

Funktorielle Operationen auf präprojektiven Komponenten von zahmen Bimoduln

Institut für Mathematik
Universität Paderborn
Februar 2008

Diplomarbeit von
Karsten Dietrich
Matrikelnummer 6243920

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich einigen Menschen meinen Dank aussprechen. Als erstes danke ich Dirk Kussin. Er hat mein Interesse für die Darstellungstheorie mit seinen interessanten Vorlesungen und Seminaren geweckt und ihm verdanke ich den größten Teil meines Wissens über Darstellungstheorie. Weiterhin hat er mich während meiner Diplomarbeit ausgezeichnet betreut. Die zahlreichen Diskussionen mit ihm und seine Ratschläge waren eine große Hilfe.

Ich danke auch Helmut Lenzing und Henning Krause, die es mir ermöglichten im Rahmen ihrer Seminare viele interessante und anregende Vorträge zu hören.

Für die Hilfe bei konkreten Rechnungen und für das Lesen meines Manuskriptes möchte ich mich bei Jan Möllers, Sven-Ake Wegner und Reiner Hermann bedanken.

Abschließend möchte ich meiner Familie und meinen Freunden für all ihre nicht mathematische Hilfe und Unterstützung danken. Mein besonderer Dank richtet sich hier an meine Eltern, die mir meine Ausbildung ermöglichten und mich dabei stets unterstützten.

Erklärung

Ich versichere, dass ich die folgende Diplomarbeit ohne Hilfe Dritter und ausschließlich mit Hilfe der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe. Die den benutzten Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen habe ich als solche kenntlich gemacht.

Paderborn, den 15. Februar 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Darstellungstheoretischer Hintergrund	5
2.1	Gewichtete Graphen, k -Gattungen und ihre Darstellungen	5
2.2	Die Spiegelungs- und Coxeterfunktoren	7
2.3	Ergebnisse von Brenner und Butler bzw. Gabriel	10
2.4	Zahmheit und die Modulkategorie zahmer Bimoduln	13
2.5	Tubulare Shifts	17
3	Die präprojektiven Moduln vom Defekt -1 einiger (4,1)-Bimoduln	19
3.1	Vorbemerkungen	19
3.2	Beschreibung der Objekte	25
3.3	Beschreibung der Morphismenräume	26
3.4	Erzeugende und Relationen	31
4	Vergleich von σ_x und τ^-	39
4.1	Der Fall $k(\sqrt{c_0}, \sqrt{a_0})$	41
4.2	Der Fall $k(\sqrt[4]{c_0})$	45
4.3	Die Quaternionen in $\text{char}(k) = 2$	48
4.4	Endliche Körper, $\text{char}(k) \neq 2$	49
4.5	Einige Körpererweiterungen in Charakteristik 2	51
5	Diskussion der Ergebnisse und offene Fragen	53
	Literatur	55

1 Einleitung

In der Darstellungstheorie spielen Köcher und ihre Darstellungen eine fundamentale Rolle. Im Falle eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers k erhält man die Modulkategorie einer jeden endlichdimensionalen k -Algebra als Kategorie der Darstellungen eines Köchers mit Relationen (Satz von Gabriel, vgl. zum Beispiel [3]).

Ist der Grundkörper nicht algebraisch abgeschlossen, so gilt dies nicht. Um eine größere Klasse von Algebren zu erfassen, führte Gabriel 1971 in [14] Gattungen und ihre Darstellungen ein. Dabei werden im Unterschied zu Köchern gewichtete Graphen betrachtet. Dlab und Ringel untersuchten Gattungen und ihre Darstellungen in [12] und [11]. Die Definitionen von Gattungen und ihren Darstellungen werden in Kapitel 2 präsentiert.

Analog zur Wegealgebra bei Köchern kann man jeder Gattung eine Algebra zuordnen (die Tensoralgebra), deren Modulkategorie äquivalent ist zu der Kategorie der Darstellungen dieser Gattung. Ein Satz von Wedderburn besagt, dass jede endlichdimensionale Algebra über einem vollkommenen Körper Morita-äquivalent ist zu der Tensoralgebra einer Gattung und liefert damit ein Analogon zum Satz von Gabriel für Köcher.

Die einfachsten Gattungen sind die sogenannten Bimoduln, mit denen wir uns in dieser Arbeit im Wesentlichen beschäftigen werden. Bereits für diese treten interessante Effekte auf. Bimoduln sind von der Form

$$F \xrightarrow{M} G.$$

Diese bestehen aus einer k -Modulation mit endlichdimensionalen k -Divisionsalgebren F und G zusammen mit einem F - G -Bimodul M auf dem k zentral operiert. Abkürzend notiert man dies, wie oben zu sehen ist.

Ein solcher Bimodul liefert die erbliche k -Algebra $\Lambda = \begin{pmatrix} G & 0 \\ M & F \end{pmatrix}$. Den Bimodul ${}_F M_G$ nennt man *zahm*, wenn $\dim({}_F M) \cdot \dim(M_G) = 4$ gilt, da sich in diesem Fall die unzerlegbaren Darstellungen noch in einem gewissen Sinne klassifizieren lassen, obwohl es unendlich viele verschiedene sind. Bis auf Reihenfolge gibt es also für zahme Bimoduln nur den $(4, 1)$ -Fall und den $(2, 2)$ -Fall.

Im Falle eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers ist der einzige zahme Bimodul gegeben durch den Kronecker-Köcher $\circ \rightrightarrows \circ$ (als Gattung $k \xrightarrow{k^2} k$). Für diesen Bimodul sind sämtliche Fragestellungen, die uns im weiteren Verlauf der Arbeit beschäftigen werden, trivial. Daher werden wir stets Grundkörper betrachten, die nicht algebraisch abgeschlossen sind. Darüber hinaus werden wir nur mit gewissen $(4, 1)$ -Bimoduln arbeiten. Solche sind beispielsweise gegeben durch ${}_{\mathbb{H}}\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$, wobei \mathbb{H} der Quaternionenschiefkörper über \mathbb{R} ist, oder durch ${}_{\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})}\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})_{\mathbb{Q}}$.

Die Kategorie der endlichdimensionalen Λ -Moduln (zugehörig zu einem zahmen Bimodul) ist in drei Teile geteilt. Jeder unzerlegbare Λ -Modul ist entweder präprojektiv, regulär oder präinjektiv. Diese Struktur lässt sich auch in Abbildung 1 am Auslander-Reiten Köcher dieser Kategorie ablesen. In diesem Köcher stehen die Knoten für die Isomorphieklassen der un-

zerlegbaren Moduln und die Pfeile für Elemente einer Basis des Raums der irreduziblen Morphismen. Die Abbildung 1 ist so zu verstehen, dass es keine nicht-trivialen Morphismen von rechts nach links gibt. Der linke Teil in dieser Abbildung stellt die präprojektive Komponenten



Abbildung 1: Der Auslander-Reiten Köcher eines zahmen Bimoduls

te des Auslander-Reiten Köchers von Λ dar, die wir in Kapitel 3 für spezielle $(4, 1)$ -Bimoduln näher studieren werden. Sie besteht aus den – gestrichelt angedeuteten – τ^- -Orbits der beiden unzerlegbaren, projektiven Λ -Moduln. Dabei ist τ^- die (inverse) Auslander-Reiten Translation. Dieser Funktor (zwischen geeigneten Kategorien) ist von enormer Bedeutung in der Darstellungstheorie, beispielsweise im Kontext der von Auslander und Reiten eingeführten fast-zerfallenden Folgen oder allgemeiner für die Beschreibung der Modulkategorie einer endlichdimensionalen Algebra. Auf die Definition der inversen Auslander-Reiten Translation τ^- (als Inverses der Auslander-Reiten Translation τ) und auch auf einige wichtige Eigenschaften werden wir in Kapitel 2.3 näher eingehen. Die Beschriftung der Pfeile mit M bzw. M^* bedeutet, dass zum Beispiel ${}_{\text{End}(P_2)}\text{Hom}(P_1, P_2)_{\text{End}(P_1)}$ als Bimodul isomorph ist zu ${}_FM_G$. Das Symbol M^* steht für den dualen Bimodul von M , der ein G - F -Bimodul ist.

Die unzerlegbaren, regulären Λ -Moduln liegen in sogenannten Röhren. Diese sind im mittleren Teil von Abbildung 1 angedeutet. Die Menge der Röhren $\{\mathcal{U}_x | x \in \mathbb{X}\}$ ist parametrisiert durch eine unendliche Indexmenge \mathbb{X} .

Im algebraisch abgeschlossenen Fall haben alle Röhren die gleiche Form. Andernfalls gibt es im Allgemeinen viele verschiedene Röhren.

Aus der Kategorie $\text{mod}(\Lambda)$ gewinnen wir auf einfache Weise eine Kategorie \mathcal{H} , die eine geometrische Interpretation als Kategorie von kohärenten Garben über einer (nicht-kommutativen) glatten, projektiven Kurve hat und deriviert äquivalent zu $\text{mod}(\Lambda)$ ist.

Die Kategorie \mathcal{H} hat einige Vorteile gegenüber $\text{mod}(\Lambda)$, die wir in Kapitel 2 erläutern werden. Einer davon ist, dass die Auslander-Reiten Translation τ^- eine Autoäquivalenz auf \mathcal{H} induziert. Darüber hinaus gibt es zu jeder Röhre \mathcal{U}_x in $\text{mod}(\Lambda)$ eine Autoäquivalenz σ_x auf \mathcal{H} , die man tubularen Shift zum Punkt x nennt. Die tubularen Shifts werden wir in Kapitel 2.5 definieren.

Das Hauptaugenmerk liegt im Folgenden auf dem Studium der funktoriellen Wechselwirkung der inversen Auslander-Reiten Translation τ^- mit solchen tubularen Shifts σ_x , die,

im Falle gewisser $(4, 1)$ -Bimoduln, auf Objekten in \mathcal{H} gleich operieren wie τ^- . Der Funktor $F := \tau \circ \sigma_x$ gibt den Unterschied zwischen τ^- und σ_x an. Dieser Funktor operiert auf Objekten trivial, das heißt, dass er jedes Objekt bis auf Isomorphie festlässt. Es stellt sich die kanonische Frage, ob er auch isomorph ist zum identischen Funktor. Aus diesem Grunde werden wir genau diesen Funktor F in einigen speziellen Fällen von $(4, 1)$ -Bimoduln untersuchen.

Ähnliche Fragestellungen wie diejenigen dieser Arbeit spielten in der Darstellungstheorie bereits eine Rolle. So untersuchten sowohl Brenner und Butler in [7] als auch Gabriel in [13], inwiefern sich die Auslander-Reiten Translation τ und der Coxeter-Funktor C^+ auf der Kategorie der Darstellungen einer Gattung bzw. eines Köchers unterscheiden. Gabriel gab konkret den Funktor $\tau \circ C^-$ an, der bei ihm eine (formal) ähnliche Rolle hat wie der Funktor F bei uns, und im Allgemeinen nicht isomorph zum identischen Funktor ist (vgl. Kapitel 2.3). Dabei sind die Coxeter-Funktoren C^+ und C^- kombinatorisch leicht zu berechnende Funktoren auf der Kategorie von Darstellungen einer k -Gattung, die als Komposition von Spiegelungsfunktoren gegeben sind. Ihre Definitionen werden in Kapitel 2.2 präsentiert.

Für bestimmte $(2, 2)$ -Bimoduln operieren τ^- und das Quadrat gewisser tubularer Shifts auf Objekten bis auf Isomorphie gleich. Hier stellt sich natürlich ebenfalls die Frage, ob dies dann auch isomorphe Funktoren sind. Kussin gab in diesem Kontext ein Gegenbeispiel an. Er betrachtet den Bimodul ${}_C\mathbb{C}_C \oplus {}_C\mathbb{C}_{\overline{C}}$ über dem Grundkörper \mathbb{R} . Dabei trägt die erste Komponente die natürliche Bimodulstruktur und in der zweiten Komponente ist die Rechtsmultiplikation gegeben durch $(x, y) \cdot \alpha = (x\alpha, y\bar{\alpha})$. Die Linksmultiplikation in der zweiten Komponente ist die gewöhnliche komplexe Multiplikation. Für diesen Bimodul unterscheiden sich die Auslander-Reiten Translation τ^- und das Quadrat der erwähnten gewissen tubularen Shifts um einen Funktor, der gegeben ist durch komplexe Konjugation und nicht isomorph ist zum identischen Funktor.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

In Kapitel 2 werden die wesentlichen Konzepte und Ergebnisse präsentiert, die im Laufe der Arbeit aufgegriffen werden. Dies sind unter anderem die Definitionen von Gattungen, ihrer Darstellungen sowie der Coxeter-Funktoren und der tubularen Shifts. Desweiteren werden die Ergebnisse von Gabriel aus [14] und von Brenner und Butler aus [7] diskutiert.

In Kapitel 3 betrachten wir solche $(4, 1)$ -Bimoduln, für die einer der beiden Schiefkörper aus der Modulation mit dem Grundkörper k übereinstimmt. Für diese Bimoduln hat Baer in [5] die (unzerlegbaren) präprojektiven Moduln mit einem zu k isomorphen Endomorphismenring beschrieben. Diese Moduln nennt man in dieser Situation präprojektive Moduln vom Defekt -1 . Sie sind gegeben als eine Familie $B(n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Moduln, die Baer konkret (als Darstellungen) angegeben hat. Diese unzerlegbaren Objekte bilden wieder eine Kategorie, die wir \mathcal{P}_1 nennen. In \mathcal{P}_1 ist jeder Morphismus gegeben als Summe von Linearkombinationen von Kompositionen von Basisvektoren der k -Vektorräume $\text{Hom}(B(n), B(n+1))$. Daher genügt es, Basen dieser Räume zu kennen und die Relationen unter den Basisvektoren zu bestimmen, um die Struktur von \mathcal{P}_1 zu kennen. Die Vektorräume $\text{Hom}(B(n), B(n+1))$

sind dreidimensional und Baer gab Basisvektoren X_n, Y_n, Z_n an. Baers Beschreibung von \mathcal{P}_1 werden wir zum besseren Verständnis mit ausführlichen Beweisen präsentieren und um einige neue Beispiele ergänzen. Dabei werden wir feststellen, dass eine Forderung von Baer an die auftauchenden Koeffizienten überflüssig war. Dies liefert uns einige Vorteile.

Das konkrete Wissen über \mathcal{P}_1 nutzen wir, um in Kapitel 3.4, in einigen interessanten Beispielen, die Relationen zwischen den Verkettungen „benachbarter“ Basisvektoren zu bestimmen. An dieser Stelle unterscheiden sich unsere Konventionen von denen von D. Baer, damit wir durch die Zuordnung $n \mapsto n + 1$ einen k -linearen Funktor σ auf \mathcal{P}_1 erhalten, der mit einem tubularen Shift σ_x übereinstimmt. Diese Idee stammt von Dirk Kussin und wird in den Bemerkungen 3.1 und 3.10 erläutert. Wir erhalten beispielsweise für den Bimodul $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})\mathbb{Q}$ zwischen X_n, Y_n, Z_n für jedes n die Relationen (der Kürze halber ohne Indizes notiert)

$$\begin{aligned} XY &= YX \\ ZX &= XZ \\ ZY &= -YZ - X^2 \\ Z^2 &= -2Y^2. \end{aligned}$$

Hier hängen die Relationen also nicht von n ab und daher liefert die Zuordnung $n \mapsto n + 1$ einen k -linearen Funktor auf \mathcal{H} . Da X mit Y und Z vertauscht, ist σ isomorph zu dem tubularen Shift σ_x zu der Röhre, die als einfaches Objekt gerade den Cokern von X_n (dieser ist für alle n gleich) enthält.

In Kapitel 4 verwenden wir dann die Erkenntnisse aus Kapitel 3, um unsere Hauptergebnisse (unter anderem zu finden in 4.4 und 4.6) zu beweisen. Diese besagen, dass sich in gewissen Fällen die Auslander-Reiten Translation und der tubulare Shift σ_x (wie oben), der auf Objekten wie τ^- operiert, um einen Funktor unterscheiden, der nicht isomorph ist zum identischen Funktor.

Wir betrachten dazu den Funktor $F = \tau \circ \sigma_x$, der auf Objekten trivial operiert. Solche Funktoren nennt man Geister und sie bilden eine Gruppe. Diese ist in unseren Spezialfällen hinreichend genau beschrieben, was wir für unsere Beweise ausnutzen.

