formalen Potenzreihenring $D[[T]]$ erhält. Schreibt man in Analogie zum formalen Potenzreihenringen die Elemente von $D[[T;\sigma]]$ in der Form

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots) =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n, \tag{4.1}$$

so schreiben sich die Rechenregeln aus Definition 4.1 als:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n T^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) T^n, \text{ und} \tag{4.2}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n T^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \sigma^k(b_{n-k})\right) T^n. \tag{4.3}$$

Wir werden im Folgenden mit dieser Notation weiterarbeiten. Man kann sich den Schief-Potenzreihenring $D[[T;\sigma]]$ also so vorstellen, dass er nichts anderes ist als der formale Potenzreihenring $D[[T]]$ ausgestattet mit der Vertauschungsregel $Tb = \sigma(b)T$ für $b \in D$.

Wir fassen in einem Lemma die wichtigsten Eigenschaften von $D[[T;\sigma]]$ für den Fall zusammen, in dem σ ein Algebrenautomorphismus ist.

Lemma 4.2. *Sei D ein Schiefkörper und $\sigma \in \mathrm{End}(D)$ ein Automorphismus. Dann ist $D[[T;\sigma]]$ ein vollständiger Hauptidealring und seine Nicht-Null-Ideale sind von der Gestalt (T^n), $n \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. Ist D ein Schiefkörper und $\sigma \in \mathrm{End}(D)$ ein Automorphismus, so kann jede Links-Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ auf eindeutige Weise als Rechts-Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n a'_n$ geschrieben werden, und umgekehrt. Dabei ist ein Koeffizient a_k genau dann Null, wenn der zugehörige Koeffizient a'_k Null ist. Es lässt sich nun völlig analog zum gewöhnlichen formalen Potenzreihenring $D[[T]]$ zeigen, dass ein $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ genau dann eine Einheit in $D[[T;\sigma]]$ ist, wenn a_0 eine Einheit in D ist, d. h., wenn $a_0 \neq 0$ in D gilt.

Sei nun $I \neq 0$ ein Ideal in $D[[T;\sigma]]$. Wir definieren die Zahl

$$m_0 := min\{m \in \mathbb{N}_0 \mid \exists a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \in I : \, a_m \neq 0\} \ ,$$

welche wegen $I \neq 0$ in $\mathbb{N}_0$ existiert. Sei ferner $a^{m_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{m_0} T^n$ ein Element aus I, welches dieses m_0 realisiert. Dann können wir a^{m_0} schreiben als $a^{m_0} = \sum_{n=m_0}^{\infty} a_n^{m_0} T^n$ mit $a_{m_0}^{m_0} \neq 0$. Für jedes weitere $b = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T^n \in I$ gilt dann nach Definition von m_0, dass $b_i = 0$ für alle $i \in \{0, \cdots m_0 - 1\}$ ist.

Da wir a^{m_0} schreiben können als $a^{m_0} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m_0+n}^{m_0} T^n \right) \cdot T^{m_0}$ und die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{m_0+n}^{m_0} T^n$ nach voriger Bemerkung eine Einheit ist, folgt $T^{m_0} \in I$ und damit $(T^{m_0}) \subseteq I$.

Umgekehrt kann man jedes $b = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T^n \in I$ wegen $b_i = 0$ für alle $i \in \{0, \cdots m_0 - 1\}$ in der Form $b = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_{m_0+n} T^n \right) \cdot T^{m_0}$ schreiben, weswegen $I \subseteq (T^{m_0})$ folgt. Somit ist $I = (T^{m_0})$ und die Aussagen über die Ideale von $D[[T;\sigma]]$ sind bewiesen.

Es bleibt die Vollständigkeit zu zeigen. Wegen rad $D[[T;\sigma]] = (T)$ haben wir den inversen Limes $\varprojlim_n D[[T;\sigma]]/(T^n)$ zu betrachten. Wir untersuchen den kanonischen Homomorphismus $\kappa : \ D[[T;\sigma]] \longrightarrow \varprojlim_n D[[T;\sigma]]/(T^n)$ auf Injektivität und Surjektivität.

Für den Kern von κ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{Ker } \kappa &= \{a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \in D[[T;\sigma]] \mid a \in (T^n), \, \forall n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \in D[[T;\sigma]] \mid a_{n-1} = 0 \, \forall n \in \mathbb{N}\} \\ &= 0 \, , \end{aligned}$$

sodass κ ein Monomorphismus ist.

Sei nun $x = (x^1 + (T), x^2 + (T^2), x^3 + (T^3), x^4 + (T^4), \cdots) \in \varprojlim_n D[[T;\sigma]]/(T^n)$ beliebig, und seien die x^i gegeben als $x^i = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^i$. Aus der Tatsache $x^i + (T^i) = x^{i+1} + (T^i)$, $\forall i \in \mathbb{N}$, gilt, folgt unmittelbar $x_n^i = x_n^{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle $n < i$. Damit haben wir für ein festes $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $x_n^i = x_n^j$ für alle $i, j \geq n+1$. Somit werden die Folgen $(x_n^i)_{i=0}^{\infty}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ab $i = n+1$ stationär. Definieren wir $a := \sum_{n=0}^{\infty} x_n^{n+1} T^n$, so erhalten wir damit $x = \kappa(a)$, womit die Surjektivität von κ gezeigt ist.

Da κ ein Isomorphismus ist, ist $D[[T;\sigma]]$ vollständig und der Beweis ist abgeschlossen. $\square$

Kommen wir mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 3.4 nun wieder auf die homogene Röhre $\mathcal{T}$ zurück. Für jeden unzerlegbaren Modul $S[n]$ in dieser gilt $\tau S[n] \cong S[n]$. Wir werden im Folgenden für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Moduln $\tau S[n]$ und $S[n]$ unter diesem Isomorphismus miteinander identifizieren[1]. Wenn wir dies tun, so induziert nach Folgerung 2.9 die Abbildung

$$\tau: \ \mathrm{End}_A(S[n]) \longrightarrow \mathrm{End}_A(\tau S[n]) = \mathrm{End}_A(S[n])$$

einen funktoriellen Automorphismus von $\mathrm{End}_A(S[n])$. Wir können zeigen, dass dieser für $n = 1$ sogar ein Automorphismus von k-Algebren ist.

Lemma 4.3. *Der funktorielle Isomorphismus $\tau: \ \mathrm{End}_A(S[1]) \longrightarrow \mathrm{End}_A(S[1])$ ist ein Isomorphismus von k-Algebren.*

Beweis. Da τ bereits ein Isomorphismus von k-Vektorräumen ist, müssen wir nur noch zeigen, dass für $f, g \in \mathrm{End}_A(S[1])$ die Beziehung $\tau(fg) = \tau(f)\tau(g)$ gilt. Sei hierzu

$$\mu: \ 0 \longrightarrow S[1] \longrightarrow S[2] \longrightarrow S[1] \longrightarrow 0$$

eine fast spaltende Sequenz, welche in $S[1]$ endet.

Da $S[1]$ nicht projektiv ist, gilt nach Theorem 2.12 die Gleichungskette

$$\begin{aligned}
\tau(fg) \cdot \mu &= \mu \cdot (fg) \\
&= (\mu \cdot f) \cdot g \\
&= (\tau(f) \cdot \mu) \cdot g \\
&= \tau(f) \cdot (\mu \cdot g) \\
&= \tau(f) \cdot (\tau(g) \cdot \mu) \\
&= (\tau(f)\tau(g)) \cdot \mu\,,
\end{aligned}$$

[1]Man kann dies formal dadurch tun, dass man statt der Kategorie mod A das **Skelett** von mod A betrachtet. Dafür wählt man sich für jede Isomorphieklasse eines unzerlegbaren A-Moduls einen Vertreter und arbeitet statt mit allen A-Moduln nur mit diesen ausgewählten Repräsentanten.

woraus wir $(\tau(fg) - \tau(f)\tau(g)) \cdot \mu = 0$ folgern. Da nun aber $\mathrm{Ext}^1_A(S[1], S[1])$ ein 1-dimensionaler linker $\mathrm{End}_A(S[1])$-Vektorraum ist, und wir μ als Basis darin wählen können, folgern wir $(\tau(fg) - \tau(f)\tau(g)) = 0$, d. h., $\tau(fg) = \tau(f)\tau(g)$. □

Der einfach reguläre Modul $\mathrm{End}_A(S[1])$ wirft somit zwei wesentliche Informationen ab, die nur von $\mathrm{End}_A(S[1])$ und $\mathrm{Ext}^1_A(S[1], S[1])$ bestimmt werden. Es handelt sich hierbei einmal um den Schiefkörper

$$D := \mathrm{End}_A(S[1])\,, \tag{4.4}$$

und ferner um den Automorphismus

$$\tau:\ D \longrightarrow D \tag{4.5}$$

von D. Diese beiden aus $S[1]$ abgeleiteten Objekte legen es nun nahe, nach einem Zusammenhang zwischen der Algebra $\mathcal{H} = \varprojlim_n \mathrm{End}_A(S[n])$ und einem Schief-Potenzreihenring $D[[T;\sigma]]$ zu suchen, wobei σ durch τ bestimmt sein sollte.

Wir werden hierbei eine zusätzliche Voraussetzung an den Körper k stellen, welche es uns gestatten wird, von einer endlichdimensionalen k-Algebra das Radikal als direkten Summanden abzuspalten.

Definition 4.4. Ein Körper K heißt **vollkommen**, wenn jedes irreduzible Polynom aus $K[T]$ in einem algebraischen Abschluss $\bar{K}$ von K paarweise verschiedene Wurzeln besitzt.

Wir werden im Rest dieses Abschnittes annehmen, dass k ein vollkommener Körper ist. Es sei angemerkt, dass dies keine so starke Einschränkung wie etwa algebraische Abgeschlossenheit darstellt. Die Vollkommenheit von k ist unter anderem gegeben, falls $\mathrm{char}(k) = 0$ ist, oder falls für $\mathrm{char}(k) = p > 0$ jedes Element von k eine p-te Potenz ist.

Ist der Körper k vollkommen, so haben wir das Theorem von Wedderburn-Malcev zur Verfügung.

Theorem 4.5. *(Wedderburn-Malcev für vollkommene Körper)*
Sei k ein vollkommener Körper und B eine eindlichdimensionale k-Algebra. Dann existiert eine Unteralgebra B' von B, sodass $B = B' \oplus \mathrm{rad}\, B$ gilt. Ist ferner B'' eine weitere Unteralgebra von B mit $B = B'' \oplus \mathrm{rad}\, B$, dann existiert ein $\omega \in \mathrm{rad}\, B$, sodass $B' = (1-\omega)^{-1}B''(1-\omega)$ gilt.