In unserem oben schon betrachteten Beispiel des Bimoduls $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})\mathbb{Q}$ erhalten wir, dass sich die Auslander-Reiten Translation τ^- und σ_x um den Funktor F unterscheiden, der auf Objekten trivial operiert und auf Basismorphismen durch die Zuordnung $(X, Y, Z) \mapsto (-X, Y, Z)$ gegeben ist. Dieser Funktor F ist nicht isomorph zum identischen Funktor.

Ähnliche Ergebnisse erzielen wir in verschiedenen Spezialfällen. Für $(4, 1)$ -Bimoduln waren diese bislang nicht bekannt.

2 Darstellungstheoretischer Hintergrund

In diesem Kapitel präsentieren wir die wichtigsten darstellungstheoretischen Konzepte und Ergebnisse, die im weiteren Verlauf von Bedeutung sein werden.

Wir betrachten, sofern nichts anderes gesagt wird, stets Rechts-Moduln.

2.1 Gewichtete Graphen, k -Gattungen und ihre Darstellungen

Definition 2.1. Ein *gewichteter Graph* (Γ, \underline{d}) besteht aus einer endlichen Menge Γ von Knoten zusammen mit einer Menge $\underline{d} = \{(d_{ij}, d_{ji}) \mid d_{ij} \in \mathbb{N}_0, i, j \in \Gamma\}$ von Gewichten, die den folgenden Bedingungen genügen.

- (i) $d_{ii} = 0$ für alle $i \in \Gamma$
- (ii) Für jedes $i \in \Gamma$ gibt es ein $f_i \in \mathbb{N}$ mit $d_{ij}f_j = d_{ji}f_i$ für alle $i, j \in \Gamma$.

Man bemerkt, dass genau dann $d_{ij} \neq 0$ ist, wenn $d_{ji} \neq 0$. In diesem Fall verbindet man i und j mit einer Kante, versehen mit dem Gewicht (d_{ij}, d_{ji}) , und notiert dies als

$$i \xrightarrow{(d_{ij}, d_{ji})} j.$$

Definition 2.2. Eine Orientierung eines gewichteten Graphen (Γ, \underline{d}) ist dadurch gegeben, dass man für jede Kante eine Richtung auszeichnet, die man durch eine Pfeilspitze andeutet. Für eine feste Orientierung Ω von (Γ, \underline{d}) definiert man eine neue Orientierung $s_i\Omega$, indem man alle Pfeile umdreht, die in i enden oder beginnen.

Ein Knoten i in Γ heißt *Senke (Quelle)* bezüglich Ω , falls alle Pfeile, die i enthalten, in i enden (beginnen). Eine Orientierung Ω von (Γ, \underline{d}) heißt *zulässig*, falls man Γ in der Form i_1, \dots, i_n anordnen kann, so dass i_1 eine Senke bezüglich Ω und i_j eine Senke bezüglich $s_{i_{j-1}} \cdots s_{i_1}\Omega$ ist. In diesem Fall nennt man i_1, \dots, i_n eine *zulässige Folge von Senken*. Analog definiert man *zulässige Folgen von Quellen*.

Definition 2.3. Sei k ein Körper und (Γ, \underline{d}) ein gewichteter Graph. Eine *k -Modulation* \mathcal{M} von (Γ, \underline{d}) besteht aus einer Menge von Divisionsalgebren $(F_i)_{i \in \Gamma}$ zusammen mit einem F_i - F_j -Bimodul ${}_iM_j$ und einem F_j - F_i -Bimodul ${}_jM_i$ für jede Kante $i \text{ --- } j$, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind.

- (i) k liegt im Zentrum von allen F_i und F_i ist endlich-dimensional über k .

- (ii) k operiert zentral auf allen ${}_i M_j$.
- (iii) Es gilt ${}_j M_i \cong {}_i M_j^*$ als Bimoduln für jede Kante ${}_i \circ \longrightarrow \circ {}_j$ in (Γ, \underline{d}) , wobei für einen Bimodul ${}_D M_F$ über Schiefkörpern D, F , auf denen k zentral agiert, $({}_D M_F)^* := \text{Hom}_F({}_D M_F, F_F)$ ist.
- (iv) $\dim({}_i M_j)_{F_j} = d_{ij}$.

Aus (iii) folgt auch $d_{ij} = \dim_{F_j}({}_j M_i)$. Damit kann man also die f_i als $f_i = \dim_k F_i$ wählen.

Definition 2.4. Eine k -Gattung (\mathcal{M}, Ω) von (Γ, \underline{d}) ist eine Modulation \mathcal{M} von (Γ, \underline{d}) zusammen mit einer zulässigen Orientierung Ω . Im Folgenden sei also (\mathcal{M}, Ω) eine k -Gattung eines gewichteten, zusammenhängenden Graphen (Γ, \underline{d}) , und es sei $\Gamma = \{1, \dots, n\}$ so angeordnet, dass $1, \dots, n$ eine zulässige Folge von Senken ist. Man beachte, dass dann $n, \dots, 1$ eine zulässige Folge von Quellen ist.

Eine Darstellung $\underline{V} = (V_{i,j} \varphi_i)_{i \in \Gamma}$ von (\mathcal{M}, Ω) ist eine Menge endlich-dimensionaler F_i -Rechts-Moduln V_i zusammen mit F_j -linearen Abbildungen

$${}_j \varphi_i : V_i \otimes_{F_i} {}_i M_j \longrightarrow V_j$$

für alle Pfeile ${}_i \longrightarrow {}_j$. Falls es keinen Pfeil von i nach j gibt, setzt man ${}_j \varphi_i = 0$.

Seien $\underline{V} = (V_{i,j} \varphi_i)$ und $\underline{W} = (W_{i,j} \psi_i)$ zwei Darstellungen von (\mathcal{M}, Ω) . Ein Morphismus $\underline{f} = (f_i) : \underline{V} \longrightarrow \underline{W}$ ist ein Tupel F_i -linearer Abbildungen $f_i : V_i \longrightarrow W_i$, welches das folgende Diagramm kommutativ macht.

$$\begin{array}{ccc} V_i \otimes_{F_i} {}_i M_j & \xrightarrow{{}_j \varphi_i} & V_j \\ f_i \otimes 1 \downarrow & & \downarrow f_j \\ W_i \otimes_{F_i} {}_i M_j & \xrightarrow{{}_j \psi_i} & W_j \end{array}$$

Die so konstruierte Kategorie $L(\mathcal{M}, \Omega)$ der Darstellungen von (\mathcal{M}, Ω) ist eine abelsche Kategorie in der jedes Objekt endliche Länge hat, und jedes Objekt eine bis auf Isomorphie eindeutige direkte Summenzerlegung in unzerlegbare Objekte besitzt (vgl. [12]).

Man kann zeigen, dass diese Kategorie äquivalent zur Modulkategorie einer gewissen Algebra (der Tensoralgebra) ist. Daher werden wir im Folgenden auch von Moduln statt von Darstellungen sprechen.

Bemerkung 2.5 (spezielle Bimoduln). In dieser Arbeit werden wir im Wesentlichen den gewichteten Graphen $2 \circ \xrightarrow{(4,1)} \circ 1$ betrachten. Als k -Modulation werden wir stets $k \xrightarrow{k L_L} L$ verwenden. Hier ist L/k eine Schiefkörpererweiterung vom Grad 4, so dass L den Grundkörper k in seinem Zentrum enthält. Wir behandeln also spezielle Bimoduln.

Eine Darstellung dieser Gattung ist also von der Form (V_2, V_1, φ) . Dabei ist V_2 ein endlichdimensionaler k -Vektorraum, V_1 ein endlichdimensionaler L -Vektorraum und $\varphi : V_2 \otimes$

${}_k L_L \longrightarrow V_1$ eine L -lineare Abbildung.

Die Dimensionsvektoren werden wir im Folgenden, von links nach rechts lesend, in der Form $(\dim_k V_2, \dim_L V_1)$ notieren.

2.2 Die Spiegelungs- und Coxeterfunktoren

Bemerkung 2.6. Sei $\underline{X} = (X_i, {}_j\varphi_i) \in L(\mathcal{M}, \Omega)$ und $i \longrightarrow j$ ein Pfeil in (Γ, \underline{d}) bezüglich Ω .

Per Definition gilt ${}_j M_i \cong {}_i M_j^* = \text{Hom}_{F_j}({}_i M_j, F_j)$. Mit dem bekannten Isomorphismus

$$\text{Hom}_{F_j}({}_i M_j, X_j) \cong X_j \otimes_j \text{Hom}_{F_j}({}_i M_j, F_j) \cong X_j \otimes_j M_i$$

und der Adjungiertheit von Hom- und Tensorfunktoren erhalten wir kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{F_j}(X_i \otimes_i M_j, X_j) &\cong \text{Hom}_{F_i}(X_i, \text{Hom}_{F_j}({}_i M_j, X_j)) \\ &\cong \text{Hom}_{F_i}(X_i, X_j \otimes_j M_i). \end{aligned}$$

Das heißt also, dass man jeder F_j -linearen Abbildung $\varphi : X_i \otimes_i M_j \longrightarrow X_j$ kanonisch eine eindeutige F_i -lineare Abbildung $\bar{\varphi} : X_i \longrightarrow X_j \otimes_j M_i$ zuordnen kann.

Umgekehrt gehört zu einer F_i -linearen Abbildung $\psi : X_i \longrightarrow X_j \otimes_j M_i$ eine eindeutige F_j -lineare Abbildung $\bar{\psi} : X_i \otimes_i M_j \longrightarrow X_j$, so dass $\bar{\bar{\varphi}} = \varphi$ und $\bar{\bar{\psi}} = \psi$ gilt.

Insbesondere erhalten wir für ${}_j\varphi_i : X_i \otimes_i M_j \longrightarrow X_j$ eine Abbildung $\bar{{}_j\varphi_i} : X_i \longrightarrow X_j \otimes_j M_i$.

Später werden wir bei der Berechnung der Coxeter-Transformation einiger Darstellungen die obigen Isomorphismen konkret benötigen, weshalb wir diese bereits jetzt angeben wollen.

Wie bereits erwähnt, wird im Weiteren konkret nur mit dem gewichteten Graphen $\circ \xrightarrow{(4,1)} \circ$ gearbeitet. Wir betrachten eine k -Modulation bestehend aus dem Grundkörper k und einem Schiefkörper L , der k in seinem Zentrum enthält, so dass $\dim_k(L) = 4$ gilt. Wir fixieren eine k -Basis $\{1, x, y, yx\}$ von L .

Offensichtlich ist dann ${}_L L_k \cong \text{Hom}_L({}_k L_L, L)$ vermöge $l \mapsto l \cdot$ bzw. $f \mapsto f(1)$. Dabei ist $l \cdot$ die Abbildung, die durch Linksmultiplikation mit $l \in L$ gegeben ist.

Es gibt bei einer k -Modulation den Isomorphismus $\varepsilon : {}_k L_L \longrightarrow \text{Hom}_k({}_L L_k, k)$. Die Existenz und auch seine Konstruktion wird in Lemma 4.3 genauer erläutert. Dieser Isomorphismus sei ab jetzt fixiert. Wähle eine F_j -Basis m_1, \dots, m_d von ${}_i M_j$, und bezeichne mit ψ_1, \dots, ψ_d die zugehörige Dualbasis. Weiter sei n_1, \dots, n_d die F_j -Basis von ${}_j M_i$ mit $n_l = \varepsilon(\psi_l)$.

Einer F_j -linearen Abbildung $\varphi : X_i \otimes_i M_j \longrightarrow X_j$ wird dann eine F_i -lineare Abbildung $\bar{\varphi}$

zugeordnet, mit

$$\bar{\varphi} : X_i \longrightarrow X_j \otimes_j M_i, \quad \bar{\varphi}(x) = \sum_{p=1}^d \varphi(x \otimes m_p) \otimes n_p.$$

Hat man umgekehrt eine F_i -lineare Abbildung $\psi : X_i \longrightarrow X_j \otimes_j M_i$, so ist für $z \in X_i$

$$\psi(z) = \sum_{p=1}^d z_p \otimes n_p \text{ mit } z_p \in X_j.$$

Dann definiere

$$\bar{\psi} : X_i \otimes_i M_j \longrightarrow X_j, \quad \bar{\psi}(z \otimes m_p) = z_p.$$

Bei der Definition der Spiegelungsfunktoren wird dieser Isomorphismus konkret verwendet. Wir werden uns also in der Folge davon überzeugen, dass derselbe unabhängig von der Wahl einer Basis ist und nur vom fixierten Isomorphismus ε abhängt, der durch die k -Modulation gegeben ist. Hat man dies getan, so zeigt eine einfache Rechnung, dass man bei der Wahl eines anderen Isomorphismus in der k -Modulation, einen Funktor erhält, der zu dem ursprünglichen natürlich isomorph ist und damit, dass der Funktor bis auf Isomorphie von Funktoren wohldefiniert ist.

Um zu zeigen, dass die Zuordnung $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ nicht von der Wahl einer Basis abhängt, nehmen wir also an wir hätten eine weitere F_j -Basis m'_1, \dots, m'_d von ${}_i M_j$, und es bezeichne analog zu oben ψ'_1, \dots, ψ'_d die zugehörige Dualbasis und es sei $n'_l = \varepsilon(\psi'_l)$. Wir wollen zeigen, dass

$$\sum_{p=1}^d \varphi(x \otimes m_p) \otimes n_p = \sum_{p=1}^d \varphi(x \otimes m'_p) \otimes n'_p$$

gilt, für eine F_j -lineare Abbildung $\varphi : X_i \otimes_i M_j \longrightarrow X_j$.

Zunächst ist $\delta_{pq} = \psi'_q(m'_p)$ und es gibt Basisdarstellungen

$$\psi'_q = \sum_j b_{jq} \psi_j \text{ und } m'_p = \sum_i m_i a_{pi} \text{ mit } b_{jq}, a_{pi} \in F_j.$$

Damit erhalten wir

$$\delta_{pq} = \psi'_q(m'_p) = \sum_{i,j} b_{jq} \psi_j(m_i) a_{pi} = \sum_i b_{iq} a_{pi}.$$

Diese Gleichung sagt gerade, dass $BA = E_d$ wenn $B = (b_{iq})$ und $A = (a_{pi})$ die Basiswechselmatrizen bezeichnen. Dann ist aber auch $AB = E_d$ und das heißt

$$\sum_p a_{pi} b_{jp} = \delta_{ji}.$$

Es gilt also insgesamt

$$\begin{aligned} \sum_p \varphi(x \otimes m'_p) \otimes n'_p &= \sum_{i,j,p} \varphi(x \otimes m_i) a_{pi} \otimes b_{jp} n_j \\ &= \sum_{i,j} \varphi(x \otimes m_i) \left(\sum_p a_{pi} b_{jp} \right) \otimes n_j = \sum_i \varphi(x \otimes m_i) \otimes n_i, \end{aligned}$$

und die folgende Definition der Spiegelungsfunktoren hängt nur von der Wahl des Isomorphismus ε ab. Die obige Rechnung stammt aus [10]. Man überzeugt sich leicht davon, dass die, nachfolgend definierten, Spiegelungsfunktoren somit bis auf Isomorphie wohldefiniert sind.

Mit Hilfe dieser Bemerkung können wir nun die sogenannten Spiegelungsfunktoren, und damit die Coxeter-Funktoren, konstruieren.

Sei zunächst t eine Senke in Γ bezüglich Ω und $\underline{X} = (X_i, {}_j\varphi_i)$ eine Darstellung. Wir definieren

$$S_t^+ \underline{X} = \underline{Y} = (Y_i, {}_j\psi_i) \in L(\mathcal{M}, s_t\Omega)$$

auf die folgende Weise. Für $i \neq t$ setzen wir $Y_i = X_i$ und ${}_j\psi_i = {}_j\varphi_i$. Y_t ist der Kern der F_t -linearen Abbildung

$$\bigoplus_{j \in \Gamma} X_j \otimes {}_jM_t \xrightarrow{\sum_{j \in \Gamma} {}_t\varphi_j} X_t.$$

Sei ${}_l\tau_t : Y_t \rightarrow X_l \otimes_l M_t$ die folgende Komposition von Abbildungen.

$$Y_t \xrightarrow{\mu} \bigoplus_{j \in \Gamma} X_j \otimes_j M_t \rightarrow X_l \otimes_l M_t$$

Das heißt also, dass $\mu = \prod_{j \in \Gamma} {}_j\tau_t$. Dann definiere für $j \neq t$

$${}_j\psi_t = \overline{{}_j\tau_t} : Y_t \otimes_t M_j \rightarrow Y_j = X_j.$$

Es bleibt S_t^+ auf Morphismen zu definieren. Sei dazu

$$\underline{\alpha} = (\alpha_j) : \underline{X} \rightarrow \underline{X}' = (X'_i, {}_j\varphi_i)$$

ein Morphismus in $L(\mathcal{M}, \Omega)$. Dann ist $S_t^+ \underline{\alpha}$ durch Einschränkung definiert, das heißt $(S_t^+ \underline{\alpha})_i = \alpha_i$ für $i \neq t$, und $(S_t^+ \underline{\alpha})_t$ ist die Einschränkung von

$$\bigoplus_{j \in \Gamma} (\alpha_j \otimes 1) : \bigoplus_{j \in \Gamma} X_j \otimes_j M_t \rightarrow \bigoplus_{j \in \Gamma} X'_j \otimes_j M_t \text{ auf } Y_t \hookrightarrow \bigoplus_{j \in \Gamma} X_j \otimes_j M_t.$$

Damit ist S_t^+ ein additiver links-exakter Funktor: $L(\mathcal{M}, \Omega) \rightarrow L(\mathcal{M}, s_t\Omega)$.

Sei nun t eine Quelle. Wir erklären

$$S_t^- \underline{X} = \underline{Z} = (Z_i, {}_j\eta_i) \in L(\mathcal{M}, s_t\Omega)$$

wie folgt. Sei $Z_i = X_i$ und ${}_j\eta_i = {}_j\varphi_i$ für alle $i, j \neq t$. Z_t sei der Cokern im folgenden Diagramm

$$X_t \xrightarrow{\bigoplus_{i \in \Gamma} \overline{{}_i\varphi_t}} \bigoplus_{i \in \Gamma} X_i \otimes_i M_t \xrightarrow{\pi} Z_t \longrightarrow 0$$

Für $l \in \Gamma$ sei ${}_t\pi_l$ die folgende Verkettung von Abbildungen.

$${}_t\pi_l : X_l \otimes_l M_t^c \longrightarrow \bigoplus_{i \in \Gamma} X_i \otimes_i M_t \xrightarrow{\pi} Z_t$$

Nun definiere ${}_t\eta_i = {}_t\pi_i$ für $i \neq t$.

Sei erneut $\underline{\alpha} = (\alpha_j) : \underline{X} \longrightarrow \underline{X}' = (X'_i, {}_j\varphi_i)$ ein Morphismus, dann setzt man $S_t^- \underline{\alpha} = \underline{\beta} = (\beta_i)$, mit $\beta_i = \alpha_i$ für $i \neq t$ und $\beta_t : Z_t \longrightarrow (S_z^- \underline{X}')_t$ als die Abbildung, die von $\sum_{i \in \Gamma} \alpha_i \otimes 1$ induziert wird. Damit ist nun S_t^- ein additiver, rechts-exakter Funktor $L(\mathcal{M}, \Omega) \longrightarrow L(\mathcal{M}, s_t\Omega)$.

Definition 2.7. Die so konstruierten Funktoren S_t^+ und S_t^- bezeichnet man als *Spiegelungsfunktoren*.

Sei $\Gamma = \{1, \dots, n\}$ so angeordnet, dass $1, \dots, n$ eine zulässige Folge von Senken ist. Dann sind die *Coxeter-Funktoren* $L(\mathcal{M}, \Omega) \rightarrow L(\mathcal{M}, \Omega)$ definiert als

$$\begin{aligned} C^+ &= S_n^+ S_{n-1}^+ \cdots S_1^+ \quad \text{und} \\ C^- &= S_1^- S_2^- \cdots S_n^-. \end{aligned}$$

Diese Definition hängt, nach Konstruktion der Spiegelungsfunktoren, nicht von der Wahl der zulässigen Folge von Senken ab.

2.3 Ergebnisse von Brenner und Butler bzw. Gabriel

Ähnliche Fragestellungen wie die dieser Arbeit sind in der Vergangenheit bereits behandelt worden. So untersuchten sowohl Brenner und Butler in [7] als auch Gabriel in [13], ob und in welchen Fällen die Auslander-Reiten-Translation τ , die nachfolgend definiert wird, und der Coxeter-Funktor C^+ isomorphe Funktoren auf der Kategorie der Darstellungen einer k -Gattung beziehungsweise eines Köchers sind. Gabriel fand heraus, dass dies durchaus nicht immer der Fall ist und konnte auch den Funktor angeben, durch den sie sich unterscheiden. Ähnliches werden wir in Kapitel 4 (unter anderem in 4.4 und 4.6) in einigen wichtigen Beispielen für einen gewissen tubularen Shift σ_x und die inverse Auslander-Reiten-Translation τ^- tun.

Zunächst erinnern wir an die Definition der Auslander-Reiten-Translationen τ und τ^- . Es

ist $\tau = D \operatorname{Tr}$ und $\tau^- = \operatorname{Tr} D$, wobei $D = \operatorname{Hom}_k(-, k)$ die Standard-Dualität und Tr die Transposition ist. Diese erklärt man wie folgt. Sei A eine endlichdimensionale k -Algebra und M ein endlich erzeugter A -Rechtsmodul. Betrachte eine minimale projektive Präsentation

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0.$$

Wendet man nun den links-exakten, kontravarianten Funktor $(-)^t := \operatorname{Hom}_A(-, A)$ an, so erhält man eine exakte Sequenz von A -Linksmoduln

$$0 \longrightarrow M^t \xrightarrow{p_0^t} P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \longrightarrow \operatorname{coker}(p_1^t) \longrightarrow 0,$$

und man setzt $\operatorname{Tr} M := \operatorname{coker}(p_1^t)$.

Diese Zuordnung verschwindet offensichtlich auf projektiven Moduln. Sie liefert eine Dualität $\operatorname{Tr} : \underline{\operatorname{mod}}(A) \longrightarrow \underline{\operatorname{mod}}(A)^{op}$. Dabei ist $\underline{\operatorname{mod}}$ die projektive stabile Kategorie. Es bleibt noch zu erklären, wie Tr auf Morphismen definiert ist. Sei also $u : M \longrightarrow N$ ein Morphismus in $\underline{\operatorname{mod}}(A)$, und

$$P'_1 \xrightarrow{g} P'_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

sei eine minimale projektive Präsentation. Dann existieren Morphismen u_1, u_0 , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow u_1 & & \downarrow u_0 & & \downarrow u & & \\ P'_1 & \xrightarrow{g} & P'_0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

kommutiert. Nach Anwenden von $(-)^t$ erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} P_0^t & \xrightarrow{p_1^t} & P_1^t & \longrightarrow & \operatorname{Tr} M & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow u_0^t & & \uparrow u_1^t & & \uparrow & & \\ P_0'^t & \xrightarrow{g^t} & P_0'^t & \longrightarrow & \operatorname{Tr} N & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Per Definition ist dann $\operatorname{Tr} u$ der eindeutig bestimmte Morphismus $\operatorname{Tr} N \longrightarrow \operatorname{Tr} M$, der das rechte Quadrat kommutativ macht.

Die Zuordnungen τ und τ^- induzieren quasi-inverse Äquivalenzen

$$\underline{\operatorname{mod}}(A) \underset{\tau^-}{\overset{\tau}{\rightleftarrows}} \overline{\operatorname{mod}}(A).$$

Dabei bezeichnet $\underline{\operatorname{mod}}(A)$ die projektive stabile Kategorie und $\overline{\operatorname{mod}}(A)$ die injektive stabile Kategorie. Es gelten die Auslander-Reiten Formeln $\operatorname{Ext}^1(M, N) \cong D \underline{\operatorname{Hom}}_A(\tau^- N, M) \cong D \overline{\operatorname{Hom}}_A(N, \tau M)$. In $\underline{\operatorname{Hom}}_A(-, -)$ verschwinden per Definition alle Morphismen, die über

projektive Moduln faktorisieren, und in $\overline{\text{Hom}}_A(-, -)$ verschwinden alle Morphismen, die über injektive Moduln faktorisieren.

Die Auslander-Reiten Translationen sind von großer Bedeutung im Kontext sogenannter fast-zerfallender Folgen. Diese sind eines der wichtigsten Hilfsmittel für die Klassifikation der endlich erzeugten Moduln über einer endlichdimensionalen k -Algebra. Der folgende Satz zeigt, wie man mit Hilfe der Auslander-Reiten Translationen fast-zerfallende Folgen konstruieren kann.

Theorem 2.8. (a) Sei M ein unzerlegbarer, nicht-projektiver A -Modul. Dann existiert eine fast-zerfallende Folge

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

(b) Sei N ein unzerlegbarer, nicht-injektiver A -Modul. Dann existiert eine fast-zerfallende Folge

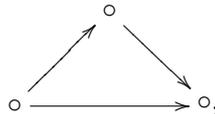
$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow \tau^- N \longrightarrow 0.$$

In [7] untersuchten Brenner und Butler, ob die Auslander-Reiten Translation τ und der Coxeter-Funktor C^+ auf der Kategorie der Darstellungen einer Gattung isomorphe Funktoren sind. Sie kamen zu dem Ergebnis, dass die beiden Funktoren isomorph sind, falls die betrachtete Gattung keine orientierten Kreise hat. Ohne zusätzliche Forderungen an die Gattung ist dieses Ergebnis nicht korrekt, wie der folgende Satz von Gabriel zeigt.

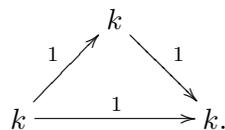
Satz 2.9 (Gabriel [13]). Sei Q ein Köcher. Dann gilt $\tau \cong C^+ \circ T = T \circ C^+$ auf $\text{mod}(kQ)$, wobei $T : \text{mod}(kQ) \rightarrow \text{mod}(kQ)$ auf Objekten definiert ist durch $TV(a) = V(a)$ für $a \in Q_0$ und $TV(\alpha) = -V(\alpha)$ für $\alpha \in Q_1$. Auf Morphismen operiert T wie der identische Funktor.

Im selben Artikel gibt Gabriel auch konkret ein Beispiel an, wo der Coxeter-Funktor und die Auslander-Reiten Translation nicht übereinstimmen.

Sei Q der Köcher



und V die Darstellung



Dann erhält man für $\tau(V)$

$$\begin{array}{ccc} & k & \\ -1 \nearrow & & \searrow -1 \\ k & \xrightarrow{1} & k \end{array}$$

und für C^+V

$$\begin{array}{ccc} & k & \\ 1 \nearrow & & \searrow 1 \\ k & \xrightarrow{-1} & k \end{array}$$

Diese beiden Darstellungen sind offensichtlich nicht isomorph.

Bemerkung 2.10. Gabriel erwähnt in [13], dass das Resultat von Brenner-Butler im Falle von Bäumen korrekt ist. Es ist nicht klar inwieweit er sich dabei auch auf Gattungen bezieht und nicht nur auf Köcher.

Das Gegenbeispiel von Gabriel ist gegeben durch eine reguläre Darstellung eines Köchers, dessen unterliegender Graph einen Kreis hat. Für Köcher, deren unterliegende Graphen keine Kreise haben, sind die Auslander-Reiten Translation τ und der Coxeter-Funktor C^+ isomorphe Funktoren.

Wir wollen für den Rest der Arbeit annehmen, dass τ und C^+ auf der präprojektiven Komponente der Modulkategorie eines zahmen Bimoduls isomorph sind. Bimoduln liegen (als Gattungen) außerhalb der Reichweite der Phänomenologie des Gegenbeispiels von Gabriel und daher ist die Richtigkeit der Aussage von Brenner-Butler für Bimoduln zu erwarten.

2.4 Zahmheit und die Modulkategorie zahmer Bimoduln

Definition 2.11 (Wild, zahm). Sei ${}_F M_G$ ein Bimodul zu dem gewichteten Graphen $\circ \xrightarrow{(c,d)} \circ$. Dieser Gattung ordnet man die quadratische Form

$$Q : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad Q(x) = c \cdot x_1^2 + d \cdot x_2^2 - c \cdot d \cdot x_1 x_2$$

zu (vgl. [9]). Q heißt positiv definit (bzw. positiv semidefinit), falls gilt $Q(x) > 0$ (bzw. $Q(x) \geq 0$) für alle $x \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}$.

Wir nennen die Kategorie $\text{Rep}({}_F M_G)$ der Darstellungen dieses Bimoduls *darstellungsendlich*, falls es nur endliche viele Isomorphieklassen unzerlegbarer Darstellungen gibt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\dim({}_F M) \cdot \dim(M_G) \leq 3$ ist. Genau in diesem Fall ist die zugehörige quadratische Form Q positiv definit.

Die Kategorie $\text{Rep}({}_F M_G)$ heißt *von wildem Darstellungstyp*, falls es für einen Körper k' eine volle, exakte Einbettung $\text{mod}^*(k'\langle x, y \rangle) \longrightarrow \text{Rep}({}_F M_G)$ gibt. Dabei bezeichnen wir mit $\text{mod}^*(k'\langle x, y \rangle)$ die Kategorie der über k' endlichdimensionalen $k'\langle x, y \rangle$ -Moduln. Eine

solche volle, exakte Einbettung existiert genau dann, wenn $\dim({}_F M) \cdot \dim(M_G) \geq 5$ ist. Für den Fall eines Grundkörpers, der nicht algebraisch abgeschlossen ist, gibt es allgemein bislang keine befriedigende Definition von Zahmheit. Man nennt einen Bimodul ${}_F M_G$ nach [9] allerdings genau dann *zahm*, wenn $\dim({}_F M) \cdot \dim(M_G) = 4$ gilt, weil man die Gestalt seiner Kategorie dann als „zahm“ bezeichnen würde. Man kann nämlich in diesem Fall die unzerlegbaren Darstellungen noch auf eine gewisse Weise klassifizieren, obwohl es unendlich viele verschiedene Isomorphieklassen von Unzerlegbaren gibt. Genau für $\dim({}_F M) \cdot \dim(M_G) = 4$ ist die zugehörige quadratische Form Q positiv semidefinit, aber nicht positiv definit.

Definition 2.12 (präprojektiv, präinjektiv, regulär). Sei A eine endlichdimensionale, erbliche k -Algebra. Der Auslander-Reiten Köcher dieser Algebra hat als Knoten die Isomorphieklassen unzerlegbarer Objekte aus $\text{mod}(A)$ und für jedes Element einer Basis der Vektorraums der irreduziblen Morphismen zwischen zwei unzerlegbaren Objekten gibt es einen Pfeil im Auslander-Reiten Köcher.

- (a) Eine zusammenhängende Komponente \mathcal{P} des Auslander-Reiten Köchers von A heißt *präprojektiv*, falls sie keine orientierten Zykel besitzt, und es für jeden unzerlegbaren Modul M in \mathcal{P} eine natürliche Zahl $t \geq 0$ und einen unzerlegbar-projektiven A -Modul P gibt, so dass $M \cong \tau^{-t}P$ gilt.
- (b) Eine zusammenhängende Komponente \mathcal{Q} des Auslander-Reiten Köchers von A heißt *präinjektiv*, falls sie keine orientierten Zykel besitzt, und es für jeden unzerlegbaren Modul N in \mathcal{Q} eine natürliche Zahl $s \geq 0$ und einen unzerlegbar-injektiven A -Modul I gibt, so dass $N \cong \tau^s I$ gilt.
- (c) Eine zusammenhängende Komponente \mathcal{R} des Auslander-Reiten Köchers von A heißt *regulär*, falls sie weder projektive noch injektive Moduln enthält.

Ein unzerlegbarer A -Modul M heißt *präprojektiv* (*präinjektiv*, *regulär*), falls er in einer präprojektiven (*präinjektiven*, *regulären*) Komponente des Auslander-Reiten Köchers von A liegt. Ein A -Modul heißt *präprojektiv* (*präinjektiv*, *regulär*), falls er direkte Summe unzerlegbarer, präprojektiver (*präinjektiver*, *regulärer*) A -Moduln ist.