Beweis. Der Beweis ist zu finden in [17, 11.6.]. □

Mithilfe dieses Theorems finden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Unteralgebra B_n von $\mathrm{End}_A(S[n])$, sodass $\mathrm{End}_A(S[n]) = B_n \oplus \mathrm{rad}\,\mathrm{End}_A(S[n])$ gilt. Weiterhin induziert diese Zerlegung einen Algebrenisomorphismus $B_n \cong \mathrm{End}_A(S[n])/\,\mathrm{rad}\,\mathrm{End}_A(S[n])$. Wir können nun einsehen, dass $B_n \cong D = \mathrm{End}_A(S[1])$ ist. Dazu betrachten wir nochmals die Folge (3.11) von Algebrenepimorphismen:

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{End}_A(S[4]) \xrightarrow{\tilde{p}_3} \mathrm{End}_A(S[3]) \xrightarrow{\tilde{p}_2} \mathrm{End}_A(S[2]) \xrightarrow{\tilde{p}_1} \mathrm{End}_A(S[1]) \ .$$

Diese liefert zunächst einen Epimorphismus $\phi : \ \mathrm{End}_A(S[n]) \xrightarrow{\tilde{p}_1 \cdots \tilde{p}_{n-1}} \mathrm{End}_A(S[1])$. Zeigen wir Ker $\phi = \mathrm{rad}\ \mathrm{End}_A(S[n])$, so folgt $B_n \cong \mathrm{End}_A(S[n]) / \mathrm{rad}\ \mathrm{End}_A(S[n]) \cong D$.

Ist also $f \in \mathrm{Ker}\ \phi$, so muss nach der Definition der $\tilde{p}_m$ die Inklusion Im $f \subseteq \mathrm{rad}_A S[n]$ gelten. Nach Folgerung 3.14 ist somit $f \in (\pi_n) = \mathrm{rad}\ \mathrm{End}_A(S[n])$.

Ist umgekehrt $f \in \mathrm{rad}\ \mathrm{End}_A(S[n]) = (\pi_n)$, so gilt wieder nach Folgerung 3.14 die Inklusion Im $f \subseteq \mathrm{rad}_A S[n]$. Dies bedeutet aber $(\tilde{p}_1 \circ \cdots \circ \tilde{p}_{n-1})(f) = 0$, also $f \in \mathrm{Ker}\ \phi$.

Wir haben somit gezeigt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Algebra $\mathrm{End}_A(S[n])$ eine zu $D = \mathrm{End}_A(S[1])$ isomorphe Unteralgebra B_n enthält. Identifizieren wir D mit der Unteralgebra B_n von $\mathrm{End}_A(S[n])$, so wird $\mathrm{End}_A(S[n])$ auf natürliche Weise zu einem D-D-Bimodul. Die Modulstruktur wird hierbei induziert durch die algebreneigene Multiplikation mit Elementen aus $B_n = D$. Wir wollen nun versuchen, die B_n, welche wir zunächst für jede der Algebren $\mathrm{End}_A(S[n])$ getrennt definiert haben, so zu wählen, dass sie mit den $\tilde{p}_m$ „kompatibel“ ist. Fixieren wir dazu für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung $\mathrm{End}_A(S[n]) = B_n \oplus \mathrm{rad}\ \mathrm{End}_A(S[n])$ mit einer zu D isomorphen Unteralgebra B_n von $\mathrm{End}_A(S[n])$. Der Epimorphismus $\tilde{p}_n : \ \mathrm{End}_A(S[n+1]) \longrightarrow \mathrm{End}_A(S[n])$ bildet das Radikal von $\mathrm{End}_A(S[n+1])$ surjektiv auf das Radikal von $\mathrm{End}_A(S[n])$ ab. Wir werden die B_n nun sukzessive so abändern, dass $\tilde{p}_n$ auf der Unteralgebra B_{n+1} einen Isomorphismus $B_{n+1} \xrightarrow[\sim]{\tilde{p}_n} B_n$ induziert. Es sei noch bemerkt, dass wegen der Lokalität der $\mathrm{End}_A(S[n])$ alle Nicht-Null-Elemente von B_n Isomorphismen sind. Da die $\tilde{p}_m$ nach Theorem 3.15 Isomorphismen wieder auf Isomorphismen abbilden, folgt, dass die Einschränkung von $\tilde{p}_n$ auf B_{n+1} ein Monomorphismus ist. Kommen wir nun zur besagten Modifikation der B_n:
(1): Wir setzen $B'_1 := B_1 = \mathrm{End}_A(S[1])$.
(2): Da $\mathrm{End}_A(S[1]) = D$ ist, und die Einschränkung von $\tilde{p}_1$ auf B_2 ein Monomorphismus ist, gilt wegen $B_2 \cong D$ die Gleichheit $\tilde{p}_1(B_2) = B'_1$. Setzen wir also $B'_2 := B_2$, so ist die Einschränkung von $\tilde{p}_1$ auf B'_2 ein Isomorphismus.
$\vdots$
(n): Der Algebrenhomomorphismus $\tilde{p}_{n-1}$ bildet die Unteralgebra B_n von $\mathrm{End}_A(S[n])$ auf eine Unteralgebra B''_{n-1} von $\mathrm{End}_A(S[n-1])$ ab. Da diese mit Ausnahme des Nullelements nur aus Isomorphismen besteht, gilt

$$B''_{n-1} \cap \mathrm{rad}\ \mathrm{End}_A(S[n-1]) = \{0\} \quad .$$

Da die Einschränkung von $\tilde{p}_{n-1}$ auf B_n injektiv ist, ist $B''_{n-1} \cong D$, und wir erhalten die Zerlegung $\mathrm{End}_A(S[n-1]) = B''_{n-1} \oplus \mathrm{rad}\ \mathrm{End}_A(S[n-1])$. Nach Theorem 4.5 gibt es ein

$\omega \in \operatorname{rad} \operatorname{End}_A(S[n-1])$, sodass $B'_{n-1} = (1-\omega)^{-1} B''_{n-1}(1-\omega)$ gilt. Sei $\bar{\omega} \in \operatorname{rad} \operatorname{End}_A(S[n])$ so gewählt, dass $\tilde{p}_{n-1}(\bar{\omega}) = \omega$ gilt. Wegen $\tilde{p}_{n-1}(1_{\operatorname{End}_A(S[n])}) = 1_{\operatorname{End}_A(S[n-1])}$ haben wir die Beziehung

$$\begin{aligned}(1-\omega)^{-1}(1-\omega) &= 1 \\ &= \tilde{p}_{n-1}(1) \\ &= \tilde{p}_{n-1}((1-\bar{\omega})^{-1}(1-\bar{\omega})) \\ &= \tilde{p}_{n-1}((1-\bar{\omega})^{-1})(1-\omega)\,.\end{aligned}$$

Da $(1-\omega)$ ein Isomorphismus ist, folgern wir $(1-\omega)^{-1} = \tilde{p}_{n-1}((1-\bar{\omega})^{-1})$.

Definieren wir $B'_n := (1-\bar{\omega})^{-1} B_n (1-\bar{\omega})$, so ergibt sich:

$$\tilde{p}_{n-1}(B'_n) = \tilde{p}_{n-1}((1-\bar{\omega})^{-1} B_n (1-\bar{\omega})) = (1-\omega)^{-1} B''_{n-1}(1-\omega) = B'_{n-1}\,. \tag{4.6}$$

Wir können also die B_n so zu B'_n konjugieren, dass $\operatorname{End}_A(S[n]) = B'_n \oplus \operatorname{rad} \operatorname{End}_A(S[n])$ und $\tilde{p}_n(B'_{n+1}) = B'_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Damit wirken die $\tilde{p}_n$ als Diagonalabbildungen auf den direkten Summen:

$$B'_{n+1} \oplus \operatorname{rad} \operatorname{End}_A(S[n+1]) \xrightarrow{\tilde{p}_n = \begin{bmatrix} \tilde{p}'_n & 0 \\ 0 & \tilde{p}^*_n \end{bmatrix}} B'_n \oplus \operatorname{rad} \operatorname{End}_A(S[n])\ , \tag{4.7}$$

wobei $\tilde{p}'_n$ bzw. $\tilde{p}^*_n$ die entsprechenden Einschränkungen von $\tilde{p}_n$ auf B'_{n+1} bzw. $\operatorname{rad} \operatorname{End}_A(S[n+1])$ sind. Wie zuvor bemerkt, ist $\tilde{p}'_n$ ein Isomorphismus von Algebren. Wir haben ebenfalls gesehen, dass wir die B'_n mit dem Schiefkörper D identifizieren können, wodurch $\operatorname{End}_A(S[n])$ eine natürliche D-D-Bimodulstruktur erhält. Tut man dies so, dass man ein Element $f_n \in B'_n$ mit dem Element $(\tilde{p}_1 \circ \cdots \circ \tilde{p}_{n-1})(f_n) \in D$ identifiziert, so werden die Abbildungen $\tilde{p}'_n$ und $\tilde{p}^*_n$ zu Homomorphismen von D-D-Bimoduln.

In diesem Zusammenhang können wir die sich aus (3.11) mittels obiger Diagonaldarstellung ergebenden inversen Systeme

$$\cdots \longrightarrow B'_3 \xrightarrow{\tilde{p}'_2} B'_2 \xrightarrow{\tilde{p}'_1} B'_1 \tag{4.8}$$

und

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{rad} \operatorname{End}_A(S[3]) \xrightarrow{\tilde{p}^*_2} \operatorname{rad} \operatorname{End}_A(S[2]) \xrightarrow{\tilde{p}^*_1} 0 \tag{4.9}$$

betrachten. Durch die zuvor besprochene Identifizierung erhalten wir aus (4.8) folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & B'_4 \arrow[r, "\tilde{p}'_3"] \arrow[d, "\tilde{p}'_1\tilde{p}'_2\tilde{p}'_3"', "\sim"] & B'_3 \arrow[r, "\tilde{p}'_2"] \arrow[d, "\tilde{p}'_1\tilde{p}'_2"', "\sim"] & B'_2 \arrow[r, "\tilde{p}'_1"] \arrow[d, "\tilde{p}'_1"', "\sim"] & B'_1 \arrow[d, equal] \\
\cdots \arrow[r, equal] & D \arrow[r, equal] & D \arrow[r, equal] & D \arrow[r, equal] & D\,.
\end{tikzcd} \tag{4.10}$$

Damit sehen wir sofort $\varprojlim_n B'_n \cong D$ als D-D-Bimoduln. Da wir die Algebra $\mathcal{H}$ gegeben haben als $\mathcal{H} = \varprojlim_n \operatorname{End}_A(S[n])$, folgt mit (4.7), (4.10) und Lemma 3.18 nun:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \varprojlim_n B'_n \oplus \varprojlim_n (\operatorname{rad} \operatorname{End}_A(S[n])) \\
&= \varprojlim_n B'_n \oplus \operatorname{rad} \mathcal{H} \\
&\cong D \oplus \operatorname{rad} \mathcal{H}\,,
\end{aligned}$$

wobei die direkten Summen als direkte Summen von D-D-Bimoduln zu verstehen sind. Die Identität $\varprojlim_n (\operatorname{rad} \operatorname{End}_A(S[n])) = \operatorname{rad} \mathcal{H}$ ist hierbei eine Konsequenz aus der Wirkung von pr_m auf die Ideale von $\mathcal{H}$ (vgl. Theorem 3.23).