Nun beschreiben wir die Struktur der Modulkategorie der k -Algebra $\Lambda = \begin{pmatrix} G & 0 \\ M & F \end{pmatrix}$, wobei G und F endlichdimensionale Divisionsalgebren über einem Grundkörper k sind und M ein F - G -Bimodul ist mit $\dim({}_F M) \cdot \dim(M_G) = 4$. Auf M , G und F agiert k zentral. Diese Algebra gehört also zu einem zahmen Bimodul ${}_F M_G$. In diesem Fall ergibt sich die Dreiteilung der Kategorie

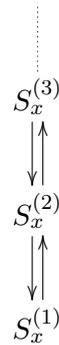
$$\text{mod}(\Lambda) = \mathcal{P} \vee \mathcal{R} \vee \mathcal{Q}.$$

Das heißt, dass $\text{mod}(\Lambda)$ die additive Hülle der disjunkten Vereinigung von $\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{Q}$ ist, und es keine von null verschiedenen Morphismen von rechts nach links gibt. Dabei bezeichnet \mathcal{P} die präprojektive Komponente, \mathcal{Q} die präinjektive Komponente und \mathcal{R} den Teil

des Auslander-Reiten Köchers von Λ , der die unzerlegbaren, regulären Moduln enthält. Es gibt also insbesondere jeweils nur eine einzige präprojektive bzw. präinjektive Komponente. Die präprojektive Komponente besteht aus den τ^- -Bahnen der zwei unzerlegbar-projektiven Moduln dieser Algebra, und dual dazu besteht die präinjektive Komponente aus den τ -Bahnen der beiden unzerlegbar-injektiven Λ -Moduln. Auch die Unterkategorie $\text{reg}(\Lambda)$ der regulären Moduln kann man weiter beschreiben, denn es gilt für eine Indexmenge \mathbb{X}

$$\text{reg}(\Lambda) = \coprod_{x \in \mathbb{X}} \mathcal{U}_x,$$

wobei die \mathcal{U}_x zusammenhängende, einreihige Längenkategorien sind, die man als Röhren bezeichnet. In einer solchen Kategorie besitzt jedes Objekt eine eindeutige Kompositionsreihe. Im Bimodul-Fall sind diese Röhren zusätzlich homogen, was bedeutet, dass jedes Objekt in der Röhre isomorph zu seinem Auslander-Reiten Translat ist. Der Auslander-Reiten Köcher von \mathcal{U}_x ist von der folgenden Form.



Dabei ist $S_x^{(1)}$ ein einfaches Objekt in der Teilkategorie \mathcal{U}_x (hat also Länge 1), $S_x^{(2)}$ hat Länge 2 etc. Die Auslander-Reiten Folgen in dieser Unterkategorie sind von der Form $0 \rightarrow S_x^{(1)} \rightarrow S_x^{(2)} \rightarrow S_x^{(1)} \rightarrow 0$ und für $n \geq 2$: $0 \rightarrow S_x^{(n)} \rightarrow S_x^{(n-1)} \oplus S_x^{(n+1)} \rightarrow S_x^{(n)} \rightarrow 0$.



Das obige Diagramm ist eine Skizze des Auslander-Reiten Köchers (genauer der Auslander-

Reiten Gattung) von Λ . In der präprojektiven Komponente sind die τ^- -Bahnen der beiden unzerlegbar-projektiven Moduln P_1 und P_2 durch die gestrichelten Linien angedeutet. Im mittleren Teil sind die homogenen Röhren angedeutet, in denen die unzerlegbaren, regulären Moduln liegen. Es gibt unendlich viele dieser Röhren. Die präinjektive Komponente, die im rechten Teil der Auslander-Reiten Gattung angedeutet ist, besteht, wie bereits erwähnt, aus den – wieder gestrichelt angedeuteten – τ -Bahnen der beiden unzerlegbar-injektiven Moduln. Jeder Morphismus von einem präprojektiven Modul in einen präinjektiven Modul faktorisiert über einen regulären Modul.

Die (beschränkte) derivierte Kategorie $D^b(\Lambda)$ von $\text{mod}(\Lambda)$ ist, da Λ erblich ist, von der Form

$$D^b(\Lambda) = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} \text{mod}(\Lambda)[n].$$

Das bedeutet, dass $D^b(\Lambda)$ die additive Hülle der disjunkten Vereinigung von unendlich vielen Kopien von $\text{mod}(\Lambda)$ ist. In jedem Grad gibt es dabei die Morphismen der ursprünglichen Kategorie, und für $N \in \text{mod}(\Lambda)[n]$, $M \in \text{mod}(\Lambda)[m]$ gilt $\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(M, N) = \text{Ext}_{\text{mod}(\Lambda)}^{n-m}(M, N)$. Für nähere Details zur Definition der derivierten Kategorie verweisen wir auf die einschlägige Literatur, wie zum Beispiel [15].

Innerhalb von $D^b(\Lambda)$ bilden wir nun die Kategorie $\mathcal{H} = \mathcal{Q}[-1] \vee \mathcal{P} \vee \mathcal{R}$. Man kann sich den Auslander-Reiten Köcher dieser Kategorie, grob gesprochen, so vorstellen, dass man im Auslander-Reiten Köcher von $\text{mod}(\Lambda)$ rechts die präinjektive Komponente entfernt und links an präprojektive Komponente anfügt.

\mathcal{H} ist wieder eine abelsche, erbliche Kategorie (vgl. [19]). Die Verwendung von \mathcal{H} anstelle von $\text{mod}(\Lambda)$ hat gewisse Vorteile. So liefert die Auslander-Reiten-Translation τ auf dieser Kategorie eine Autoäquivalenz, und wir erhalten die Auslander-Reiten-Formel in der Form $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(X, Y) \cong D\text{Hom}_{\mathcal{H}}(Y, \tau X)$ für alle Objekte X, Y in \mathcal{H} . In einem eher geometrischen Kontext ist diese Isomorphie auch als *Serre-Dualität* bekannt. Weiterhin sind die tubularen Shifts, die im nächsten Abschnitt definiert werden, auf dieser Kategorie \mathcal{H} erklärt und können als Autoäquivalenzen auf ganz \mathcal{H} mit der inversen Auslander-Reiten-Translation verglichen werden.

Die Kategorie \mathcal{H} erhält man im Kronecker-Fall auch als Kategorie $\text{coh}(\mathbb{P}^1(k))$ der kohärenten Garben über der projektiven Geraden. Für Bimoduln über Grundkörpern, die nicht algebraisch abgeschlossen sind, ist \mathcal{H} die Kategorie $\text{coh}(\mathbb{X})$, wobei \mathbb{X} eine glatte, (im Allgemeinen nicht-kommutative) projektive Kurve ist.

$P_1 \oplus P_2$ ist ein Kippobjekt in \mathcal{H} mit Endomorphismenring Λ . Es folgt aus der Kipptheorie, dass $D^b(\mathcal{H})$ und $D^b(\Lambda)$ äquivalent sind als triangulierte Kategorien.

Definition 2.13 (Defekt). Sei ${}_F M_G$ ein zahmer Bimodul und Λ die zugehörige Algebra. Sei $V = (A, B, \varphi)$ ein Λ -Modul. Wir definieren den Defekt $\delta(V)$ von V durch

$$\delta(V) = \begin{cases} \dim_G(B) - \dim_F(A) & \text{falls } {}_F M_G \text{ vom Typ } (2, 2) \\ \dim_F(A) - 2 \cdot \dim_G(B) & \text{falls } {}_F M_G \text{ vom Typ } (4, 1). \end{cases}$$

Der Defekt ist eine additive Funktion.

Auch für Objekte in \mathcal{H} definiert man den Begriff des Defekts. Bei den Objekten, die in $\text{mod}(\Lambda)$ präinjektiv sind, wird das Vorzeichen umgedreht und für die Objekte, die in $\text{mod}(\Lambda)$ präprojektiv bzw. regulär sind, stimmt der Defekt in \mathcal{H} mit dem in $\text{mod}(\Lambda)$ überein.

Beispiel 2.14. Im Fall eines zahmen Bimoduls vom Typ $(4, 1)$ sind die Dimensionsvektoren der unzerlegbaren Λ -Moduln aus [9](3.4.1, 1.2.5, 1.2.8) bekannt. Die unzerlegbaren, präprojektiven Moduln der τ^- -Bahn von P_2 haben die Dimensionsvektoren $(2m - 1, m)$ für $m \geq 1$. Dabei hat P_2 selbst den Dimensionsvektor $(1, 1)$. Die unzerlegbaren Moduln der τ^- -Bahn von P_1 haben die Dimensionsvektoren $(4m - 4, 2m - 1)$ für $m \geq 1$ mit $\underline{\dim}P_1 = (0, 1)$. Zu jedem solchen Dimensionsvektor gibt es, bis auf Isomorphie, genau einen unzerlegbaren, präprojektiven Modul (vgl. [9] 3.4.1).

Analog dazu gibt es zu den Dimensionsvektoren $(2m - 1, m - 1)$ und $(4m, 2m - 1)$, $m \geq 1$ bis auf Isomorphie jeweils genau einen unzerlegbaren, präinjektiven Λ -Modul.

In unseren konkreten Rechnungen spielt es zunächst keine Rolle, ob wir mit \mathcal{H} oder $\text{mod}(\Lambda)$ arbeiten. Ein Hauptaspekt dieser Arbeit ist es allerdings, die Auslander-Reiten Translation τ^- mit anderen Autoäquivalenzen auf \mathcal{H} zu vergleichen, die auf Objekten, bis auf Isomorphie, genau so operieren wie τ^- . Solche Funktoren sind zum Beispiel gegeben durch gewisse tubulare Shifts, die nun definiert werden.

2.5 Tubulare Shifts

Nun wollen wir erklären, was man unter einem tubularen Shift auf \mathcal{H} versteht. Dabei ist \mathcal{H} die erbliche Kategorie, die man auf die oben beschriebene Weise aus der Modulkategorie eines zahmen Bimoduls gewinnt. Man kann tubulare Shifts (auch tubulare Mutationen) in einem allgemeineren Kontext definieren. Wir verweisen auf [19]. Ein tubularer Shift ist eine Autoäquivalenz σ_x auf \mathcal{H} , wobei x ein Punkt aus der Indexmenge \mathbb{X} ist.

Wir betrachten also wieder einen zahmen Bimodul ${}_F M_G$, die zugehörige Algebra $\Lambda = \begin{pmatrix} G & 0 \\ M & F \end{pmatrix}$, sowie deren Modulkategorie und bilden daraus die Kategorie \mathcal{H} . Sei $x \in \mathbb{X}$ der Index einer Röhre \mathcal{U}_x und S_x ein einfaches Objekt in der Kategorie \mathcal{U}_x . Wir bilden die Kategorie $\mathcal{S}_x = \text{add}(S_x) = \{S_x^n \mid n \geq 0\}$. Dies ist per Konstruktion eine halbeinfache Kategorie.

Bezeichne \mathcal{N}_x die volle Unterkategorie von \mathcal{H} , welche diejenigen Objekte A aus \mathcal{H} mit $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{U}_x, A) = 0$ umfasst. Nun wähle $A \in \mathcal{N}_x$ und betrachte den Funktor $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(-, A)|_{\mathcal{S}_x} : \mathcal{S}_x \rightarrow \text{mod}(k)$. Dieser Funktor ist darstellbar, da \mathcal{S}_x halbeinfach ist; er ist also isomorph zu einem Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(-, A_x)|_{\mathcal{S}_x}$ für ein $A_x \in \mathcal{S}_x$. Es gilt dann offensichtlich $A_x \cong S_x^{e_x(A)}$ mit $e_x(A) = [\text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(S_x, A) : \text{End}_{\mathcal{H}}(S_x)]$.

Folglich erhält man einen natürlichen Isomorphismus $\text{End}_{\mathcal{H}}(A_x) \xrightarrow{\cong} \text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(A_x, A)$, welcher den Endomorphismus 1_{A_x} auf eine kurze exakte Sequenz

$$\eta_x : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha_A} A(x) \xrightarrow{\beta_A} A_x \longrightarrow 0$$

abbildet. Diese Sequenz nennt man eine S_x -universelle Erweiterung von A .

Satz 2.15 (Lenzing, de la Peña [19]). (a) Seien $A, N \in \mathcal{N}_x$ und $f : A \longrightarrow N$ ein Morphismus. Dann induziert dieser einen Morphismus $f_x : A_x \longrightarrow N_x$, und es existiert genau ein Morphismus $f(x) : A(x) \longrightarrow N(x)$, der das folgende Diagramm kommutativ macht.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha_A} & A(x) & \xrightarrow{\beta_A} & A_x & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow f(x) & & \downarrow f_x & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\alpha_N} & N(x) & \xrightarrow{\beta_N} & N_x & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(b) Es gibt eine Autoäquivalenz $\sigma_x : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ mit $\sigma_x(N) = N(x)$ für $N \in \mathcal{N}_x$ und $\sigma_x(f) = f(x)$ für jeden Morphismus $f : A \longrightarrow N$ mit $A \in \mathcal{N}_x$.

Diesen Funktor nennt man den *tubularen Shift zum Punkt $x \in \mathbb{X}$* . Diese tubularen Shifts haben weitere interessante Eigenschaften. Deren zwei werden wir später noch verwenden und daher hier angeben.

(1) Sei $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz mit $A, A' \in \mathcal{N}_x$ und $C \cong A_x$. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm exakter Sequenzen wie folgt.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha_A} & A(x) & \xrightarrow{\beta_A} & A_x & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \cong \uparrow & & \cong \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & A' & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(2) σ_x wirkt auf Objekten in \mathcal{U}_x wie τ^- und auf \mathcal{U}_y mit $y \neq x$ wie der identische Funktor. Da alle Röhren homogen sind, wirkt σ_x also auf allen Röhren trivial.

Ein wichtiger Spezialfall ist der Folgende. Sei $P \in \mathcal{H}$ ein Objekt vom Defekt -1 und es gelte $\text{Ext}^1(S_x, P) \neq 0$. Dann erhalten wir eine S_x -universelle Erweiterung der Form

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow P(x) \longrightarrow S_x^{e(x)} \longrightarrow 0,$$

mit der *Multiplizität* $e(x) = [\text{Ext}^1(S_x, P) : \text{End}(S_x)]$. Es gilt die Formel ([17] 0.4.5)

$$[\text{End}(S_x) : k] = \frac{\varepsilon \cdot f(x) \cdot [\text{End}(P) : k]}{e(x)}, \quad (2.1)$$

mit dem *Index* $f(x) = \frac{1}{\varepsilon}[\text{Ext}^1(S_x, P) : \text{End}(P)]$ und $\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{falls } {}_F M_G \text{ vom Typ } (2, 2) \\ 2 & \text{falls } {}_F M_G \text{ vom Typ } (4, 1) \end{cases}$.

Bemerkung 2.16 (Orbit-Algebra). Sei B ein fixiertes Objekt vom Defekt -1 aus \mathcal{H} . Einem tubularen Shift σ_x ordnet man die *Orbitalgebra*

$$R = \Pi(B, \sigma_x) = \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}(B, \sigma_x^n B)$$

zu. Die Multiplikation von $f \in \text{Hom}(B, \sigma_x^n B)$ mit $g \in \text{Hom}(B, \sigma_x^m B)$ ist definiert als $g * f := \sigma_x^n(g) \circ f$. Damit wird R zu einer positiv \mathbb{Z} -graduierten Algebra.

Diese beinhaltet die Struktur der Kategorie \mathcal{H} im folgenden Sinne.

$$\mathcal{H} \cong \frac{\text{mod}^{\mathbb{Z}}(R)}{\text{mod}_0^{\mathbb{Z}}(R)}$$

Dabei wird die Serre-Unterkategorie der \mathbb{Z} -graduierten R -Moduln endlicher Länge im Sinne von Serre-Grothendiek-Gabriel herausfaktorisiert (vgl. [17]).

3 Die präprojektiven Moduln vom Defekt -1 einiger (4,1)-Bimoduln

3.1 Vorbemerkungen

In diesem Kapitel widmen wir uns der Beschreibung der präprojektiven Moduln vom Defekt -1 gewisser Bimoduln vom Dimensionstyp (4, 1). Dazu greifen wir Resultate von D. Baer aus ihrer Dissertation auf (vgl. [5]). Um diese nachvollziehbar zu machen, werden wir ausführlich auf die Beweise eingehen, die in [5] sehr knapp gehalten sind. Dazu werden wir in Kapitel 3.4 einige neue Beispiele behandeln. Wir betrachten also die zugehörige Algebra $\Lambda = \begin{pmatrix} L & 0 \\ L & k \end{pmatrix}$ des Bimoduls $k \xrightarrow{k^{LL}} L$. Dabei ist k ein kommutativer Körper, $k \subset L$ eine Schiefkörpererweiterung von k , so dass k im Zentrum von L liegt und $\dim_k L = 4$ gilt. Die Moduln dieser Algebra sind von der Form (V_2, V_1, φ) mit $V_2 \in \text{mod}(k)$, $V_1 \in \text{mod}(L)$ und $\varphi \in \text{Hom}_L(V_2 \otimes L, V_1)$.

Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es einen unzerlegbaren Modul $B(n)$ des Dimensionstyps $(2n - 1, n)$. Dies sind genau die unzerlegbaren Objekte in der Kategorie der präprojektiven

Moduln vom Defekt -1. Diese unzerlegbaren Objekte bilden wiederum selbst eine Kategorie, die wir mit \mathcal{P}_1 bezeichnen wollen.

Um diese Kategorie explizit beschreiben zu können, benötigen wir zunächst einige Informationen über den Bimodul ${}_k L_L$.

- (1) Gibt es ein Element $x \in L \setminus k : x^2 \notin k \oplus kx$, dann ist $L = k[x]$, und insbesondere ist L kommutativ.

Es sei $T^4 - aT^3 - a_2T^2 - a_1T - a_0$ das Minimalpolynom von x über k und $y = x^2$. Dann bildet $\{1, x, y, yx\}$ eine k -Basis von L und es gilt

$$\begin{aligned} y^2 &= a_0 + a_1x + a_2y + ayx, \quad a_0 \neq 0 \\ xy &= yx \\ x^2 &= y \end{aligned} .$$

Für $\text{char} k \neq 2$ kann man ohne Einschränkung annehmen, dass $a = 0$ ist (quadratische Ergänzung).

- (2) Ist $x^2 \in k \oplus kx$ für alle $x \in L \setminus k$, so wählen wir zu einem $x \in L \setminus k$ ein Element $y \in L \setminus k[x]$. Dies liefert uns sofort eine k -Basis $\{1, x, y, yx\}$ von L . Wir wollen nun wieder die Elemente x, y, xy bezüglich dieser Basis darstellen. Zunächst gilt

$$y^2 = a_0 + a_2y \quad \text{mit } a_0 \in k \setminus \{0\}, a_2 \in k \text{ und}$$

$$x^2 = c_0 + c_1x \quad \text{mit } c_0 \in k \setminus \{0\}, c_1 \in k.$$

Wir wissen weiter, dass xy eine Darstellung der Form $xy = b_0 + b_1x + b_2y + byx$, mit $b_0, b_1, b_2, b \in k$, besitzt. Hier ist aus Dimensionsgründen $b \neq 0$, da man ebensogut als Basis $\{1, x, y, xy\}$ hätte wählen können. Um die Koeffizienten zu bestimmen, betrachten wir zunächst das Element $x + y \in L$. Es gilt nach Voraussetzung $(x + y)^2 \in k \oplus k(x + y)$. Das heißt also $(x + y)^2 = d_0 + d(x + y)$ mit $d_0, d \in k$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= x^2 + yx + xy + y^2 \\ &= c_0 + c_1x + b_0 + b_1x + b_2y + byx + a_0 + a_2y + yx \\ &= (c_0 + b_0) + (c_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)y + (1 + b)yx, \end{aligned}$$

und ein Koeffizientenvergleich liefert sofort $1 + b = 0$ und damit $b = -1$. Insbesondere ist L in diesem Falle, und falls zusätzlich $\text{char}(k) \neq 2$ gilt, nicht kommutativ. Nun betrachten wir das Element $yx \in L$. Wieder existieren nach Voraussetzung $f_0, f \in k$

mit $(yx)^2 = f_0 + fyx$. Auf der anderen Seite berechnen wir

$$\begin{aligned}
(yx)^2 &= yxyx = y(xy)x = y(b_0 + b_1x + b_2y + byx)x \\
&= (b_0y + b_1yx + b_2y^2 + by^2x)x \\
&= (b_0y + b_1yx + b_2a_0 + b_2a_2y + ba_0x + ba_2yx)x \\
&= b_0yx + b_1yx^2 + b_2a_0x + b_2a_2yx + ba_0x^2 + ba_2yx^2 \\
&= (ba_0c_0 + (b_2a_0 + ba_0c_1)x + (b_1c_0 + ba_2c_0)y + (b_0 + b_1c_1 + b_2a_2 + ba_2c_1)yx).
\end{aligned}$$

Hier liefert der Koeffizientenvergleich

$$b_2a_0 = -ba_0c_1 \Rightarrow b_2 = -bc_1 \text{ und}$$

$$b_1c_0 = -ba_2c_0 \Rightarrow b_1 = -ba_2.$$

Insgesamt erhalten wir damit folgende Darstellung.

$$\begin{array}{rcl}
y^2 = & a_0 & +a_2y \quad , \quad a_0 \neq 0 \\
xy = & b_0 & -ba_2x \quad -bc_1y \quad +byx \quad , \quad b^2 = 1 \\
x^2 = & c_0 & +c_1x \quad , \quad c_0 \neq 0
\end{array}$$

Ist $\text{char}(k) \neq 2$ so wählt man ohne Einschränkung $a_2 = c_1 = 0$.

Fassen wir beide Fälle zusammen, so kann man sagen, dass es stets eine k -Basis $\{1, x, y, yx\}$ von L gibt, und man für x^2, y^2, xy eine Darstellung der folgenden Form hat.

$$\begin{aligned}
y^2 &= a_0 + a_1x + a_2y + ayx \\
xy &= b_0 + b_1x + b_2y + byx \quad , b^2 = 1 \\
x^2 &= c_0 + c_1x + c_2y
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Analog zu oben wählt man für $\text{char}(k) \neq 2$ ohne Einschränkung $a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = 0$

Bemerkung 3.1. Obige Bedingungen zusammen mit der Forderung $a_0 \neq 0$ sind diejenigen, die D. Baer in [5] formuliert.

Wir weisen darauf hin, dass die folgenden Sätze korrekt bleiben, wann immer man eine k -Basis $\{1, x, y, yx\}$ von L hat, für die man Basisdarstellungen der Form (3.1) erhält, also auch dann, wenn man Baers Bedingung $a_0 \neq 0$ ausser Acht lässt.

Von dieser Erkenntnis werden wir im Laufe der Arbeit noch häufig Gebrauch machen. So bezeichnet $k(x)$ im Folgenden immer einen Zwischenkörper vom Grad 2 der Körpererweiterung L/k . Diese Konvention bietet enorme Vorteile, die wir in Bemerkung 3.10 eingehend an einem Beispiel diskutieren werden.

Eine notwendige Bedingung für die Richtigkeit der folgenden Sätze ist hingegen die Forderung $b^2 = 1$ und das Verschwinden des Koeffizienten vor yx in der Basisdarstellung von

x^2 .

Es ist klar, dass $B(1)$ der projektive Modul $(k, L, id : L \rightarrow L)$ ist. Wir wollen nun eine explizite Beschreibung der Moduln $B(n)$ für $n \geq 2$ angeben. Dazu benötigen wir das folgende technische Lemma.

Lemma 3.2. *Sei $n \geq 2$, sei $A = (a_{i,j}) \in M_{2n-1}(k)$ eine Lösung des Gleichungssystems*

$$G_n \begin{cases} a_{1,n+j} + (a_{n+1,n+j} - a_{1,j})x - a_{1,j+1}y - a_{n+1,j+1}xy - a_{n+1,j}x^2 = 0 \\ a_{i,n+j} + (a_{n+i,n+j} - a_{1,j})x + (a_{n+i-1,n+j} - a_{i,j+1})y - a_{n+i-1,j}yx \\ \quad - a_{n+i-1,j+1}y^2 - a_{n+i,j+1}xy - a_{n+i,j}x^2 = 0 \\ a_{n,n+j} - a_{n,j}x + (a_{2n-1,n+j} - a_{n,j+1})y - a_{2n-1,j}yx - a_{2n-1,j+1}y^2 = 0 \\ j = 1, \dots, n-1; i = 2, \dots, n-1. \end{cases}$$

Dann ist $A = \lambda E_{2n-1}$ für ein $\lambda \in k$.

Beweis. Durch vollständige Induktion nach n .

$n = 2$: Hier umfasst G_2 zwei Gleichungen. Wir setzen die oben berechneten Basisdarstellungen ein und erhalten

$$\begin{aligned} a_{1,3} + (a_{3,3} - a_{1,1})x - a_{1,2}y - a_{3,2}(b_0 + b_1x + b_2y + byx) + a_{3,1}(c_0 + c_1x + c_2y) &= 0 \\ a_{2,3} - a_{2,1}x + (a_{3,3} - a_{2,2})y - a_{3,1}yx - a_{3,2}(a_0 + a_1x + a_2y + ayx) &= 0 \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} (a_{1,3} - a_{3,2}b_0) + (a_{3,3} - a_{1,1} - a_{3,2}b_1 + a_{3,1}c_1)x + (a_{3,1}c_2 - a_{1,2} - a_{3,2})y - a_{3,2}byx &= 0 \\ (a_{2,3} - a_{3,2}a_0) + (-a_{2,1} - a_{3,2}a_1)x + (a_{3,3} - a_{2,2} - a_{3,2}a_2)y - (a_{3,1} + a_{3,2}a)yx &= 0. \end{aligned}$$

In diesen beiden Darstellungen müssen also alle Koeffizienten verschwinden. Wegen $b \neq 0$ erhält man $a_{3,2} = 0$ und sofort $a_{3,1} = 0$. Setzt man dies weiter ein, so ergibt sich $A = a_{1,1}E_3$. Sei nun $n > 2$: Sei A eine Lösung von G_n . Zunächst zeigen wir, dass

$$a_{k,j} = 0 \quad \forall k \in \{n+1, \dots, 2n-1\}; j \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.2)$$

Wir setzen dazu in G_n die bekannten Basisdarstellungen von y^2, x^2, xy ein und wissen dann,

das die Koeffizienten vor yx null sein müssen. Dies liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{n+1,j+1}b &= 0 \\ a_{n+i-1,j} + a_{n+i-1,j+1}a + a_{n+i,j+1}b &= 0 \\ a_{2n-1,j} + a_{2n-1,j+1}a &= 0 \end{aligned}$$

für $i = 2, \dots, n-1; j = 1, \dots, n-1,$

mit $n^2 - n$ Gleichungen für die $n^2 - n$ Variablen $a_{n+1,1}, \dots, a_{n+1,n}, \dots, a_{2n-1,1}, \dots, a_{2n-1,n}$. Wenn man die gerade angegebene Reihenfolge beibehält, so hat das obige Gleichungssystem die in Abbildung 2 zu sehende Koeffizientenmatrix D mit $n^2 - n = (n-1)n$ Zeilen. In den ersten $2n-2$ Zeilen rutscht im zweiten Block mit n Spalten das b immer zwei Zeilen tiefer und eine Spalte nach rechts. In diesem Block (nicht in der ganzen Matrix) ist also jede zweite Zeile eine Nullzeile.

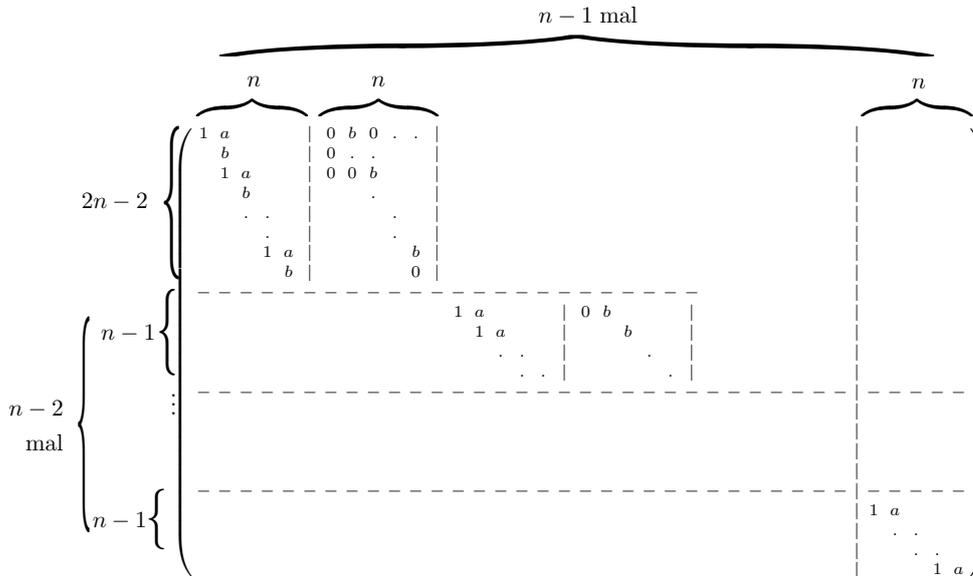


Abbildung 2: Die Matrix D

Die Determinante dieser Matrix berechnet man wie folgt. Man entwickelt jeweils nach der ersten Zeile oder der ersten Spalte. In den ersten n Entwicklungsschritten entwickelt man zunächst 3 mal nach der ersten Spalte und dann abwechselnd nach erster Zeile und erster Spalte. Dies liefert in der Determinante den Faktor b^{n-1} .

In den nächsten n Schritten entwickelt man weiter $n-2$ mal abwechselnd nach erster Zeile und erster Spalte und dann noch zweimal nach der ersten Spalte und erhält als Faktor b^{n-2} . Damit hat man zweimal n Entwicklungsschritte ausgeführt. Man entwickelt weiter in Blöcken von jeweils n Schritten.

Für $j \geq 3$ wird im j -ten Block zunächst $n - j$ mal nach der ersten Zeile und dann j mal nach der ersten Spalte entwickelt, und man erhält den Faktor b^{n-j} in der Determinante. Insgesamt ergibt sich die Determinante der obigen Matrix also zu $b^{n(n-1)/2} \neq 0$. Damit verschwinden, wie behauptet, alle in dem Gleichungssystem auftretenden Variablen. Wir fahren nun damit fort zu beweisen, dass A ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist. Dazu betrachten wir die folgenden Matrizen.

$$B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq 2n-3} = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n-1, n+1 \leq i, j \leq 2n-2}$$

$$C = (c_{i,j})_{1 \leq i, j \leq 2n-3} = (a_{i,j})_{2 \leq i, j \leq n, n+2 \leq i, j \leq 2n-1}$$

Wir werden zeigen, dass B und C das System G_{n-1} lösen, woraus dann mit Induktionsvoraussetzung unmittelbar die Behauptung folgt.

Da A eine Lösung von G_n ist, und wegen der obigen Rechnungen, gelten für $j = 1, \dots, n-1$; $i = 2, \dots, n-1$

$$a_{1,n+j} + (a_{n+1,n+j} - a_{1,j})x - a_{1,j+1}y = 0 \quad (3.3)$$

$$a_{i,n+j} + (a_{n+i,n+j} - a_{i,j})x + (a_{n+i-1,n+j} - a_{i,j+1})y = 0 \quad (3.4)$$

$$a_{n,n+j} - a_{n,j}x + (a_{2n-1,n+j} - a_{n,j+1})y = 0. \quad (3.5)$$

Setzen wir die Definition von B in die erste Gleichung von G_{n-1} ein, so folgt die Gültigkeit dieser Gleichung direkt aus (3.3) und (3.2). Für C lautet die Gleichung unter Verwendung von (3.2)

$$a_{2,n+j+1} + (a_{n+2,n+1+j} - a_{2,j+1})x - a_{2,j+2}y = 0 \text{ für } j = 1, \dots, n-2.$$

Setzt man in Gleichung (3.4) $j = j+1$, $i = 2$, so erhält man

$$a_{2,n+j+1} + (a_{n+2,n+1+j} - a_{2,j+1})x + (a_{n+1,n+j+1} - a_{2,j+2})y = 0.$$

Wir zeigen also $a_{n+1,n+j+1} = 0$. Aus (3.3) entnimmt man $a_{1,j+1} = 0$ und auch $a_{n+1,n+j+1} = a_{1,j+1}$. Damit genügt auch C der ersten Gleichung von G_{n-1} .

Auf noch einfachere Weise überzeugt man sich davon, dass B und C die zweite Gleichung von G_{n-1} lösen. Bei B ist dies wiederum nach Definition und wegen (3.4) und (3.2) sofort klar.

Um die Gültigkeit für C zu zeigen, setze $i = i+1$ und $j = j+1$ in (3.4).

Es bleibt also noch die dritte Gleichung von G_{n-1} zu betrachten.