Diese direkte Summenzerlegung von $\mathcal{H}$ lässt $\mathcal{H}$ (und damit auch $\operatorname{rad} \mathcal{H}$) zu einem halbeinfachen D-D-Bimodul werden. Da wegen $D \cong \mathcal{H}/\operatorname{rad} \mathcal{H}$ der Faktorraum $\operatorname{rad} \mathcal{H}/\operatorname{rad}^2 \mathcal{H}$ ebenfalls eine D-D-Bimodulstruktur trägt, ist der Kern des kanonischen Epimorphismus $\operatorname{rad} \mathcal{H} \longrightarrow \operatorname{rad} \mathcal{H}/\operatorname{rad}^2 \mathcal{H}$ ein direkter Summand in $\operatorname{rad} \mathcal{H}$. Damit gibt es einen D-D-Unterbimodul E von $\operatorname{rad} \mathcal{H}$, welcher durch den kanonischen Epimorphismus isomorph auf $\operatorname{rad} \mathcal{H}/\operatorname{rad}^2 \mathcal{H}$ abgebildet wird, und welcher die direkte Summenzerlegung $\operatorname{rad} \mathcal{H} = E \oplus \operatorname{rad}^2 \mathcal{H}$ zulässt. Es sei weiterhin bemerkt, dass $E \subseteq (\operatorname{rad} \mathcal{H} \setminus \operatorname{rad}^2 \mathcal{H}) \cup \{0\}$ gilt. Wir erhalten damit eine Zerlegung von $\mathcal{H}$ der Gestalt

$$\mathcal{H} = \varprojlim_n B'_n \oplus E \oplus \operatorname{rad}^2 \mathcal{H} \tag{4.11}$$

in D-D-Bimoduln.

Da die Abbildungen pr_m ebenfalls als D-D-Bimodulhomomorphismen arbeiten, $pr_m(\varprojlim_n B'_n) = B'_m$ ist, und nach Theorem 3.23 auch

$$pr_m(\operatorname{rad} \mathcal{H} \setminus \operatorname{rad}^2 \mathcal{H}) = \operatorname{rad} \operatorname{End}_A(S[m]) \setminus \operatorname{rad}^2 \operatorname{End}_A(S[m])$$

für $m > 1$ gilt, induziert die direkte Summenzerlegung (4.11) eine Zerlegung jedes $\operatorname{End}_A(S[m])$ in D-D-Bimoduln:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{End}_A(S[1]) &= B'_1\,, \\
\operatorname{End}_A(S[2]) &= B'_2 \oplus pr_2(E)\,, \\
\operatorname{End}_A(S[3]) &= B'_3 \oplus pr_3(E) \oplus \operatorname{rad}^2 \operatorname{End}_A(S[3])\,, \\
\operatorname{End}_A(S[4]) &= B'_4 \oplus pr_4(E) \oplus \operatorname{rad}^2 \operatorname{End}_A(S[4])\,, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Hierbei sind nach Konstruktion die Einschränkung $\tilde{p}'_n : \; B'_{n+1} \longrightarrow B'_n$ von $\tilde{p}_n$ auf B'_{n+1}, sowie die Einschränkung $\tilde{p}''_n : \; pr_{n+1}(E) \longrightarrow pr_n(E)$ von $\tilde{p}_n$ auf $pr_{n+1}(E)$, Isomorphismen. Man beachte, dass wegen $\tilde{p}_n pr_{n+1} = pr_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, die $\tilde{p}''_n$ tatsächlich in die Menge $pr_n(E)$ abbilden.

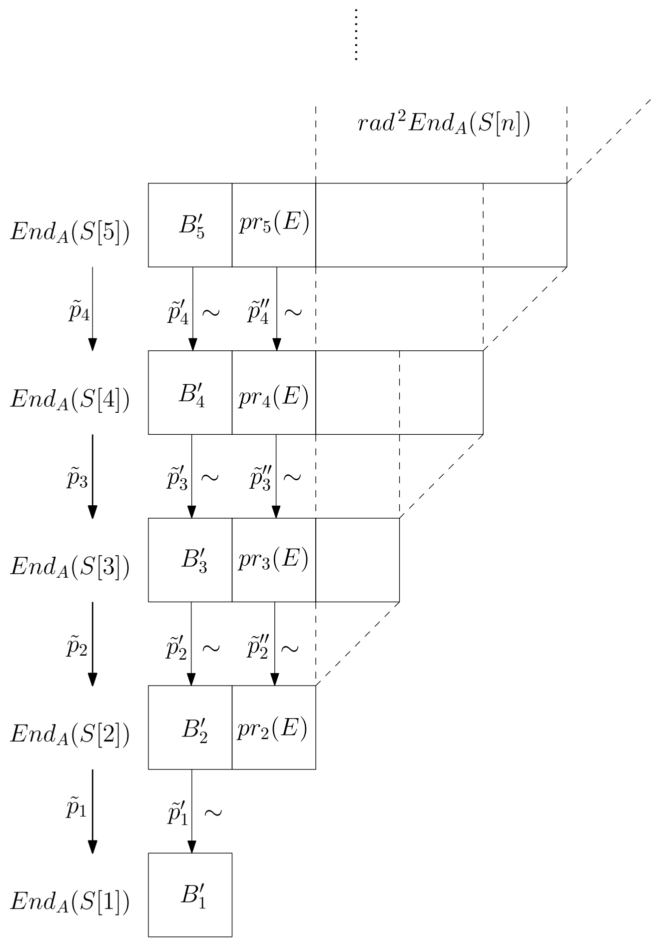


Abbildung 4.1: Wirkung der $\tilde{p}_n$ auf die direkten Summanden von $\operatorname{End}_A(S[n+1])$

Wir werden nun eine Tensoralgebra konstruieren, von welcher wir zunächst zeigen, dass sie isomorph zu einem Schief-Potenzreihenring ist. Im Anschluss werden wir von dieser Algebra Epimorphismen auf die $\mathrm{End}_A(S[n])$ konstruieren und mit deren Hilfe zeigen, dass auch $\mathcal{H}$ isomorph zu demselben Schief-Potenzreihenring ist. Hierzu verwenden wir ein Resultat für endlichdimensionale, lokale Algebren. Sei B eine solche. Dann gibt es (bis auf Isomorphie) genau einen einfachen B-Modul S. Dieser ist isomorph zu $B/\operatorname{rad} B$ und selbst eine k-Divisionsalgebra. Dadurch ist S als k-Algebra isomorph zu seiner Endomorphismenalgebra $\mathrm{End}_B(S)$. Ein Isomorphismus ist etwa durch die Abbildung

$$S \longrightarrow \mathrm{End}_B(S)\ ,\ s \mapsto (x \mapsto sx)$$

gegeben. Hierdurch kann man den $(B/\operatorname{rad} B)$-$(B/\operatorname{rad} B)$-Bimodul $\operatorname{rad} B/\operatorname{rad}^2 B$ als $(\mathrm{End}_B(S))$-$(\mathrm{End}_B(S))$-Bimodul betrachten. Man kann dann zeigen, dass es einen Isomorphismus

$$\operatorname{rad} B/\operatorname{rad}^2 B \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{End}_B(S)}(\mathrm{Ext}^1_B(S,S), \mathrm{End}_B(S)) \tag{4.12}$$

von $(\mathrm{End}_B(S))$-$(\mathrm{End}_B(S))$-Bimoduln gibt. Dies ist ein Spezialfall der Isomorphismen, welche Gabriel in [10, 7.3] angibt. In etwas abgewandelter Form sind sie beispielsweise auch in [1, III, 2.12] und [15, 3.7] zu finden. Da im Fall einer homogenen Röhre $\mathcal{T}$ für alle $n \geq 2$ die einfachen $\mathrm{End}_A(S[n])$-Moduln zueinander isomorphe Endomorphismen- und Erweiterungsräume besitzen (und zwar $D = \mathrm{End}_A(S[1])$ bzw. $\mathrm{Ext}^1_A(S[1], S[1])$), haben wir für jedes $n \geq 2$ einen Isomorphismus von D-D-Bimoduln:

$$\operatorname{rad} \mathrm{End}_A(S[n])/\operatorname{rad}^2 \mathrm{End}_A(S[n]) \cong \mathrm{Hom}_D(\mathrm{Ext}^1_A(S[1], S[1]), D)\,. \tag{4.13}$$

Wir schauen uns den Modul $\mathrm{Hom}_D(\mathrm{Ext}^1_A(S[1], S[1]), D)$ genauer an. Wegen $\mathrm{Ext}^1_A(S[1], S[1]) \cong \mathcal{D}\,\mathrm{Hom}_A(S[1], \tau S[1])$ müssen wir uns dazu den D-D-Bimodul $\mathrm{Hom}_A(S[1], \tau S[1])$ ansehen. Da $\tau S[1] \cong S[1]$ gilt, haben wir:

$$\mathrm{Hom}_A(S[1], \tau S[1]) \cong \mathrm{Hom}_A(S[1], S[1]) = D$$

als k-Vektorräume. Ferner ist für $d \in D$ und $f \in \mathrm{Hom}_A(S[1], \tau S[1])$ die Modulstruktur gegeben durch

$$f \cdot d = fd\ , \text{ sowie} \tag{4.14}$$
$$d \cdot f = \tau(d) f\,. \tag{4.15}$$

Das heißt, wir können $\mathrm{Hom}_A(S[1], \tau S[1])$ als den D-D-Bimodul auffassen, welcher als zugrundeliegende Menge die Menge D besitzt, und für den die Modulstruktur gegeben ist durch die Regeln (4.14) sowie (4.15). Es ist naheliegend, diesen Bimodul mit ${}_{\tau(D)}D_D$ zu bezeichnen.