Dass C dieser genügt, sieht man durch Ersetzen von j durch $j+1$ in (3.5). Für B lautet die dritte Gleichung unter Verwendung von (3.2)

$$a_{n-1,n+j} - a_{n-1,j}x + (a_{2n-2,n+j} - a_{n-1,j+1})y = 0 \text{ für } j = 1, \dots, n-2.$$

Setzt man $i = n-1$ in (3.4), so bleibt noch zu zeigen, dass $a_{2n-1,n+j} = 0$ für alle $j =$

$$C(n)A = \begin{pmatrix} a_{1,1} + a_{n+1,1}x & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,2n-1} + a_{n+1,2n-1}x \\ a_{2,1} + a_{n+1,1}y + a_{n+2,1}x & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2,2n-1} + a_{n+1,2n-1}y + a_{n+2,2n-1}x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} + a_{2n-2,1}y + a_{2n-1,1}x & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1,2n-1} + a_{2n-2,2n-1}y + a_{2n-1,2n-1}y \\ a_{n,1} + a_{2n-1,1}y & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,2n-1} + a_{2n-1,2n-1}y \end{pmatrix}$$

Wir vergleichen zunächst die Einträge der Matrizen in den ersten n Spalten, und lesen für $j = 1, \dots, n$ und $i = 2, \dots, n-1$ das folgende Gleichungssystem ab.

$$\begin{aligned} b_{1,j} &= a_{1,j} + a_{n+1,j}x \\ b_{i,j} &= a_{i,j} + a_{n+i-1,j}y + a_{n+i,j}x \\ b_{n,j} &= a_{n,j} + a_{2n-1,j}y \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nun betrachten wir die Einträge in den Spalten $n+1, \dots, 2n-1$. Zunächst erhält man in der ersten Zeile – wenn man die $b_{i,j}$ mit Hilfe obiger Gleichungen ersetzt –

$$a_{1,j}x + a_{n+1,j}x^2 + a_{1,j+1}y + a_{n+1,j+1}xy = a_{1,n+j} + a_{n+1,n+j}x \text{ für } j = 1, \dots, n+1.$$

Dies ist gerade die erste Gleichung des Systems G_n aus dem vorherigen Lemma.

Verfährt man genauso für die Zeilen 2 bis $n-1$, so erhält man für alle $i = 2, \dots, n-1$ und $j = 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} a_{i,j}x + a_{n+i-1,j}yx + a_{n+i,j}x^2 + a_{i,j+1}y + a_{n+i-1,j+1}y^2 + a_{n+i,j+1}xy \\ = a_{i,n+j} + a_{n+i-1,n+j}y + a_{n+i,n+j}x, \end{aligned}$$

was gerade die zweite Gleichung von G_n ist.

Die Gleichheit der Einträge in der letzten Zeile liefert dann noch für $j = 1, \dots, n-1$

$$a_{n,j}x + a_{2n-1,j}yx + a_{n,j+1}y + a_{2n-1,j+1}y^2 = a_{n,n+j} + a_{2n-1,n+j}y,$$

und damit löst A also G_n . Somit gilt $A = \lambda E_{2n-1}$ für $\lambda \in k$. Wegen (3.6) gilt dann auch $B = \lambda E_{2n-1}$ und $\text{End}(B(n)) \cong k$. \square

3.3 Beschreibung der Morphismenräume

Lemma 3.4. *Es bezeichne $(B(n))_{n \in \mathbb{N}}$ die Familie der unzerlegbaren, präprojektiven Modulen vom Defekt -1. Dann besitzt der k -Vektorraum $\text{Hom}(B(n), B(n+1))$ eine k -Basis $\{X_n = (\overline{X_n}, \overline{X_n}), Y_n = (\overline{Y_n}, \overline{Y_n}), Z_n = (\overline{Z_n}, \overline{Z_n})\}$. Hier sind $\overline{X_n}, \overline{Y_n}, \overline{Z_n} \in M_{2n+1, 2n-1}(k)$ und $\overline{\overline{X_n}}, \overline{\overline{Y_n}}, \overline{\overline{Z_n}} \in M_{n+1, n}(L)$ mit:*

(a)

$$\overline{Y}_n = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & & & & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & & & & & & & \\ & & & & \cdot & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \hline 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & & & & & & & & & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{array} \right), \quad \overline{\overline{Y}}_n = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{X}_n = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 & & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \hline 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & 1 & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & & & & & & 1 \end{array} \right), \quad \overline{\overline{X}}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ E_n \end{pmatrix}.$$

Bei diesen Matrizen hat jeweils der linke Block n und der rechte Block $n-1$ Spalten.

(b) Für $\overline{Z}_n = (z_{i,j})_{1 \leq i \leq 2n+1, 1 \leq j \leq 2n-1}$ gilt $z_{1,1} = 0 = z_{n+1,n}$ und $\overline{\overline{Z}}_n = (z_{i,j})_{n+2 \leq i \leq 2n+1, 1 \leq j \leq n}$ hat die folgende Form.

$$\begin{pmatrix} (-1)^{n-1} b^{n-1} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ (-1)^{n-1} \binom{n-1}{1} b^{n-2} a & (-1)^{n-2} b^{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-2} b a^{n-2} & (-1)^{n-2} \binom{n-2}{n-3} b a^{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot & -b & 0 \\ (-1)^{n-1} a^{n-1} & (-1)^{n-2} a^{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & -a & 1 \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist dann $\overline{\overline{Z}}_n$ invertierbar und sowohl die restlichen Einträge von $\overline{\overline{Z}}_n$ als

auch die Einträge von $\overline{\overline{Z}}_n$ werden durch \overline{Z}'_n eindeutig bestimmt.

Beweis. Man rechnet leicht nach, dass X_n, Y_n linear unabhängige Morphismen sind. Sei nun $Z_n = (\overline{Z}_n, \overline{\overline{Z}}_n)$ ein Paar von Matrizen des entsprechenden Formats. Damit es sich um einen Morphismus handelt, muss $C(n+1)\overline{\overline{Z}}_n = \overline{\overline{Z}}_n C(n)$ gelten. Sei hier $\overline{Z}_n = (z_{i,j})_{1 \leq i \leq 2n+1, 1 \leq j \leq 2n-1}$ und $\overline{\overline{Z}}_n = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq n}$, dann sehen die beiden Seiten obiger Gleichung aus wie folgt.

$$C(n+1)\overline{\overline{Z}}_n = \begin{pmatrix} z_{1,1} + z_{n+2,1}x & \cdot & \cdot & \cdot & z_{1,2n-1} + z_{n+2,2n-1}x \\ z_{2,1} + z_{n+2,1}y + z_{n+3,1}x & \cdot & \cdot & \cdot & z_{2,2n-1} + z_{n+2,2n-1}y + z_{n+3,2n-1}x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n,1} + z_{2n,1} + z_{2n+1,1}x & \cdot & \cdot & \cdot & z_{n,2n-1} + z_{2n,2n-1}y + z_{2n+1,2n-1}x \\ z_{n+1,1} + z_{2n+1,1}y & \cdot & \cdot & \cdot & z_{n+1,2n-1} + z_{2n+1,2n-1}y \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{Z}}_n C(n) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1,n} & b_{1,1}x + b_{1,2}y & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1,n-1}x + b_{1,n} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ b_{n+1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{n+1,n} & b_{n+1,1}x + b_{n+1,2}y & \cdot & \cdot & \cdot & b_{n+1,n-1}x + b_{n+1,n}y \end{pmatrix}$$

Vergleichen wir nun zunächst die Einträge in den ersten n Zeilen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} b_{1,j} &= z_{1,j} + z_{n+2,j}x \\ b_{t,j} &= z_{t,j} + z_{n+t,j}y + z_{n+t+1,j}x \\ b_{n+1,j} &= z_{n+1,j} + z_{2n+1,j}y \\ &\text{für } j = 1, \dots, n; t = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Aus den übrigen Spalten erhält man die Bedingungen

$$\begin{aligned} b_{1,j}x + b_{1,j+1}y &= z_{1,n+j} + z_{n+2,n+j}x \\ b_{t,j}x + b_{t,j+1}y &= z_{t,n+j} + z_{n+t,n+j} + z_{n+t+1,n+j}x \\ b_{n+1,j}x + b_{n+1,j+1}y &= z_{n+1,n+j} + z_{2n+1,n+j}y \\ &\text{für } j = 1, \dots, n-1; t = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Damit sieht man, wie sich die Einträge von $\overline{\overline{Z}}_n$ aus denen von \overline{Z}_n auf eindeutige Weise bestimmen lassen. Insbesondere impliziert die lineare Abhängigkeit von $\overline{X}_n, \overline{Y}_n, \overline{\overline{Z}}_n$ schon die von $\overline{X}_n, \overline{Y}_n, \overline{\overline{Z}}_n$, so dass wir uns im weiteren Beweis auf die erste Komponente der Morphismen konzentrieren können.

Kombinieren wir die beiden Gleichungssysteme von oben miteinander, so erhalten wir, dass Z_n genau dann ein Morphismus in $\text{Hom}(B(n), B(n+1))$ ist, wenn die Einträge von $\overline{Z_n}$ dem folgenden Gleichungssystem genügen.

$$z_{1,n+t} + (z_{n+2,n+t} - z_{1,t})x - z_{1,t+1}y - z_{n+2,t+1}xy - z_{n+2,t}x^2 = 0 \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} z_{j,n+t} + (z_{n+j+1,n+t} - z_{j,t})x + (z_{n+j,n+t} - z_{j,t+1})y - z_{n+j,t}yx \\ - z_{n+j,t+1}y^2 - z_{n+j+1,t+1}xy - z_{n+j+1,t}x^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$z_{n+1,n+t} - z_{n+1,t}x + (z_{2n+1,n+t} - z_{n+1,t+1})y - z_{2n+1,t}yx - z_{2n+1,t+1}y^2 = 0 \quad (3.9)$$

für $j = 2, \dots, n; t = 1, \dots, n-1$.

Es bezeichne $U(n)$ den von X_n, Y_n erzeugten Unterraum. Wir zeigen nun, dass Z_n genau dann in $U(n)$ ist, wenn $z_{2n+1,n} = 0$ gilt.

Falls $Z_n \in U(n)$, so ist die Aussage offensichtlich.

Sei also umgekehrt Z_n ein Morphismus mit $z_{2n+1,n} = 0$. Setzt man dies in (3.9) ein, so erhält man, indem man von $t = n-1$ ausgehend t schrittweise verkleinert, dass $z_{n+1,j} = 0 \forall j \neq n$, $z_{2n+1,j} = 0 \forall j \neq 2n-1$ und $z_{n+1,n} = z_{2n+1,2n-1} =: \mu$.

Wir definieren nun $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2n-1} \in M_{2n-1}(k)$ durch

$$a_{i,j} = \begin{cases} z_{i,j} & 1 \leq i \leq n, i \neq j+1 \\ z_{i,j} - \mu & 1 \leq i \leq n, i = j+1 \\ z_{i+1,j} & n+1 \leq i \leq 2n-1, i \neq j+1 \\ z_{i,j+1} - \mu & n+1 \leq i \leq 2n-1, i = j+1. \end{cases}$$

Man rechnet nun leicht nach, dass A wegen (3.7) und (3.8) das Gleichungssystem G_n in Lemma 3.2 löst. Damit gilt also $A = \lambda E_n$ für ein $\lambda \in k$. Dies bedeutet, nach Wahl von A , dass $\overline{Z_n} = \lambda \overline{Y_n} + \mu \overline{X_n}$ und schließlich $Z_n = \lambda Y_n + \mu X_n$ ist. Wählen wir also einen Morphismus $Z_n \notin U(n)$ mit $z_{2n+1,n} = 1$, so können wir auch $z_{n+1,n} = z_{1,1} = 0$ annehmen, da man sonst lediglich $Z_n - z_{1,1}Y_n - z_{n+1,n}X_n$ wählen muss, um einen weiteren Morphismus $\notin U(n)$ mit $z_{2n+1,n} = 1$ zu erhalten.

Wir setzen nun in die Gleichungen (3.7), (3.8) und (3.9) unsere Basisdarstellungen aus (3.1) ein, und erhalten, nachdem bereits drei Einträge von $\overline{Z_n}$ festgelegt wurden, $4n^2 - 4$ Gleichungen für die verbliebenen $4n^2 - 4$ unbekannt Einträge von $\overline{Z_n}$, die diese eindeutig bestimmen. Nun müssen alle Koeffizienten vor den Basiselementen verschwinden.

Zunächst betrachten wir die Koeffizienten vor yx . Dies liefert das System

$$z_{n+2,t+1}b = 0$$

$$z_{n+j,t} + z_{n+j,t+1}a + z_{n+j+1,t+1}b = 0$$

$$z_{2n+1,t} + z_{2n+1,t+1}a = 0$$

für $j = 2, \dots, n; t = 1, \dots, n-1$.

Man sieht durch Einsetzen, dass es genau die Einträge von \overline{Z}_n sind, die dieses System lösen. Alle Einträge von \overline{Z}_n werden durch diese eindeutig bestimmt, denn man erhält drei weitere Gleichungssysteme für die Koeffizienten vor $1, x, y$. Zunächst die Koeffizienten vor 1 :

$$\begin{aligned} z_{1,n+t} - z_{n+2,t+1}b_0 - z_{n+2,t}c_0 &= 0 \\ z_{j,n+t} - z_{n+j,t+1}a_0 - z_{n+j+1,t+1}b_0 - z_{n+j+1,t}c_0 &= 0 \\ z_{n+1,n+t} - z_{2n+1,t+1}a_0 &= 0 \end{aligned}$$

für $j = 2, \dots, n; t = 1, \dots, n-1$.

Die Koeffizienten vor x :

$$\begin{aligned} z_{n+2,n+t} - z_{1,t} - z_{n+2,t}c_1 &= 0 \\ z_{n+j+1,n+t} - z_{j,t} - z_{n+j,t+1}a_1 - z_{n+j+1,t+1}b_1 - z_{n+j+1,t}c_1 &= 0 \\ z_{n+1,t} + z_{2n+1,t+1}a_1 &= 0 \end{aligned}$$

für $j = 2, \dots, n; t = 1, \dots, n-1$.

Die Koeffizienten vor y :

$$\begin{aligned} z_{1,t+1} + z_{n+2,t+1}b_2 + z_{n+2,t}c_2 &= 0 \\ z_{n+j,n+t} - z_{j,t+1} - z_{n+j,t+1}a_2 - z_{n+j+1,t+1}b_2 - z_{n+j+1,t}c_2 &= 0 \\ z_{2n+1,n+t} - z_{n+1,t+1} - z_{2n+1,t+1}a_2 &= 0 \end{aligned}$$

für $j = 2, \dots, n; t = 1, \dots, n-1$.

Eine einfache Rechnung liefert also alle Einträge von \overline{Z}_n . Damit ist sowohl die lineare Unabhängigkeit als auch die Erzeugendensystem-Eigenschaft gezeigt, und unser Beweis ist beendet. \square

Bemerkung 3.5. Die Morphismen X_n, Y_n und Z_n sind für jedes natürliche n allesamt Monomorphismen (vgl. [6] Lemma 2.1).

3.4 Erzeugende und Relationen

Es sei stets ${}_k L_L$ ein zahmer (4,1)-Bimodul. Wir verwenden nun unsere oben angestellten Berechnungen, um in einigen wichtigen Beispielen die Relationen zu bestimmen, die zwischen den Verknüpfungen von je zwei Basiselementen zweier aufeinanderfolgender Morphismenräume gelten. Wir werden die Matrizen und Relationen stets nur für die erste Komponente angeben. Diese bedingt unmittelbar die zweite Komponente, wie im letzten Beweis zu sehen war. Weiterhin werden wir bei der Notation der Morphismen häufig die Indizes unterdrücken. So meint beispielsweise X^2 die Verknüpfung $X_{n+1}X_n$. Diese Schreibweise ist sinnvoll, falls die Relationen shift-invariant sind, also nicht vom Index n abhängen. Behandelt werden der Reihenfolge nach die Beispiele

1. $k \subset k(x) \subset k(x, y) = L$, mit $x^2 = c_0 \in k, y^2 = a_0 + a_1x, a_0, a_1 \in k$ und $xy = yx$,
2. $k \subset k(x) \subset k(x, y) = L$, mit $x^2 = c_0 \in k, y^2 = a_0 \in k$ und $xy = b_0 + byx$,
3. Die Quaternionen in Charakteristik 2,
4. $\text{char}(k) = 2$ und $k \subset k(x) \subset k(x, y) = L$ ein Körperturm in dem beide Zwischenerweiterungen zyklisch vom Grad 2 sind.

Dabei ist k stets ein Körper und L/k eine Schiefkörpererweiterung mit $[L : k] = 4$, so dass k im Zentrum von L liegt. Basisdarstellungen wie in 1. erhält man zum Beispiel im Fall $L = k(\sqrt[4]{c_0})$, und Darstellungen wie in 2. erhält man beispielsweise für $L = k(\sqrt{c_0}, \sqrt{a_0})$. Für all unsere Beispiele benötigen wir unter anderem

$$Y_{n+1}Y_n = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_{n+1}X_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ E_n & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Hier bezeichnet E_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix, und die 0 steht für die Nullmatrizen der entsprechenden Formate. Es gilt stets $X_{n+1}Y_n = Y_{n+1}X_n$.

Beispiel 3.6. Sei $k \subset k(x) \subset k(x, y) = L$ ein Körperturm, derart dass beide Zwischenerweiterungen vom Grad 2 sind, und die folgenden Relationen gelten.

$$\begin{aligned} x^2 &= c_0 \\ y^2 &= a_0 + a_1x \\ xy &= yx. \end{aligned}$$

hier nicht gegeben. Die Relationen lauten

$$\begin{aligned}
X_{n+1}Y_n &= Y_{n+1}X_n \\
Z_{n+1}X_n &= X_{n+1}Z_n + X_{n+1}Y_n \\
Y_{n+1}Z_n &= Z_{n+1}Y_n + X_{n+1}Y_n + a_1X_{n+1}X_n \\
Z_{n+1}Z_n &= c_0Y_{n+1}Y_n + (a_0 + (n-1)a_1)X_{n+1}X_n + Y_{n+1}Z_n + X_{n+1}Z_n.
\end{aligned}$$

Da in diesem Fall keine shift-invarianten Relationen vorliegen, liefert die einfache Zuordnung $n \mapsto n+1$ keinen k -linearen Funktor. Weiterhin wird im Folgenden die Zentralität des Elementes X benötigt, damit der interessante Vergleich der inversen Auslander-Reiten-Translation mit einem tubularen Shift σ_x möglich ist. Wir definieren daher eine neue Basis $X, \underline{Y}, \underline{Z}$, so dass sich shift-invariante Relationen ergeben und X zentral operiert. Dann betrachten wir den Funktor, der durch die Zuordnung $n \mapsto n+1$ induziert wird, und bezeichnen ihn ebenfalls mit σ . Wir setzen $\underline{Y}_n = Y_n$ und $\underline{Z}_n = Z_n + (n-1)Y_n$. Damit erhalten wir die Relationen

$$\begin{aligned}
X_{n+1}\underline{Y}_n &= \underline{Y}_{n+1}X_n \\
\underline{Y}_{n+1}\underline{Z}_n &= \underline{Z}_{n+1}\underline{Y}_n + X_{n+1}\underline{Y}_n + a_1X_{n+1}X_n + \underline{Y}_{n+1}\underline{Y}_n \\
\underline{Z}_{n+1}X_n &= X_{n+1}\underline{Z}_n \\
\underline{Z}_{n+1}\underline{Z}_n &= c_0\underline{Y}_{n+1}\underline{Y}_n + a_0X_{n+1}X_n + X_{n+1}\underline{Z}_n.
\end{aligned}$$

X agiert also zentral und alle Relationen sind shift-invariant. Das heisst, dass σ in der Tat ein k -linearer Funktor ist und dass σ mit einem tubularen Shift σ_x übereinstimmt (vgl. Satz 3.13).

Bemerkung 3.12. Das obige Beispiel deckt insbesondere den Fall $\text{char}(k) = 2$, $[L : k] = 4$ mit endlichen Körpern k und L ab.

Der folgende wichtige Satz stellt eine Verbindung zwischen den obigen Rechnungen und den tubularen Shifts her. Der Beweis stammt aus [16] (Theorem 5.1), wir geben ihn hier aber der Vollständigkeit halber an, da der Satz eine zentrale Rolle spielt.

Satz 3.13. *Sei ${}_kL_L$ ein zahmer (4,1)-Bimodul. Sei σ als Funktor wie in Definition 3.9 durch die Zuordnung $n \mapsto n+1$ induziert. Dann stimmt σ auf \mathcal{P}_1 mit einem tubularen Shift σ_x überein. Dabei ist x der Index der Röhre, die als einfaches Objekt die Darstellung $S_x = (k^2 \otimes L \xrightarrow{(1,x)} L)$ enthält.*

Beweis. Zunächst wird gezeigt, dass der Monomorphismus $X_n : B(n) \longrightarrow B(n+1)$ für jedes natürliche n einen zu $S_x = (k^2 \otimes L \xrightarrow{(1,x)} L)$ isomorphen Cokern hat. Dazu fixieren wir als L -Basis von L^{n+1} die Vektoren e_1, \dots, e_{n+1} und definieren $f : L^{n+1} \longrightarrow L$ durch $f(e_1) = e_1$

und $f(e_j) = 0$ für $j = 2, \dots, n+1$. Als L -Basis von $k^{2n+1} \otimes L$ wählen wir $e_1 \otimes 1, \dots, e_{2n+1} \otimes 1$ und setzen dann $g : k^{2n+1} \otimes L \rightarrow k^2 \otimes L$, mit $g(e_1 \otimes 1) = e_1 \otimes 1, g(e_{n+2} \otimes 1) = e_2 \otimes 1$ und $g(e_j \otimes 1) = 0$ für $j \neq 1, n+2$. Damit erhalten wir das folgende Diagramm.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & k^{2n-1} \otimes L & \xrightarrow{\overline{X}_n \otimes 1} & k^{2n+1} \otimes L & \xrightarrow{g} & k^2 \otimes L \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow C(n) & & \downarrow C(n+1) & & \downarrow \varphi \\ 0 & \longrightarrow & L^n & \xrightarrow{\overline{X}_n} & L^{n+1} & \xrightarrow{f} & L \longrightarrow 0 \end{array}$$

Die Abbildungen f und g sind gerade so konstruiert, dass die beiden Zeilen exakte Sequenzen sind, und damit existiert eine eindeutige L -lineare Abbildung φ , die das Diagramm kommutativ macht. Man sieht nach Einsetzen der Definitionen von X_n und $C(n+1)$, dass $\varphi = (1, x)$ gelten muss. Die Darstellung S_x ist, wie man leicht am Dimensionsvektor abliest, einfach-regulär. Es gibt also eine Röhre \mathcal{U}_x in \mathcal{H} , die als einfaches Objekt gerade S_x enthält. Wir bezeichnen mit σ_x den tubularen Shift zu dieser Röhre. Es ist $\text{End}(S_x) \cong k(x)$ vermöge

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta c_0 \\ \beta & \alpha + \beta c_1 \end{pmatrix} \mapsto \alpha + \beta x.$$

Wir haben nun die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow B(n) \xrightarrow{X_n} B(n+1) \longrightarrow S_x \longrightarrow 0. \quad (3.10)$$

Eine S_x -universelle Erweiterung von $B(n)$ ist von der Form

$$0 \longrightarrow B(n) \longrightarrow B(n)(x) \longrightarrow S_x^{e(x)} \longrightarrow 0.$$

Der Dimensionsvektor von S_x ist ein Erzeuger des Radikals der Grothendieckgruppe $K_0(\mathbb{X})$ von \mathcal{H} . Dieses besteht genau aus den Dimensionsvektoren der Form $(2n, n)$ für $n \geq 1$. Daher folgt $f(x) = 1$ (vgl. [17] 0.3.12, 0.3.15, 0.4.5). Setzen wir dies, zusammen mit $\varepsilon = 1$, in Gleichung (2.1) ein, so ergibt sich $e(x) = 1$, da nach Satz 3.3 $\text{End}(B(n)) \cong k$ gilt. Mit der Eigenschaft des tubularen Shifts, die wir in Kapitel 2.5 unter (2) notiert haben, erhalten wir das folgende kommutative Diagramm exakter Folgen.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B(n) & \xrightarrow{X_n} & B(n+1) & \longrightarrow & S_x \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \cong \uparrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & B(n) & \longrightarrow & B(n)(x) & \longrightarrow & S_x \longrightarrow 0 \end{array}$$

Damit ist also (3.10) eine S_x -universelle Erweiterung für $B(n)$ und auf Objekten stimmt σ mit σ_x überein. Wegen der Zentralität von X kommutiert folgendes Diagramm für jeden

Morphismus $\alpha : B(n) \longrightarrow B(n+1)$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B(n) & \xrightarrow{X_n} & B(n+1) & \longrightarrow & S_x \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \sigma(\alpha) & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & B(n+1) & \xrightarrow{X_{n+1}} & B(n+2) & \longrightarrow & S_x \longrightarrow 0 \end{array}$$

Insgesamt stimmen also σ_x und σ auf \mathcal{P}_1 überein. \square

Bemerkung 3.14. Die in den Beispielen berechneten Relationen sind bereits für sich genommen interessant und auch von Bedeutung für den Vergleich von σ und σ_x . Unter gewissen Voraussetzungen beinhalten diese Relationen darüber hinaus bereits die benötigten Informationen, um die Kategorie \mathcal{H} zu beschreiben, wie nun erläutert wird. Sei k ein Körper und L eine Schiefkörpererweiterung vom Grad 4 über k . Der Begriff Schiefkörpererweiterung meint in dieser Arbeit stets, dass L ein Schiefkörper ist, der k in seinem Zentrum enthält. $B(n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichne die Familie der präprojektiven Moduln vom Defekt -1 des zahmen Bimoduls ${}_k L_L$. Für jedes natürliche n hat dann der Vektorraum $\text{Hom}(B(n), B(n+2))$ die Basis X^2, Y^2, YX, ZX, ZY (vgl. [5] 1.3.4).

Weiterhin gelte $XY = YX$, $XZ = ZX$, und

$$\begin{aligned} \rho_1 &= YZ - \eta_1(ZX, XY, ZY, X^2, Y^2) = 0 \quad , \text{ sowie} \\ \rho_2 &= Z^2 - \eta_2(ZX, XY, ZY, X^2, Y^2) = 0 \end{aligned}$$

seien shift-invariante Relationen wie in den obigen Beispielen. Aus Satz 3.13 folgt dann, dass die Orbitalgebra $R = \Pi(B(1), \sigma_x)$ von der folgenden Form ist.

$$R = \bigoplus_{n \geq 1} \text{Hom}(B(1), B(n)) \cong k[X, Y, Z]/(XY - YX, XZ - ZX, \rho_1, \rho_2).$$

Mit dieser Algebra R gilt dann

$$\mathcal{H} \cong \frac{\text{mod}^{\mathbb{Z}}(R)}{\text{mod}_0^{\mathbb{Z}}(R)}. \quad (3.11)$$

Für nähere Informationen verweisen wir auf [17].

4 Vergleich von σ_x und τ^-

Dieses Kapitel ist das Kernstück der Arbeit. Wir werden die Rechnungen des vorigen Kapitels dazu verwenden, in mehreren wichtigen Beispielen einen Vergleich zwischen dem tubularen Shift σ_x , mit x wie in 3.13, und der inversen Auslander-Reiten Translation τ^- herzustellen. Dies geschieht in folgenden Beispielklassen.

1. $L = k(\sqrt{c_0}, \sqrt{a_0})/k$ mit $[L : k] = 4$ und $\text{char}(k) \neq 2$,
2. $L = k(\sqrt[4]{c_0})/k$ mit $[L : k] = 4$ und $\text{char}(k) \neq 2$,
3. Die Quaternionen in Charakteristik 2,
4. Endliche Körper in $\text{char}(k) \neq 2$,
5. $\text{char}(k) = 2$ und $k \subset k(x) \subset k(x, y) = L$ ein Körperturm in dem beide Zwischenerweiterungen zyklisch vom Grad 2 sind.

Definition 4.1 (Geistergruppe). Sei L/k eine Schiefkörpererweiterung vom Grad 4 und ${}_k L_L$ der zugehörige zahme $(4, 1)$ -Bimodul. Die *Geistergruppe* \mathcal{G} besteht aus allen Isomorphieklassen von Autoäquivalenzen auf \mathcal{H} , die jedes Objekt bis auf Isomorphie festlassen. Für die in der Folge betrachteten Beispielklassen findet man Näheres über diese Gruppe in [16].

Für einen $(2, 2)$ -Bimodul hat Kussin in [17] bereits das folgende Beispiel angegeben, wo sich die Auslander-Reiten Translation τ^- und das Quadrat eines tubularen Shifts um einen nicht-trivialen Geist unterscheiden.

Satz 4.2 (Kussin). Sei $k = \mathbb{R}$ und M der zahme $(2, 2)$ -Bimodul ${}_C \mathbb{C}_C \oplus_C \mathbb{C}_{\bar{C}}$. Das bedeutet, dass $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ die kanonische \mathbb{C} -Linksmodulstruktur trägt und $(x, y)\alpha = (x\alpha, y\bar{\alpha})$ die Rechtsmodulstruktur definiert. Dann gilt $\tau \cong \sigma_x^{-2} \circ G$. Dabei ist G der Geist auf \mathcal{H} , der durch komplexe Konjugation gegeben ist.

Für den Fall $k = \mathbb{R}$ gibt es in der Tat auch nur fünf verschiedene zahme $(2, 2)$ -Bimoduln, und der in der Proposition angegebene ist der einzige, der eine nicht-triviale Geistergruppe besitzt. Für nähere Details verweisen wir erneut auf [17].

Unter anderem dieses Ergebnis führt zu der kanonischen Frage, inwiefern sich die inverse Auslander-Reiten Translation und solche tubularen Shifts, die auf Objekten wie τ^- wirken, im Falle eines $(4, 1)$ -Bimoduls unterscheiden. Zum Vergleich der beiden Funktoren τ^- und σ_x betrachten wir den Funktor $F = \tau \circ \sigma_x$. Man kann sich, grob gesprochen, vorstellen, dass dieser Funktor den Unterschied zwischen σ_x und τ^- misst. Dies definiert offensichtlich einen Geist auf \mathcal{H} . Auf der Kategorie \mathcal{P}_1 stimmt F mit $C^+ \circ \sigma$ überein. Letzteren Funktor berechnen wir konkret auf der vollen Unterkategorie, die gegeben ist durch $B(1)$ und $B(2)$. Diese wollen wir im Folgenden stets mit \mathcal{B} bezeichnen. Nach der Bestimmung von F auf \mathcal{B} verwenden wir Kussins Resultate über die Geistergruppe um zu schließen, wie F sich auf ganz \mathcal{H} verhält.

Für die konkrete Berechnung von C^+ benötigen wir einen Isomorphismus ${}_k L_L \cong \text{Hom}_k({}_L L_k, k)$. Es ist natürlich ${}_k L_L \cong \text{Hom}_L({}_L L_k, L)$ durch $z \mapsto \varphi_z$ mit $\varphi_z(l) = zl$. Der Beweis des folgenden Lemmas aus [9] liefert eine konkrete Konstruktion des gesuchten Bimodulisomorphismus. Aus diesem Grunde präsentieren wir auch den Beweis, wobei wir uns auf den für

uns interessanten Spezialfall beschränken, dass der Kleinere der beiden (Schief)körper mit dem Grundkörper übereinstimmt.

Lemma 4.3. *Sei k ein Körper und L ein Schiefkörper, der k in seinem Zentrum enthält und über k endlichdimensional ist. Dann ist $\text{Hom}_k({}_L L_k, k) \cong \text{Hom}_L({}_L L_k, L)$ als k - L -Bimoduln.*

Beweis. Zunächst gibt es eine von null verschiedene k -lineare Abbildung $\mu : L \rightarrow k$, mit $\mu(l_1 l_2) = \mu(l_2 l_1)$ für alle $l_1, l_2 \in L$.

Falls L kommutativ ist, wählen wir für μ die Projektion von L auf $k \cdot 1$.

Andernfalls bezeichne K_1 das Zentrum von L und $tr : L \rightarrow K_1$ die reduzierte Spur. Dann ist $tr \neq 0$ und $tr(l_1 l_2) = tr(l_2 l_1)$ für alle $l_1, l_2 \in L$ (vgl. [20], Seite 169). Sei also $l \in L$ mit $tr(l) = z \neq 0, z \in K_1$. Dann setze $\mu = \pi \circ tr$, wobei π die Projektion von K_1 auf $k \cdot z$ ist.

In beiden Fällen haben wir also eine Abbildung μ mit den gewünschten Eigenschaften gefunden.

Wir setzen

$$f : \text{Hom}_L({}_L L_k, L) \rightarrow \text{Hom}_k({}_L L_k, k), \quad \varphi \mapsto \mu \circ \varphi.$$

Dies ist ein Bimodulhomomorphismus wegen der Eigenschaft von μ . Weiter ist jedes von null verschiedene Element in $\text{Hom}_L({}_L L_k, L)$ surjektiv, und wegen $\mu \neq 0$ ist f dann injektiv. Die Gleichheit der k -Dimensionen liefert nun, dass f ein Isomorphismus ist und damit die Behauptung. \square

In den konkreten Rechnungen wird nun die Umkehrabbildung des so konstruierten Isomorphismus ${}_k L_L \cong \text{Hom}_k({}_L L_k, L)$ benötigt. Diese zu konstruieren ist nicht auf kanonische Weise möglich, sondern führt auf ein lineares Gleichungssystem, welches es zu lösen gilt. Dazu müssen wir bereits die Koeffizienten der Basisdarstellungen (3.1) aus dem vorherigen Kapitel kennen und uns also auf Beispielklassen beschränken.