Damit ist $\operatorname{Ext}^1_A(S[1], S[1]) \cong \mathcal{D}\operatorname{Hom}_A(S[1], \tau S[1]) \cong {}_D D_{\tau(D)}$, und nach (4.13) schließlich wieder

$$\operatorname{rad}\operatorname{End}_A(S[n])/\operatorname{rad}^2\operatorname{End}_A(S[n]) \cong {}_{\tau(D)}D_D\,. \tag{4.16}$$

Kommen wir nun zur Konstruktion der besagten Tensoralgebra. Hierfür schreiben wir der Kürze halber $\omega := {}_{\tau(D)}D_D \cong \operatorname{rad}\operatorname{End}_A(S[n])/\operatorname{rad}^2\operatorname{End}_A(S[n])$. Wir definieren für jedes $m \in \mathbb{N}$ das Tensorprodukt $\omega^m := \underbrace{\omega \otimes_D \cdots \otimes_D \omega}_{m \text{ Faktoren}}$. Diese Tensorprodukte tragen eine D-D-Bimodulstruktur, welche für $d \in D$ und $(d_1 \otimes d_2 \otimes \cdots \otimes d_{m-1} \otimes d_m) \in \omega^m$ gegeben ist durch

$$d \cdot (d_1 \otimes d_2 \otimes \cdots \otimes d_{m-1} \otimes d_m) := ((d \cdot d_1) \otimes d_2 \otimes \cdots \otimes d_{m-1} \otimes d_m) \text{ und} \tag{4.17}$$
$$(d_1 \otimes d_2 \otimes \cdots \otimes d_{m-1} \otimes d_m) \cdot d := (d_1 \otimes d_2 \otimes \cdots \otimes d_{m-1} \otimes (d_m \cdot d))\,. \tag{4.18}$$

Setzen wir $\omega^0 := D$, so können wir weiter eine Tensoralgebra Ω definieren als:

$$\Omega := D \times \omega \times \omega^2 \times \omega^3 \times \cdots = \prod_{m=0}^{\infty} \omega^m\,. \tag{4.19}$$

Hierbei seien die Addition und die skalare Multiplikation in Ω komponentenweise definiert und die Multiplikation sei für $(a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots), (b_0, b_1, b_2, b_3, \cdots) \in \Omega$ gegeben durch

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3, \cdots) := (c_0, c_1, c_2, c_3, \cdots) \text{ mit}$$
$$c_m := \sum_{k=0}^{m} \psi_{k,m-k}(a_k, b_m - k), \,.$$

Hierbei sind die $\psi_{k,l} : \ \omega^k \times \omega^l \longrightarrow \omega^{k+l}$ für $k', l' > 0$ induziert durch

$$\psi_{0,l'}(d, d_1 \otimes \cdots \otimes d_{l'}) := d \cdot (d_1 \otimes \cdots \otimes d_{l'})\,,$$
$$\psi_{k',0}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_{k'}, d) := (e_1 \otimes \cdots \otimes e_{k'}) \cdot d \text{ , sowie}$$
$$\psi_{k',l'}(e_1 \otimes \cdots \otimes e_{k'}, d_1 \otimes \cdots \otimes d_{l'}) := e_1 \otimes \cdots \otimes e_{k'} \otimes d_1 \otimes \cdots \otimes d_{l'}\,.$$

Wir zeigen nun, dass es sich bei dieser Tensoralgebra Ω um einen Schief-Potenzreihenring handelt.

Lemma 4.6. *Die in* (4.19) *definierte Tensoralgebra ist isomorph zum Schief-Potenzreihenring $D[[T;\tau^{-1}]]$, wobei τ^{-1} der zu τ aus* (4.5) *inverse Automorphismus von D ist.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass wir jedes ω^m mit D identifizieren können. Sei dazu $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Ist $m = 0$, so ist nichts zu zeigen. Seien also $m > 0$ und $\sum_{k=1}^{n}(d_1^k \otimes \cdots \otimes d_m^k) \in \omega^m$ beliebig.

Da wir ω als ${}_{\tau(D)}D_D$ charakterisiert hatten, erhalten wir für jedes $k \in \{1, \cdots, n\}$

$$\begin{aligned} d_1^k \otimes d_2^k \otimes \cdots \otimes d_{m-1}^k \otimes d_m^k &= d_1^k \otimes d_2^k \otimes \cdots \otimes d_{m-1}^k \otimes [\tau^{-1}(d_m^k)] \cdot 1 \\ &= d_1^k \otimes d_2^k \otimes \cdots \otimes d_{m-1}^k \cdot \tau^{-1}(d_m^k) \otimes 1 \\ &= d_1^k \otimes d_2^k \otimes \cdots \otimes [\tau^{-1}(d_{m-1}^k \cdot \tau^{-1}(d_m^k))] \cdot 1 \otimes 1 \\ &= \cdots \\ &= \tilde{d}^k \cdot (1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes 1) \end{aligned}$$

mit einem $\tilde{d}^k \in D$. Damit ist $\sum_{k=1}^{n} (d_1^k \otimes \cdots \otimes d_m^k) = \left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{d}^k \right) \cdot (1 \otimes \cdots \otimes 1)$. Insbesondere ist der Faktor $\sum_{k=1}^{n} \tilde{d}^k$ eindeutig, sodass wir als k-Vektorraum jedes ω^m mit D identifizieren können.

Wir stellen im Folgenden jedes $x \in \omega^m$ dar als $x = d_x \cdot (1 \otimes \cdots \otimes 1)$ mit dem eindeutig durch x bestimmten $d_x \in D$. Wir definieren eine Abbildung

$$\Phi : \ \Omega \longrightarrow D[[T; \tau^{-1}]]$$

durch

$$(d_0, d_1 \cdot 1, d_2 \cdot (1 \otimes 1), d_3 \cdot (1 \otimes 1 \otimes 1), \cdots) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} d_n T^n \, ,$$

und zeigen, dass es sich hierbei um einen Isomorphismus von k-Algebren handelt.

Zunächst ist Φ nach der Definition der Addition und der skalaren Multiplikation in Ω bzw. $D[[T; \tau^{-1}]]$ offenbar eine k-lineare Abbildung. Ferner ist sie trivialerweise surjektiv und es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \Phi &= \{(d_0, d_1 \cdot 1, d_2 \cdot (1 \otimes 1), d_3 \cdot (1 \otimes 1 \otimes 1), \cdots) \in \Omega \mid \sum_{n=0}^{\infty} d_n T^n = 0\} \\ &= \{(d_0, d_1 \cdot 1, d_2 \cdot (1 \otimes 1), d_3 \cdot (1 \otimes 1 \otimes 1), \cdots) \in \Omega \mid d_n = 0, \, \forall n \in \mathbb{N}_0\} \\ &= 0 \, , \end{aligned}$$

sodass sie auch ein Monomorphismus ist. Es bleibt $\Phi(x_1 \cdot x_2) = \Phi(x_1) \cdot \Phi(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \Omega$ zu zeigen.

Seien also

$$a = (a_0, a_1 \cdot 1, a_2 \cdot (1 \otimes 1), a_3 \cdot (1 \otimes 1 \otimes 1), \cdots)$$

und

$$b = (b_0, b_1 \cdot 1, b_2 \cdot (1 \otimes 1), b_3 \cdot (1 \otimes 1 \otimes 1), \cdots)$$

aus Ω. Dann haben wir für $k', l' > 0$ die Beziehungen

$$\psi_{0,l'}(a_0, b_{l'} \cdot (1 \otimes \cdots \otimes 1)) = (a_0 b_{l'}) \cdot (1 \otimes \cdots \otimes 1),$$

$$\begin{aligned}
\psi_{k',0}(a_{k'} \cdot (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes 1), b_0) &= a_{k'} \cdot (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes 1) \cdot b_0 \\
&= a_{k'} \cdot (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes b_0) \\
&= a_{k'} \cdot (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \tau^{-1}(b_0) \cdot 1) \\
&= a_{k'} \cdot (1 \otimes \cdots \otimes \tau^{-1} b_0 \otimes 1) \\
&= \cdots \\
&= (a_{k'} \tau^{-k'}(b_0)) \cdot (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes 1) \text{ , sowie}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{k',l'}(a_{k'} \cdot (1 \otimes \cdots \otimes 1), b_{l'} \cdot (1 \otimes \cdots \otimes 1)) &= a_{k'} \cdot (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes b_{l'} \cdot 1 \otimes \cdots \otimes 1) \\
&= \cdots \\
&= (a_{k'} \tau^{-k'}(b_{l'})) \cdot (1 \otimes \cdots \otimes 1) .
\end{aligned}$$

Aus diesen schließen wir

$$\begin{aligned}
\Phi(a \cdot b) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \tau^{-k}(b_{n-k}) \right) T^n \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n T^n \right) \\
&= \Phi(a) \cdot \Phi(b) .
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Aus diesem Lemma zusammen mit Lemma 4.2 ergibt sich:

Folgerung 4.7. *Die Algebra Ω aus* (4.19) *ist ein vollständiger Hauptidealring. Darüber hinaus gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$:*

$$\operatorname{rad}^k \Omega = \prod_{m=k}^{\infty} \omega^m \quad .$$

Wir werden nun zum Abschluss dieses Abschnitts zeigen, dass die Algebra $\mathcal{H}$, welche die homogene Röhre $\mathcal{T}$ charakterisiert, isomorph ist zur Algebra Ω. Hieraus folgt mit Lemma 4.6 das Hauptergebnis dieser Arbeit. Wir verwenden dazu eine Konstruktion, welche Gabriel in [10, 8.4] beschreibt. Wir haben im Vorangegangenen gesehen, dass wir für jedes $n \geq 2$ eine direkte Summenzerlegung

$$\operatorname{End}_A(S[n]) = B'_n \oplus pr_n(E) \oplus \operatorname{rad}^2 \operatorname{End}_A(S[n]) \tag{4.20}$$

in D-D-Bimoduln haben, und die Einschränkung der $\tilde{p}_n$ auf B'_{n+1} bzw. $pr_{n+1}(E)$ als D-D-Bimodulisomorphismus wirkt. Ferner haben wir $B'_n \cong D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \cong \operatorname{rad}\operatorname{End}_A(S[n])/\operatorname{rad}^2\operatorname{End}_A(S[n])$ für alle $n \geq 2$. Da weiterhin unter dem kanonischen Epimorphismus $\operatorname{rad}\operatorname{End}_A(S[n]) \longrightarrow \operatorname{rad}\operatorname{End}_A(S[n])/\operatorname{rad}^2\operatorname{End}_A(S[n])$ der Unterbimodul $pr_n(E)$ isomorph auf $\operatorname{rad}\operatorname{End}_A(S[n])/\operatorname{rad}^2\operatorname{End}_A(S[n])$ abgebildet wird, haben wir auch $\omega \cong pr_n(E)$ als Isomorphie von D-D-Bimoduln. Wenn wir uns nun zwei D-D-Bimodulisomorphismen

$$\chi_1^n;\ D \xrightarrow{\sim} B'_n \tag{4.21}$$

und

$$\chi_2^n;\ \omega \xrightarrow{\sim} pr_n(E) \tag{4.22}$$

vorgeben, so dehnen sich diese aus zu einem Epimorphismus $\Psi^n_{(\chi_1^n,\chi_2^n)}:\ \Omega \longrightarrow \operatorname{End}_A(S[n])$ von k-Algebren. Hierbei wirkt $\Psi^n_{(\chi_1^n,\chi_2^n)}$ durch

$$\Psi^n_{(\chi_1^n,\chi_2^n)}((d, x_1^1, x_1^2 \otimes x_2^2, x_1^3 \otimes x_2^3 \otimes x_3^3, \cdots)) := \chi_1^n(d) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\chi_2^n(x_k^n)\right). \tag{4.23}$$

Man beachte, dass wegen $\operatorname{rad}^n\operatorname{End}_A(S[n]) = 0$ die Summe auf der rechten Seite nur endlich viele Nicht-Null-Summanden besitzt, sodass $\Psi^n_{(\chi_1^n,\chi_2^n)}$ wohldefiniert ist. Die Tatsache, dass dies wirklich ein Epimorphismus ist, folgt daraus, dass sich jedes f aus $\operatorname{End}_A(S[n])$ schreiben lässt als Summe von Produkten von Elementen aus B'_n und $pr_n(E)$. Dies lässt sich analog zeigen wie etwa in [1, II, 3.3(a)].

Weiterhin ergibt sich mit Folgerung 4.7, dass $\operatorname{Ker}\Psi^n_{(\chi_1^n,\chi_2^n)} = \prod_{m=n}^{\infty}\omega^m$ gilt. Da es außerdem einen trivialen Algebrenepimorphismus von Ω auf $\operatorname{End}_A(S[1]) = D$ mit Kern $\prod_{m=1}^{\infty}\omega^m$ gibt, erhalten wir eine Familie von Algebrenisomorphismen $\tilde{\Psi}^n_{(\chi_1^n,\chi_2^n)}$. Für $n = 1$ ist dieser nur abhängig von χ_1^n, da es in diesem Fall keinen Isomorphismus χ_2^n gibt. Wir schreiben in diesem Ausnahmefall $\tilde{\Psi}^1_{\chi_1^1}$ statt $\tilde{\Psi}^1_{(\chi_1^1,\chi_2^1)}$. Wir veranschaulichen die Situation in einem Digramm auf der nachfolgenden Seite.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}_A(S[1]) & \Omega/\prod_{m=1}^{\infty}\omega^m \arrow[l, "\tilde{\Psi}^1_{\chi_1^1}"', "\sim"] \\
\mathrm{End}_A(S[2]) \arrow[u, "\tilde{p}_1"] & \Omega/\prod_{m=2}^{\infty}\omega^m \arrow[l, "\tilde{\Psi}^2_{(\chi_1^2,\chi_2^2)}"', "\sim"] \arrow[u, "\kappa_1"'] \\
\mathrm{End}_A(S[3]) \arrow[u, "\tilde{p}_2"] & \Omega/\prod_{m=3}^{\infty}\omega^m \arrow[l, "\tilde{\Psi}^3_{(\chi_1^3,\chi_2^3)}"', "\sim"] \arrow[u, "\kappa_2"'] \\
\mathrm{End}_A(S[4]) \arrow[u, "\tilde{p}_3"] & \Omega/\prod_{m=4}^{\infty}\omega^m \arrow[l, "\tilde{\Psi}^4_{(\chi_1^4,\chi_2^4)}"', "\sim"] \arrow[u, "\kappa_3"'] \\
\vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u]
\end{tikzcd} \tag{4.24}$$

Hierbei sind die $\kappa_n : \ \Omega/\prod_{m=n+1}^{\infty}\omega^m \longrightarrow \Omega/\prod_{m=n}^{\infty}\omega^m$ gegeben durch

$$x + \prod_{m=n+1}^{\infty}\omega^m \mapsto x + \prod_{m=n}^{\infty}\omega^m.$$

Es ist zu beachten, dass das Diagramm (4.24) a priori nicht kommutativ sein muss. Wir werden nun allerdings die χ_1^n und χ_2^n so wählen, dass es kommutativ wird. Dazu benutzen wir die D-D-Bimodulisomorphismen $\tilde{p}'_n : \ B'_{n+1} \longrightarrow B'_n$ und $\tilde{p}''_n : \ pr_{n+1}(E) \longrightarrow pr_n(E)$. Wir geben uns zunächst zwei beliebige D-D-Bimodulisomorphismen $\chi_1^1; \ D \xrightarrow{\sim} B'_1 = D$ und $\chi_2^2; \ \omega \xrightarrow{\sim} pr_2(E)$ vor. Mit diesen definieren wir induktiv:

$$\chi_1^{n+1} := \tilde{p}_n^{\prime -1} \circ \chi_1^n \text{ , und} \tag{4.25}$$

$$\chi_2^{n+1} := \tilde{p}_n^{\prime\prime -1} \circ \chi_2^n \, . \tag{4.26}$$

Wir zeigen, dass mit den so definierten χ_1^n und χ_2^n für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Beziehung $\tilde{\Psi}^m_{(\chi_1^m,\chi_2^m)} \circ \kappa_m = \tilde{p}_m \circ \tilde{\Psi}^{m+1}_{(\chi_1^{m+1},\chi_2^{m+1})}$ gilt.

Seien hierzu $m \in \mathbb{N}$ und $x = (d, x_1^1, x_1^2 \otimes x_2^2, x_1^3 \otimes x_2^3 \otimes x_3^3, \cdots) \in \Omega$ beliebig. Dann haben wir mit den Formeln (4.23) und (4.25), sowie (4.26):

$$
\begin{aligned}
(\tilde{p}_m \circ \tilde{\Psi}^{m+1}_{(\chi_1^{m+1},\chi_2^{m+1})})(x + \prod_{k=m+1}^{\infty} \omega^k) &= \tilde{p}_m \left(\chi_1^{m+1}(d) + \sum_{n=1}^{m} \left(\prod_{k=1}^{n} \chi_2^{m+1}(x_k^n) \right) \right) \\
&= (\tilde{p}'_m \circ \chi_1^{m+1})(d) + \sum_{n=1}^{m} \left(\prod_{k=1}^{n} (\tilde{p}''_m \circ \chi_2^{m+1})(x_k^n) \right) \\
&= \chi_1^m(d) + \sum_{n=1}^{m-1} \left(\prod_{k=1}^{n} \chi_2^m(x_k^n) \right) \\
&= \tilde{\Psi}^m_{(\chi_1^m,\chi_2^m)}(x + \prod_{k=m}^{\infty} \omega^k) \\
&= (\tilde{\Psi}^m_{(\chi_1^m,\chi_2^m)} \circ \kappa_m)(x + \prod_{k=m+1}^{\infty} \omega^k)\,.
\end{aligned}
$$

Dies gilt insbesondere auch für $m = 1$, da $\tilde{p}_1$ auf $pr_2(E)$ die Nullabbildung ist. Somit haben wir gezeigt, dass das Diagramm (4.24) durch geeignete Wahl der χ_1^n und χ_2^n kommutativ gemacht werden kann. In diesem Fall haben wir im Sinne von Lemma 3.17 eine Abbildung zwischen zwei inversen Systemen von Algebren. Wir erhalten nach selbigem Lemma damit:

$$
\mathcal{H} = \varprojlim_n \operatorname{End}_A(S[n]) \cong \varprojlim_n \Omega / \prod_{m=n}^{\infty} \omega^m\,. \tag{4.27}
$$

Dies führt uns unmittelbar auf das Hauptresultat dieser Arbeit.

Theorem 4.8. *Sei A eine zahm-erbliche k-Algebra über einem vollkommenen Körper k und $\mathcal{T}$ eine homogene Röhre in $\Gamma(\operatorname{mod} A)$. Seien weiter $S[1]$ der einfach reguläre Modul aus $\mathcal{T}$, D seine Endomorphismenalgebra, und τ wie in* (4.5). *Ist $\mathcal{H}$ der inverse Limes des Systems* (3.11), *so gibt es einen Isomorphismus*

$$
\mathcal{H} \cong D[[T;\tau^{-1}]]
$$

von k-Algebren.

Beweis. Wir haben nach (4.27) einen Isomorphismus $\mathcal{H} \cong \varprojlim_n \Omega / \prod_{m=n}^{\infty} \omega^m$. Da nach Folgerung 4.7 die Algebra Ω vollständig ist, und $\prod_{m=n}^{\infty} \omega^m = \operatorname{rad}^n \Omega$ gilt, ergibt sich $\varprojlim_n \Omega / \prod_{m=n}^{\infty} \omega^m \cong \Omega$. Es bleibt Lemma 4.6 anzuwenden, um den Isomorphismus $\mathcal{H} \cong D[[T;\tau^{-1}]]$ zu erhalten. □

Im Fall, dass k algebraisch abgeschlossen ist, gilt $D = k$. Ferner wirkt τ und somit τ^{-1} auf k als identische Abbildung. Somit erhalten wir insbesondere, dass $\mathcal{H}$ für algebraisch abgeschlossene Skalarkörper k isomorph zum formalen Potenzreihenring $k[[T]]$ ist.

Wir haben bis zu diesem Punkt auf einer relativ abstrakten Ebene mit den Endomorphismenalgebren der Moduln $S[n]$ aus der Röhre $\mathcal{T}$ gearbeitet. Für viele Rechnungen ist es allerdings hilfreich, etwas über das konkrete Aussehen der Endomorphismen aus $\operatorname{End}_A(S[n])$ zu wissen. Wir haben mit dem Theorem 4.8 ein Hilfsmittel in der Hand, um diese durch den Übergang zu einem konkreten System von endlichdimensionalen $D[[T;\tau^{-1}]]$-Moduln näher zu bestimmen. Wir werden im letzten Abschnitt der Arbeit ein solches System konstruieren und die Endomorphismen der unzerlegbaren Moduln darin berechnen. Wir halten uns dabei an die Notationen von Gabriel in [10, 7.4].

Bemerkung 4.9. Es fällt auf, dass in allen vorangegangenen Betrachtungen das konkrete Aussehen der irreduziblen Morphismen $p_n : \ [n+1] \longrightarrow S[n]$ keine Rolle gespielt hat. Es war lediglich wichtig, dass es irreduzible Morphismen waren, und die Beziehung (3.4) galt. Dies zeigt insbesondere, dass der inverse Limes $\mathcal{H} = \varprojlim_n \operatorname{End}_A(S[n])$ in diesem Sinne von der konkreten Wahl der irreduziblen p_n (und damit auch von den sich daraus ergebenden $\tilde{p}_n$) unabhängig ist.

4.2 Kleine Darstellungen

Wir werden wie bereits angekündigt in diesem Abschnitt eine Klasse von Darstellungen kennen lernen, welche den unzerlegbaren $\mathcal{H}$-Moduln eine konkrete Struktur gibt, und die es damit ermöglicht, deren Endomorphismenräume direkt auszurechnen. Wir werden im Sinne von Theorem 4.8 und Lemma 4.6 im Folgenden die Algebra $\mathcal{H}$ mit $D[[T;\tau^{-1}]]$ bzw. Ω identifizieren.

Sei uns ein endlichdimensionaler, unzerlegbarer Ω-Modul M gegeben. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $M \operatorname{rad}^n \Omega = 0$ ist, sodass insbesondere die Abbildung

$$M \otimes_D \omega^n \longrightarrow M\ ,\ m \otimes (d_1 \otimes \cdots \otimes d_n) \mapsto m \cdot (d_1 \otimes \cdots \otimes d_n)\,, \tag{4.28}$$

gleich der Nullabbildung ist. Wir können nun, wie in Abschnitt 1.3 beschrieben, der Abbildung

$$M \otimes_D \omega \longrightarrow M\ ,\ m \otimes w \mapsto m \cdot w,$$

welche uns die Modulstruktur von M_Ω definiert, eine duale Abbildung

$$\phi : \ M \longrightarrow M \otimes_D \operatorname{Ext}^1_A(S[1], S[1])$$

zuordnen. Man beachte hierzu, dass nach (4.13) und der Definition von ω die Beziehung $\mathrm{Hom}_D(\omega, D) \cong \mathrm{Ext}^1_A(S[1], S[1])$ gilt. Wir setzen im Folgenden der Einfachheit halber $\mathcal{E} := \mathrm{Ext}^1_A(S[1], S[1])$. Die Tatsache, dass (4.28) die Nullabbildung ist, übersetzt sich damit so, dass die Hintereinanderausführung

$$M \xrightarrow{\phi} M \otimes_D \mathcal{E} \xrightarrow{\phi \otimes 1} M \otimes_D \mathcal{E} \otimes_D \mathcal{E} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M \otimes_D \underbrace{\mathcal{E} \otimes_D \cdots \otimes_D \mathcal{E}}_{n \text{ Faktoren}} \tag{4.29}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ gleich der Nullabbildung ist. Wie in Abschnitt 1.2 beschrieben können wir das Paar (M, ϕ) als eine Darstellung der Gattung

$$\begin{tikzcd} {}_D\bullet \arrow[loop right, "\mathcal{E}"] \end{tikzcd} \tag{4.30}$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass die Hintereinanderausführung (4.29) Null ist, auffassen. Wir nennen eine solche Darstellung eine **kleine Darstellung**. Es sei bemerkt, dass man die Gattung (4.30) auch Gattung der Kategorie mod Ω nennt.

Ist uns umgekehrt eine kleine Darstellung (N, ψ) von (4.30) gegeben, so können wir diese zu einem endlichdimensionalen Ω-Modul machen, indem wir für $x \in N$ und $d \in D$ zunächst $x \cdot d := xd$ setzen, und für die Definition der Rechtsmultiplikation mit Elementen aus ω wieder die zu ψ duale Abbildung

$$N \otimes_D \omega \longrightarrow N$$

benutzen. Diese setzt sich für jedes $m \in \mathbb{N}$ zu einer Abbildung

$$N \otimes_D \underbrace{\omega \otimes_D \cdots \otimes_D \omega}_{m \text{ Faktoren}} \longrightarrow N \tag{4.31}$$

fort. Damit erhalten wir eine Modulstruktur $N \times \Omega \longrightarrow N$ auf N. Die Tatsache, dass (4.29) die Nullabbildung ist, geht darin über, dass für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ die Abbildung (4.31) für alle $m \geq n_0$ verschwindet, sodass N von $\mathrm{rad}^{n_0} \Omega$ annuliert wird und N damit ein eindlichdimensionaler Ω-Modul ist. Auf diese Weise können wir eine Äquivalenz zwischen der Kategorie mod Ω und der Kategorie der kleinen Darstellungen von (4.30) erhalten.

Wir werden nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine über D n-dimensionale, unzerlegbare kleine Darstellung $V_n = (D^n, \phi^n)$ angeben. Diese wird gerade dem regulären A-Modul $S[n]$ entsprechen. Im Anschluss werden wir deren Endomorphismen berechnen und jeweils eine Familie irreduzibler Morphismen $\{p_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ und $\{\iota_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ angeben. Schließlich bestimmen wir damit den induzierten inversen Limes der Endomorphismenalgebren der kleinen Darstellungen, und werden wieder das Ergebnis aus Theorem 4.8 erhalten.

Wir benötigen zunächst eine kleine Vorbetrachtung. Zur Konstruktion der V_n verwenden wir, dass es einen natürlichen Isomorphismus $D^n \otimes_D \mathcal{E} \cong (D \otimes_D \mathcal{E})^n$ gibt. Damit ist es nur noch notwendig, den Modul $D \otimes_D \mathcal{E}$ genauer zu kennen. Da sowohl D als auch $\mathcal{E}$ eindimensionale D-D-Bimoduln sind, wird auch $D \otimes_D \mathcal{E}$ ein eindimensionaler D-D-Bimodul sein. Wir wissen ferner aus Abschnitt 2.2, dass wir $\mathcal{E}$ sowohl als $D\mu$ als auch als μD schreiben können, wobei μ eine Auslander-Reiten-Folge ist, welche in $S[1]$ endet. Es gilt nach Theorem 2.12 zusätzlich noch $\tau(d) \cdot \mu = \mu \cdot d$ für alle $d \in D$.

Wir können damit jedes $x \in D \otimes_D \mathcal{E}$ schreiben als $x = f_x \otimes \mu$ mit einem eindeutig durch x bestimmten $f_x \in D$. Ist $d \in D$ beliebig, so gilt weiter:

$$\begin{aligned} d \cdot (f_x \otimes \mu) &= (df_x) \otimes \mu \text{ , sowie} \\ (f_x \otimes \mu) \cdot d &= f_x \otimes (\mu \cdot d) \\ &= f_x \otimes (\tau(d) \cdot \mu) \\ &= (f_x \tau(d)) \otimes \mu \,. \end{aligned}$$

Damit können wir mit derselben Bezeichnung wie aus dem vorangegangenen Abschnitt den Bimodul $D \otimes_D \mathcal{E}$ schreiben als ${}_D D_{\tau(D)}$. Wir werden im Folgenden Matrizen der Form

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

verwenden. Diese sollen auf einen Vektor $\bar{d} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_m \end{bmatrix}^T$ durch die Vorschrift

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{m-1} \\ d_m \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \tau(d_2) \\ \tau(d_3) \\ \vdots \\ \tau(d_m) \\ 0 \end{bmatrix}$$

wirken. Wir definieren nun die kleinen Darstellungen $V_n = (D^n, \phi^n)$ durch die rechten D-Homomorphismen

$$\phi_1 := 0 \qquad : \ D \longrightarrow {}_D D_{\tau(D)} \text{ , und} \tag{4.32}$$

$$\phi_n := \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \qquad : \ D^n \longrightarrow ({}_D D_{\tau(D)})^n \tag{4.33}$$

für $n > 1$. Wir zeigen, dass es sich tatsächlich um rechte D-Homomorphismen handelt. Da dies für $n = 1$ klar ist, sei nun $n \geq 2$ und seien $\bar{d} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_n \end{bmatrix}^T$ und $d \in D$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \cdot d \right) &= \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 d \\ d_2 d \\ \vdots \\ d_{n-1} d \\ d_n d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \tau(d_2 d) \\ \tau(d_3 d) \\ \vdots \\ \tau(d_n d) \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \tau(d_2) \\ \tau(d_3) \\ \vdots \\ \tau(d_n) \\ 0 \end{bmatrix} \tau(d) \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \right) \tau(d) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \right) \cdot d \,.
\end{aligned}$$

Da die ϕ_n außerdem nilpotent sind, ist uns damit tatsächlich jeweils eine kleine Darstellung $V_n = (D^n, \phi^n)$ gegeben. Wir machen uns nun daran, die Endomorphismen der V_n zu berechnen. Dazu rekapitulieren wir aus Abschnitt 1.3, dass ein Endomorphismus von V_n gegeben ist durch eine D-lineare Abbildung $\alpha^n = (\alpha^n_{i,j})^n_{i,j=1} : \; D^n \longrightarrow D^n$, für welche

$$\phi^n \alpha^n = (\alpha^n \otimes 1)\phi^n \tag{4.34}$$

gilt. Sei $\bar{e}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$ der i-te Einheitsvektor aus D^n. Dann liefert (4.34) folgendes:

$$
\begin{aligned}
&(\phi^n \circ \alpha^n)(\bar{e}_i) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^n_{1,1} & \alpha^n_{1,2} & \alpha^n_{1,3} & \cdots & \alpha^n_{1,n-1} & \alpha^n_{1,n} \\ \alpha^n_{2,1} & \alpha^n_{2,2} & \alpha^n_{2,3} & & \alpha^n_{2,n-1} & \alpha^n_{2,n} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \alpha^n_{n-1,1} & \alpha^n_{n-1,2} & \alpha^n_{n-1,3} & \cdots & \alpha^n_{n-1,n-1} & \alpha^n_{n-1,n} \\ \alpha^n_{n,1} & \alpha^n_{n,2} & \alpha^n_{n,3} & \cdots & \alpha^n_{n,n-1} & \alpha^n_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \bar{e}_i \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{1,i} \\ \alpha_{2,i} \\ \vdots \\ \alpha_{n-1,i} \\ \alpha_{n,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau(\alpha^n_{2,i}) \\ \tau(\alpha^n_{3,i}) \\ \vdots \\ \tau(\alpha^n_{n,i}) \\ 0 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} \alpha^n_{1,i-1} \\ \alpha^n_{2,i-1} \\ \vdots \\ \alpha^n_{n-1,i-1} \\ \alpha^n_{n,i-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha^n_{1,1} & \alpha^n_{1,2} & \alpha^n_{1,3} & \cdots & \alpha^n_{1,n-1} & \alpha^n_{1,n} \\ \alpha^n_{2,1} & \alpha^n_{2,2} & \alpha^n_{2,3} & & \alpha^n_{2,n-1} & \alpha^n_{2,n} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \alpha^n_{n-1,1} & \alpha^n_{n-1,2} & \alpha^n_{n-1,3} & \cdots & \alpha^n_{n-1,n-1} & \alpha^n_{n-1,n} \\ \alpha^n_{n,1} & \alpha^n_{n,2} & \alpha^n_{n,3} & \cdots & \alpha^n_{n,n-1} & \alpha^n_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \bar{e}_{i-1} \\
&= ((\alpha^n \otimes 1) \circ \phi^n)(\bar{e}_i)\,.
\end{aligned}
$$

Hier haben wir $\tau(1) = 1$ verwendet. Es folgen durch sukzessive Auswertung der mittleren Gleichung für $i = 1, \cdots, n$ nun die Beziehungen

$$\alpha^n_{k,l} = 0 \text{ für } k > l \text{ , und} \tag{4.35}$$

$$\alpha^n_{k+1,l+1} = \tau^{-1}(\alpha^n_{k,l}) \text{ für } 1 \leq k \leq l \leq n-1\,. \tag{4.36}$$

Hiermit ergibt sich aus (4.35) und (4.36) für α^n folgende Struktur:

$$\alpha^n = \begin{bmatrix} \alpha^n_{1,1} & \alpha^n_{1,2} & \alpha^n_{1,3} & \cdots & \alpha^n_{1,n-1} & \alpha^n_{1,n} \\ 0 & \tau^{-1}(\alpha^n_{1,1}) & \tau^{-1}(\alpha^n_{1,2}) & \cdots & \tau^{-1}(\alpha^n_{1,n-2}) & \tau^{-1}(\alpha^n_{1,n-1}) \\ 0 & 0 & \tau^{-2}(\alpha^n_{1,1}) & \cdots & \tau^{-2}(\alpha^n_{1,n-3}) & \tau^{-2}(\alpha^n_{1,n-2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tau^{-(n-1)}(\alpha^n_{1,1}) \end{bmatrix}\,. \tag{4.37}$$

Mit dieser Darstellung sieht man unmittelbar, dass es in $\mathrm{End}(V_n)$ keine von Null und Eins verschiedenen Idempotenten gibt. Deshalb sich die kleinen Darstellungen V_n unzerlegbar.

Wir definieren nun für jedes $n \in \mathbb{N}$, $a \in D$ und $k \in \{0, \cdots, n-1\}$ einen Endomorphismus aJ^n_k von V_n durch

$$aJ_k^n := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \tau^{n-1}(a) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \tau^{n-2}(a) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \tau^{n-3}(a) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \ddots & & \vdots \end{bmatrix}. \tag{4.38}$$

Hierbei steht das Element $\tau^{n-1}(a)$ in der ersten Zeile und $(k+1)$-ten Spalte. Die Auswahl dieser Endomorphismen mag zunächst nicht intuitiv erscheinen, aber wir werden gleich begründen, warum sie sich als geeignet herausstellt. Dazu betrachten wir noch einmal die kleine Darstellung $V_n = (D^n, \phi^n)$. Man sieht unschwer, dass das Radikal von V_n der Unterraum $D \oplus \cdots \oplus D \oplus 0$ mit der entsprechenden Einschränkung von ϕ^n auf diesen ist. Analog ist der Sockel von V_n gerade $D \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0$ mit der zugehörigen Einschränkung von ϕ^n darauf.

Somit können wir für die irreduziblen Morphismen $\iota_n : V_n \longrightarrow V_{n+1}$ bzw. $p_n : V_{n+1} \longrightarrow V_n$ folgende verschobene Einheitsmatrizen nehmen:

$$\iota_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(n+1)\times n} \qquad p_n := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n\times(n+1)} . \tag{4.39}$$

Für diese gelten die Beziehungen $p_1\iota_1 = 0$ und $p_n\iota_n = \iota_{n-1}p_{n-1}$ für $n \geq 2$, sodass diese ι_n und p_n die Relationen aus (3.4) erfüllen. Wir wollen nun die von den p_n induzierten Einschränkungsepimorphismen $\tilde{p}_n : \operatorname{End}(V_{n+1}) \longrightarrow \operatorname{End}(V_n)$ bestimmen. Diese sind durch ein kommutatives Diagramm (3.6) gegeben. Seien nun

$$\alpha^{n+1} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}^{n+1} & \alpha_{1,2}^{n+1} & \alpha_{1,3}^{n+1} & \cdots & \alpha_{1,n}^{n+1} & \alpha_{1,n+1}^{n} \\ \alpha_{2,1}^{n+1} & \alpha_{2,2}^{n+1} & \alpha_{2,3}^{n+1} & & \alpha_{2,n}^{n+1} & \alpha_{2,n+1}^{n+1} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \alpha_{n,1}^{n+1} & \alpha_{n,2}^{n+1} & \alpha_{n,3}^{n+1} & \cdots & \alpha_{n,n}^{n+1} & \alpha_{n,n+1}^{n+1} \\ \alpha_{n+1,1}^{n+1} & \alpha_{n+1,2}^{n+1} & \alpha_{n+1,3}^{n+1} & \cdots & \alpha_{n+1,n}^{n+1} & \alpha_{n+1,n+1}^{n+1} \end{bmatrix}$$

ein Endomorphismus von V_{n+1} und

$$\tilde{p}_n(\alpha^{n+1}) = \begin{bmatrix} \beta^n_{1,1} & \beta^n_{1,2} & \beta^n_{1,3} & \cdots & \beta^n_{1,n-1} & \beta^n_{1,n} \\ \beta^n_{2,1} & \beta^n_{2,2} & \beta^n_{2,3} & & \beta^n_{2,n-1} & \beta^n_{2,n} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \beta^n_{n-1,1} & \beta^n_{n-1,2} & \beta^n_{n-1,3} & \cdots & \beta^n_{n-1,n-1} & \beta^n_{n-1,n} \\ \beta^n_{n,1} & \beta^n_{n,2} & \beta^n_{n,3} & \cdots & \beta^n_{n,n-1} & \beta^n_{n,n} \end{bmatrix}$$

seine Einschränkung aus V_n mittels $\tilde{p}_n$. Aus der Forderung $p_n\alpha^{n+1} = \tilde{p}_n(\alpha^{n+1})p_n$ ergibt sich $\beta^n_{i,j} = \alpha^{n+1}_{i+1,j+1}$ für alle $i, j \in \{1, \cdots, n\}$. Damit erhalten wir die Einschränkung von α^{n+1} mittels $\tilde{p}_n$ dadurch, dass wir die erste Spalte und die erste Zeile von α^{n+1} löschen. Analog ergibt sich die Einschränkung mittels der $\tilde{\iota}_n$ dadurch, dass wir die letzte Zeile und die letzte Spalte von α^{n+1} löschen.

Sei uns nun ein beliebiges $\alpha^n \in \mathrm{End}(V_n)$ gegeben. Aus der Darstellung (4.37) und der Definition der aJ^n_k in (4.38) und der Tatsache, dass τ ein Automorphismus von D ist, folgt, dass wir α^n auf eindeutige Weise schreiben können als

$$\alpha^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^n_k \tag{4.40}$$

mit gewissen $a_k \in D$. Aus der Definition der $a_k J^n_k$ und der gerade erläuterten Wirkung von $\tilde{p}_{n-1}$ folgen für $n \geq 2$ die Beziehungen $\tilde{p}_{n-1}(a_{n-1}J^n_{n-1}) = 0$, sowie $\tilde{p}_{n-1}(a_k J^n_k) = a_k J^{n-1}_k$ für $0 \leq k \leq n-2$. Damit ergibt sich

$$\tilde{p}_{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^n_k\right) = \sum_{k=0}^{n-2} a_k J^{n-1}_k \,. \tag{4.41}$$

Wir wollen nun abschließend den inversen Limes $\mathcal{V} := \underset{\underset{n}{\longleftarrow}}{lim}\ \mathrm{End}(V_n)$ berechnen. Für jedes Element $\bar{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4, \cdots) \in \mathcal{V}$ sind die f_n Endomorphismen von V_n, welche die Beziehung $\tilde{p}_n(f_{n+1}) = f_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, erfüllen. Nach (4.40) können wir jedes f_n als eine Art Polynom mit Koeffizienten in D schreiben. Die Wirkung der $\tilde{p}_n$ auf diese ist nach (4.41) ebenfalls trivial. Damit können wir jedes $\bar{f} \in \mathcal{V}$ schreiben als eine formale Potenzreihe

$$\bar{f} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m T^m \quad ,$$

und wir setzen $f_n := \sum_{m=0}^{n-1} a_m J^n_m$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da die Addition und skalare Multiplikation komponentenweise die Addition bzw. skalare Multiplikation in D sind, müssen wir nur noch die Wirkung der Multiplikation in $\mathcal{V}$ klären. Seien dazu $\bar{f} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m T^m$ und $\bar{g} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m T^m$ aus $\mathcal{V}$ beliebig. Um die Multiplikation zu untersuchen, schauen wir uns an, was auf Ebene der V_n passiert: Es gilt $f_n \cdot g_n = \left(\sum_{m=0}^{n-1} a_m J_m^n\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{n-1} b_m J_m^n\right)$. Wir berechnen das Produkt $a_k J_k^n \cdot b_l J_l^n$ für beliebige $0 \leq k, l, \leq n-1$. Ist hierbei $k + l \geq n$, so ist das Produkt Null. Seien also nun $k + l < n$. Dann haben wir:

$$
\begin{aligned}
&a_k J_k^n \cdot b_l J_l^n \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \overbrace{\tau^{n-1}(a)}^{k+1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tau^{n-2}(a) & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \tau^{n-3}(a) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \overbrace{\tau^{n-1}(b)}^{l+1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tau^{n-2}(b) & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \tau^{n-3}(b) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \overbrace{\tau^{n-1}(a)\tau^{n-1-k}(b)}^{k+l+1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tau^{n-2}(a)\tau^{n-2-k}(b) & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \tau^{n-3}(a)\tau^{n-3-k}(b) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \overbrace{\tau^{n-1}(a\tau^{-k}(b))}^{k+l+1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tau^{n-2}(a\tau^{-k}(b)) & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \tau^{n-3}(a\tau^{-k}(b)) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} \\
&= (a\tau^{-k}(b))J_{k+l}^n \,.
\end{aligned}
$$

Dies ergibt auf Ebene des inversen Limes $\mathcal{V}$ die Rechenregel

$$a_k T^k \cdot b_l T^l = (a\tau^{-k}(b))T^{k+l} \tag{4.42}$$

für alle $k, l \geq 0$. Da sich dies mittels Distributivität auf $\bar{f}$ und $\bar{g}$ fortsetzen lässt, erkennen wir $\mathcal{V}$ als den Schief-Potenzreihenring $D[[T; \tau^{-1}]]$, welchen wir schon in Theorem 4.8 erhalten haben. Dies ist noch einmal eine Bestätigung von Bemerkung 4.9, da wir hier bei den kleinen Darstellungen sehr spezielle Homomorphismen für die p_n verwendet haben.

4.3 Abschließende Bemerkungen

Wir haben im Abschnitt 4.1 die innere Struktur der Algebra $\mathcal{H}$ nur unter der Voraussetzung beschreiben können, dass der Körper k ein vollkommener Körper ist. Diese Zusatzbedingung ermöglichte es uns, die zunächst allgemeine Struktur der $\mathrm{End}_A(S[n])$ mit einem konkreten Referenzobjekt, der Algebra Ω, in Beziehung zu setzen. Es wäre wünschenswert, wenn man Theorem 4.8 auch ohne die Zusatzforderung an k zeigen könnte. Wir hatten in Abschnitt 4.2 die kleinen Darstellungen kennen gelernt, welche in engem Zusammenhang zur Algebra $\mathcal{H}$ stehen sollten, und welche sich vielleicht in ähnlicher Weise zur Konstruktion eines Isomorphismus $\mathcal{H} \cong D[[T;\tau^{-1}]]$ für beliebige Körper k nutzen lassen sollten. Es ist an dieser Stelle allerdings nicht klar, wie man eine Beziehung zwischen der Kategorie der kleinen Darstellungen von (4.30) und der Kategorie mod $\mathcal{H}$ herstellen kann, welche Aussagen über eine eventuelle Isomorphie von $\mathcal{H}$ und $D[[T;\tau^{-1}]] \cong \varprojlim_n \mathrm{End}(V_n)$ im allgemeinen Fall zulässt. Das Hauptproblem scheint hierbei zu sein, dass man keine geeigneten Ringhomomorphismen $\varprojlim_n \mathrm{End}(V_n) \longrightarrow \mathrm{End}_A(S[n])$ finden kann, wie dies unter der Zusatzannahme, dass k vollkommen ist, in (4.23) möglich war. Damit bleibt die Frage nach der Gültigkeit von Theorem 4.8 für allgemeine Körper k offen, wobei die Vermutung besteht, dass sich auch in diesem Fall ein Isomorphismus $\mathcal{H} \cong D[[T;\tau^{-1}]]$ finden lässt.

Eine weitere interessante Fragestellung, welche im Rahmen der Arbeit aufgetreten ist, ist die Frage danach, ob es einen Zusammenhang zwischen den Autoäquivalenzen der Kategorie $add(\mathcal{T})$ und den Automorphismen der k-Divisionsalgebra D, welche auf dem Unterkörper $k = k \cdot 1_D$ die Identität ergeben, gibt. Die Vermutung, dass es einen solchen geben könnte, entsteht dadurch, dass sich die Struktur der Algebra $\mathcal{H}$ bereits vollständig aus gewissen Informationen ergibt, die sich aus dem einfach regulären Modul $S[1]$ ableiten lassen. Nach demselben Prinzip kann man vermuten, dass sich die Automorphismen von $D = \mathrm{End}_A(S[1])$, welche auf k identisch wirken, fortsetzen lassen zu Funktoren auf der gesamten Röhre $add(\mathcal{T})$. Bezeichnen wir hier die besagte Menge der Automorphismen von D mit $Aut_k(D)$ und die Menge der Autoäquivalenzen von $add(\mathcal{T})$ mit $Aut(\mathcal{T})$, so finden wir eine natürliche Abbildung $res: \ Aut(\mathcal{T}) \longrightarrow Aut_k(D)$ einfach dadurch, dass wir einem Funktor F den Automorphismus von D zuordnen, welcher ein $d \in D$ abbildet auf $F(d)$. Diese Abbildung entspricht also der Einschränkung von F auf $D = \mathrm{End}_A(S[1])$. Haben wir hierbei zwei Funktoren F und G, welche natürlich isomorph sind, und sei $\eta: \ F \longrightarrow G$ ein natürlicher Isomorphismus, so haben wir für jedes $d \in D$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} S[1] \arrow[r, "F(d)"] \arrow[d, "\eta_{S[1]}", "\sim"'] & S[1] \arrow[d, "\eta_{S[1]}", "\sim"'] \\ S[1] \arrow[r, "G(d)"] & S[1]\,, \end{tikzcd}$$

sodass $G(d) = \eta_{S[1]}F(d)\eta_{S[1]}^{-1}$ ist. Damit ergibt sich aus der Abbildung res eine neue Abbildung $\overline{res}$, welche von der Menge der Isomorphieklassen von Autoäquivalenzen von $add(\mathcal{T})$ in die Menge $Aut_k(D)$ modulo innerer Automorphismen abbildet. Es stellt sich nun die Frage, ob es eine Abbildung in die umgekehrte Richtung gibt und, falls dem so ist, ob sich mit deren Hilfe eine Aussage über den Zusammenhang der eben beschriebenen Mengen herstellen lässt. Hier tritt bereits ein Problem bei der Definition einer solchen Abbildung auf. Benutzen wir die in Abschnitt 4.2 beschriebenen kleinen Darstellungen, so könnte man versuchen, einem $\sigma \in Aut_k(D)$ einen Funktor F_σ durch die Vorschriften

$$\begin{aligned} F_\sigma(V_n) &:= V_n\,, \\ F_\sigma(p_n) &:= p_n\,, \\ F_\sigma(\iota_n) &:= \iota_n \text{ , sowie} \\ F_\sigma(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J_k^n) &:= \sum_{k=0}^{n-1} \sigma(a_k) J_k^n \text{ , für alle } n \in \mathbb{N}\,, \end{aligned}$$

zuzuordnen. Bei dieser naheliegenden Variante ergibt sich allerdings das Problem, dass für $n > 3$ die Beziehung

$$\sigma(a_1)[(\sigma \circ \tau^{-1})(b_1)]J_2^n = F_\sigma(a_1 J_1^n \cdot b_1 J_1^n) = F_\sigma(a_1 J_1^n)F_\sigma(b_1 J_1^n) = \sigma(a_1)[(\tau^{-1} \circ \sigma)(b_1)]J_2^n$$

nicht immer erfüllt ist. Man könnte nun statt der Menge $Aut_k(D)$ mit dem Zentralisator von τ in $Aut_k(D)$ arbeiten, dann wird aber die Abbildung res nicht mehr wohldefiniert sein, sodass man auch im Raum $Aut(\mathcal{T})$ Einschränkungen treffen müsste. Wenn man dies nicht tun möchte, so stellt es sich als sehr schwierig heraus, einem allgemeinen Element aus $Aut_k(D)$ einen wohldefinierten Funktor zuzuordnen. Somit bleibt auch hier die Frage nach einem möglichen Zusammenhang zwischen $Aut_k(D)$ und $Aut(\mathcal{T})$ weitgehend offen.

Die Ergebnisse dieser Arbeit ermöglichen es, die Untersuchung von homogenen Röhren und deren Eigenschaften auf die Untersuchung der Modulkategorie eines Schief-Potenzreihenrings zurückzuführen. Dies kann sich als sehr nützlich erweisen, da sich für den Schief-Potenzreihenring die Moduln genauer beschreiben lassen, und man auch die Homomorphismen konkreter berechnen kann, als es zunächst für eine beliebig gegebene, homogene Röhre der Fall ist. Außerdem haben wir gesehen, dass die gesamte Darstellungstheorie der Moduln der Röhre vollständig durch die Informationen gegeben wird, welche der einfach reguläre Modul auf dem Mund der Röhre liefert. Man kann erhoffen, dass sich nach diesem Prinzip noch weitere Eigenschaften von Röhren aus ihren einfach regulären Moduln ableiten lassen, und sich so noch unbekannte Zusammenhänge erschließen lassen.

Literaturverzeichnis

[1] Assem, I. ; Simson, D. ; Skowroński, A.: *London Mathematical Society Student Texts*. Bd. 65: *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Vol 1: Techniques of Representation Theory*. Cambridge University Press, 2006

[2] Berg, C. F.: *Structure theorems for basic algebras*. 2011. – Preprint: arXiv:1102.1100v1

[3] Crawley-Boevey, W. W.: Regular modules for tame hereditary algebras. In: *Proc. London Math. Soc. (3)* 62 (1991), S. 490–508

[4] Dlab, V. ; Ringel, C. M.: *American Mathematical Society: Memoirs of the American Mathematical Society*. Bd. 173: *Indecomposable Representations of Graphs and Algebras*. American Mathematical Society, 1976

[5] Dlab, V. B. ; Dipper, R.: *An Introduction to Diagrammatical Methods in Representation Theory*. Fachbereich Mathematik der Universität Essen, 1981 (Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universität Essen)

[6] Dlab, V. B. ; Ringel, C. M.: The representations of tame hereditary algebras. In: Gordon, R. (Hrsg.): *Representation Theory of Algebras: Proceedings of the Philadelphia Conference* Bd. 37. New York : Dekker, 1978, S. 329–353

[7] Dlab, V. B. ; Ringel, C. M.: The preprojective algebra of a modulated graph. In: Dlab, V. B. (Hrsg.) ; Gabriel, P. (Hrsg.): *Representation Theory II* Bd. 832. Berlin : Springer Heidelberg, 1980, S. 216–231

[8] Dowbor, P. ; Ringel, C. M. ; Simson, D.: Hereditary Artinian rings of finite representation type. In: Dlab, V. B. (Hrsg.) ; Gabriel, P. (Hrsg.): *Representation Theory II* Bd. 832. Berlin : Springer Heidelberg, 1980, S. 232–241

[9] Gabriel, P.: Des catégories abéliennes. In: *Bulletin de la S. M. F.* 90 (1962), S. 323–448

[10] Gabriel, P.: Indecomposable representations - II. In: *Symposia mathematica* 11 (1973), S. 81–104

[11] Harris, B.: Commutators in division rings. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 9 (1958), S. 628–630

[12] Hungerford, T. W.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 73: *Algebra*. New York : Springer, 1974

[13] Kussin, D.: *Noncommutative curves of genus zero: related to finite dimensional algebras*. American Mathematical Society, 2009 (Memoirs of the American Mathematical Society)

[14] Lam, T. Y.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 131: *A First Course in Noncommutative Rings*. New York : Springer, 2001

[15] Laudal, O. A.: Noncommutative deformations of modules. In: *Homology Homotopy Appl.* 4 (2002), Nr. 2, S. 357–396

[16] Lenzing, H. ; Zuazua, R.: Auslander-Reiten duality for Abelian categories. In: *Bol. Soc. Mat. Mex. (3)* 10 (2004), Nr. 2, S. 169–177

[17] Pierce, R. S.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 88: *Associative Algebras*. New York : Springer, 1982

[18] Ringel, C. M.: Unions of chains of indecomposable modules. In: *Comm. Algebra* 3 (1975), Nr. 12, S. 1121–1144

[19] Ringel, C. M.: Representations of K-species and bimodules. In: *J. Algebra* 41 (1976), S. 269–302

[20] Ringel, C. M.: Infinite dimensional representations of finite dimensional hereditary algebras. In: *Symposia mathematica* 23 (1979), S. 321–412

[21] Ringel, C. M. ; Schröer, J.: *Representation Theory of Algebras I: Modules*. 2008. – Bielefeld, Vorlesungsskript

[22] Simson, D. ; Skowroński, A.: *London Mathematical Society Student Texts*. Bd. 71: *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Vol 2: Tubes and Concealed Algebras of Euclidean Type*. Cambridge University Press, 2007

[23] Wedderburn, J. H. M.: Note on algebras. In: *Ann. of Math. (2)* 38 (1937), Nr. 4, S. 854–856