4.1 Der Fall $k(\sqrt{c_0}, \sqrt{a_0})$

In diesem Abschnitt bezeichne wie üblich k einen Körper. Wir nehmen an, dass $\text{char}(k) \neq 2$ gilt. Sei $L = k(x, y)$ eine Körpererweiterung vom Grad 4 über k . Weiter sei $k(x)$ ein Zwischenkörper vom Grad 2 und die folgenden Relationen seien erfüllt.

$$\begin{aligned} x^2 &= c_0 \in k \\ y^2 &= a_0 \in k \\ xy &= yx \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt natürlich unmittelbar, da L ein kommutativer Körper ist.

Nach obigen Vorbetrachtungen gibt es also den Isomorphismus

$$\varepsilon : {}_k L_L \longrightarrow \text{Hom}_k({}_L L_k, k), z \mapsto \mu \circ \varphi_z,$$

wobei μ die Projektion von L auf k ist und $\varphi_z(l) = zl$.

Um Berechnungen anstellen zu können, benötigen wir die Urbilder von $1^*, x^*, y^*, (yx)^*$ unter diesem Isomorphismus. Sei dazu $\Psi \in \text{Hom}_k({}_k L_L, k)$. Dann ist Ψ das Bild eines $z \in L$ unter ε , und für $m \in L$ gilt $\Psi(m) = \mu(zm)$. Für z gibt es eine Basisdarstellung $z = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 yx$, mit $\alpha_j \in k$.

Für unseren Fall erhalten wir also

$$\begin{aligned} \Psi(1) &= \mu(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 yx) = \alpha_1 \\ \Psi(x) &= \mu(\alpha_1 x + \alpha_2 c_0 + \alpha_3 yx + \alpha_4 c_0 y) = \alpha_2 c_0 \\ \Psi(y) &= \mu(\alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3 a_0 + \alpha_4 a_0 x) = \alpha_3 a_0 \\ \Psi(yx) &= \mu(\alpha_1 yx + \alpha_2 c_0 y + \alpha_3 a_0 x + \alpha_4 a_0 c_0) = \alpha_4 a_0 c_0. \end{aligned}$$

Damit wird also die k -Basis $1^*, x^*, y^*, (yx)^*$ von $\text{Hom}_k({}_L L_k, k)$ unter ε^{-1} auf die k -Basis $1, \frac{1}{c_0}x, \frac{1}{a_0}y, \frac{1}{a_0 c_0}yx$ von ${}_k L_L$ abgebildet.

Nun berechnen wir den Funktor $F = C^+ \sigma$ auf \mathcal{B} . Per Definition ist $\sigma(B(1)) = B(2)$ und $\sigma(B(2)) = B(3)$.

Berechne also $C^+(B(2)) = S_2^+ S_1^+ B(2)$, wobei $B(2) = (L^2, k^3, C(2))$ ist. Sei $S_1^+(B(2)) = (A_1, A_2, \varphi)$. Dann ist $A_2 = k^3$ und

$$A_1 = \ker C(2) = \text{Span}_L \{e_1 \otimes 1(-x) + e_2 \otimes 1(-y) + e_3 \otimes 1\} =: \text{Span}_L \{v\}.$$

Sei weiter $i : A_1 \longrightarrow k^3 \otimes_k L_L$ die Inklusion. Damit ist

$$\varphi = \bar{i} : A_1 \otimes_L L_k \longrightarrow k^3.$$

Als Basis von $A_1 \otimes_L L_k$ fixieren wir $v \otimes 1, v \otimes x, v \otimes y, v \otimes yx$, und dann ist mit Bemerkung 2.6

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -c_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $C^+(B(2)) = S_2^+(A_1, A_2, \varphi) =: (D_1, D_2, \psi)$, mit $D_1 = A_1 = \langle v \rangle_L$ und

$$D_2 = \ker \varphi = \text{Span}_k \{v \otimes yx\}.$$

Sei wiederum $j : D_2 \longrightarrow D_1 \otimes_L L_k$ die Inklusion und $(v \otimes yx) \otimes 1$ als Basis von $D_2 \otimes_k L_L$

fixiert. Dann ist

$$\psi : D_2 \otimes_k L_L \longrightarrow D_1, \psi = (yx).$$

Insgesamt gilt also $F(B(1)) = (\langle v \rangle_L, \langle v \otimes yx \rangle_k, (yx))$.

Nun muss noch $C^+(B(3)) = S_2^+ S_1^+(B(3))$ berechnet werden. Wir gehen vor wie oben. Sei $S_1^+(B(3)) =: (E_1, E_2, \eta)$. Per Definition bedeutet dies $E_2 = k^5$ und

$$E_1 = \ker C(3)$$

$$= \text{Span}_L \{-e_1 \otimes x + (-e_2) \otimes y + e_4 \otimes 1, -e_2 \otimes x + (-e_3) \otimes y + e_5 \otimes 1\} =: \langle v_1, v_2 \rangle_L.$$

Bezeichne $f : E_1 \longrightarrow k^5 \otimes_k L_L$ die Inklusion. Dann ist $\eta = \bar{f} : E_1 \otimes_L L_k \longrightarrow E_2$, mit Bemerkung 2.6 und dem oben berechneten ε , – nach Fixierung von $v_1 \otimes 1, v_1 \otimes x, \dots, v_2 \otimes y, v_2 \otimes yx$ als k -Basis von $E_1 \otimes_L L_k$ – gegeben durch die Matrix

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & -c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_0 & 0 & 0 & -c_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hiermit bestimmen wir $S_2^+ S_1^+(B(3)) = (G_1, G_2, \nu)$. Man erhält

$$G_1 = E_1 = \langle v_1, v_2 \rangle_L \text{ und}$$

$$G_2 = \ker \eta = \text{Span}_k \{v_1 \otimes yx, v_2 \otimes yx, c_0(v_1 \otimes y) - a_0(v_2 \otimes x)\} =: \langle w_1, w_2, w_3 \rangle_k.$$

Weiter ist $\nu = \bar{s} : G_2 \otimes_k L_L \longrightarrow G_1$, wobei $s : G_2 \longrightarrow G_1 \otimes_L L_k$ die Inklusion ist. Als Matrix ist das wiederum mit 2.6

$$\nu = \begin{pmatrix} yx & 0 & c_0 y \\ 0 & yx & -a_0 x \end{pmatrix}.$$

Zusammenfassend ist $F(B(2)) = (\langle v_1, v_2 \rangle_L, \langle w_1, w_2, w_3 \rangle_k, \begin{pmatrix} yx & 0 & c_0 y \\ 0 & yx & -a_0 x \end{pmatrix})$.

Damit haben wir unseren Funktor F auf Objekten bestimmt. Es bleibt noch die Rechnung für die Morphismen auszuführen. Wir erinnern uns, dass der Morphismenraum $\text{Hom}(B(1), B(2))$ dreidimensional ist, mit Basis X_1, Y_1, Z_1 . Es reicht also F auf diesen Basiselementen zu berechnen. Zunächst ist $\sigma(X_1) = X_2, \sigma(Y_1) = Y_2$ und $\sigma(Z_1) = Z_2$. Konkret in Matrizen geschrieben ist das mit Beispiel 3.6

$$X_2 = (\overline{X_2}, \overline{\overline{X_2}}) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$Y_2 = (\overline{Y_2}, \overline{\overline{Y_2}}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$Z_2 = (\overline{Z_2}, \overline{\overline{Z_2}}) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -c_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x & 0 \\ -y & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \right).$$

Weiterhin ergibt sich $C^+(X_2) =: (\overline{H}, \overline{\overline{H}})$ per Definition wie folgt.

$\overline{\overline{H}} : \langle v \rangle_L \longrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle_L$ ist die Einschränkung von $\overline{X_2} \otimes 1 : k^3 \otimes_k L_L \longrightarrow k^5 \otimes_k L_L$. Es ist $(\overline{X_2} \otimes 1)(v) = v_2$ und damit $\overline{\overline{H}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dann ist $\overline{H} : \langle v \otimes yx \rangle_k \longrightarrow \langle w_1, w_2, w_3 \rangle_k$ die Einschränkung von $\overline{\overline{H}} \otimes 1 : \langle v \rangle_L \otimes_L L_k \longrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle_L \otimes_L L_k$. Da $(\overline{\overline{H}} \otimes 1)(v \otimes yx) = w_2$ ist, erhalten wir schließlich $F(X_1) = X_1$.

Völlig analog berechnet man $F(Y_1) = Y_1$ und $F(Z_1) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \right)$.

Damit lässt sich folgender Satz formulieren.

Satz 4.4. *Sei k ein Körper, $\text{char}(k) \neq 2$, und $L = k(x, y)$ eine Körpererweiterung vom Grad 4 über k , so dass $k(x)$ ein Zwischenkörper vom Grad 2 ist. Weiter gelte $x^2 = c_0$ und $y^2 = a_0$ mit $a_0, c_0 \in k \setminus \{0\}$. Dann gilt $\sigma_x \cong \tau^- \circ G$ auf \mathcal{H} , wobei G auf Objekten trivial und auf Morphismen durch*

$$X \mapsto -X, \quad Y \mapsto Y, \quad Z \mapsto Z$$

operiert. Der Funktor G ist ein nicht-trivialer Geist, also nicht isomorph zum identischen Funktor.

Beweis. $F = \tau \circ \sigma_x$ definiert einen Geist auf \mathcal{H} und stimmt auf \mathcal{P}_1 mit $C^+ \circ \sigma$ überein.

Definiere Morphismen $g : B(1) \longrightarrow F(B(1))$ und $h : B(2) \longrightarrow F(B(2))$ durch

$$g = ((1), (yx)) \text{ und } h = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} yx & 0 \\ 0 & -yx \end{pmatrix} \right).$$

Dass dies in der Tat Morphismen sind, rechnet man leicht nach. Desweiteren sieht man ohne Mühe, durch Prüfen auf den einzelnen Basiselementen, dass folgendes Diagramm für

jeden Morphismus $\alpha : B(1) \longrightarrow B(2)$ kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} B(1) & \xrightarrow{G(\alpha)} & B(2) \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ F(B(1)) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(B(2)) \end{array}$$

Da nun g und h offensichtlich Isomorphismen sind, zeigt uns dies, dass F zunächst auf \mathcal{B} isomorph zu G ist. Die Geistergruppe ist in diesem Fall die Kleinsche Vierergruppe mit den Erzeugern, die durch die Zuordnungen $(X, Y, Z) \mapsto (X, Y, -Z)$ und $(X, Y, Z) \mapsto (X, -Y, Z)$ induziert werden (vgl. [16]). Damit ist F isomorph zu G auf ganz \mathcal{H} , da G isomorph zu der Verknüpfung der beiden Erzeuger der Geistergruppe ist. G ist darüber hinaus offensichtlich nicht isomorph zum identischen Funktor. \square

Bemerkung 4.5. Mit der Definition aus Satz 4.4 ist G zunächst nur ein Funktor auf \mathcal{P}_1 . Dieser setzt sich aber fort zu einem Funktor auf ganz \mathcal{H} , da die Zuordnung $(X, Y, Z) \mapsto (-X, Y, Z)$ ein graduierter Algebrenautomorphismus auf der Orbit-Algebra zum tubularen Shift σ_x ist und wegen (3.11). Diese Tatsache werden wir auch in den folgenden Ausführungen verwenden ohne jedes mal darauf hinzuweisen.

4.2 Der Fall $k(\sqrt[4]{c_0})$

In diesem Unterkapitel sei wiederum k ein Körper mit $\text{char}(k) \neq 2$ und $L = k(x, y)$ eine Körpererweiterung vom Grad 4 mit einem Zwischenkörper $k(x)$ vom Grad 2. Der Körper L entstehe aus k durch Adjunktion einer vierten Wurzel eines Elementes $c_0 \in k$. Diese vierte Wurzel bezeichnen wir mit y und setzen $x = y^2$. Wir haben also offenbar die Relationen

$$\begin{aligned} y^2 &= x \\ x^2 &= c_0 \in k \\ xy &= yx. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Isomorphietyps des Funktors $F = \tau \circ \sigma_x$ gehen wir vor wie oben.

Als erstes benötigen wir die Urbilder der Elemente $1^*, x^*, y^*, (yx)^*$ unter dem Isomorphismus $\varepsilon : {}_k L_L \longrightarrow \text{Hom}_k({}_L L_k, k), z \mapsto \mu \circ \varphi_z$. Hier ist μ weiterhin die Projektion von L auf k und φ_z die Multiplikation mit z .

Sei $\Psi \in \text{Hom}_k({}_L L_k, k)$ und $z \in {}_k L_L$ ein Urbild unter ε . Dann gilt für jedes $m \in {}_L L_k$ $\Psi(m) = \mu(zm)$. Wähle für z wieder eine Basisdarstellung $z = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 yx$, mit $\alpha_j \in k$.

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\Psi(1) &= \mu(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 yx) = \alpha_1, \\ \Psi(x) &= \mu(\alpha_1 x + \alpha_2 c_0 + \alpha_3 yx + \alpha_4 c_0 y) = \alpha_2 c_0, \\ \Psi(y) &= \mu(\alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3 x + \alpha_4 c_0) = \alpha_4 c_0, \\ \Psi(yx) &= \mu(\alpha_1 yx + \alpha_2 c_0 y + \alpha_3 c_0 + \alpha_4 c_0 x) = \alpha_3 c_0.\end{aligned}$$

Damit ergeben sich unter ε^{-1} folgende Zuordnungen.

$$1^* \mapsto 1, \quad x^* \mapsto \frac{x}{c_0}, \quad y^* \mapsto \frac{yx}{c_0}, \quad (yx)^* \mapsto \frac{y}{c_0}$$

Wir bemerken sofort, dass die dritte dieser Zuordnungen die Rollen von y und yx in den beiden Basen bis auf Vielfache vertauscht. Wir können nun wie oben unseren Funktor F auf \mathcal{B} berechnen.

Es ist $F(B(1)) = C^+(B(1)) = S_2^+ S_1^+(B(2))$. Zunächst sei also

$$S_1^+(B(1)) =: (A_1, A_2, \varphi).$$

Dann ist genau wie im Fall $k(\sqrt{c_0}, \sqrt{a_0})$ $A_2 = k^3$ und

$$A_1 = \ker C(2) = \text{Span}_L \{e_1 \otimes 1(-x) + e_2 \otimes 1(-y) + e_3 \otimes 1\} =: \text{Span}_L \{v\}.$$

Da aber in diesem Fall der Isomorphismus ε anders wirkt, erhalten wir schon für φ einen Unterschied. Es ist wieder φ die adjungierte Abbildung (im Sinne von Dlab und Ringel) der Inklusionsabbildung $A_1 \rightarrow k^3 \otimes_k L_L$. Wegen der Zuordnung der Basiselemente unter ε , erhalten wir dann

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -c_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann sei $S_2^+((A_1, A_2, \varphi)) =: (D_1, D_2, \Psi)$. Es ist $D_1 = A_1$ und

$$D_2 = \ker(\varphi) = \langle v \otimes y \rangle_k,$$

und insgesamt

$$F(B(1)) = (\langle v \rangle_L, \langle v \otimes y \rangle_k, (y)).$$

Auf $B(3)$ bestimmen wir der Coxeter-Funktor völlig analog und erhalten schließlich

$$F(B(2)) = (\langle v_1, v_2 \rangle_L, \langle w_1, w_2, w_3 \rangle_k, \begin{pmatrix} y & 0 & yx \\ 0 & y & -x \end{pmatrix}).$$

Hier sind $v_1 = -e_1 \otimes x - e_2 \otimes y + e_4 \otimes 1$, $v_2 = -e_2 \otimes x - e_3 \otimes y + e_5 \otimes 1$ und

$$w_1 = v_1 \otimes y, \quad w_2 = v_2 \otimes y, \quad w_3 = v_1 \otimes yx - v_2 \otimes x.$$

Um F auf Morphismen zu bestimmen notieren wir zunächst, dass

$$F(Z_1) = C^+(Z_2) = C^+\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -c_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x & 0 \\ -y & x \\ -1 & y \end{pmatrix}\right)$$

gilt. Sei $C^+(Z_2) =: (\overline{H}, \overline{\overline{H}})$. Dann ist $\overline{\overline{H}} : \langle v \rangle_L \longrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle_L$ die Einschränkung von $\overline{Z_2} \otimes 1 : k^3 \otimes_k L_L \longrightarrow k^5 \otimes_k L_L$.

Mit $\overline{Z_2} \otimes 1(v) = e_3 \otimes x + e_4 \otimes x - e_5 \otimes y - c_0 e_1 \otimes 1 = v_1 x - v_2 y$, folgt $\overline{\overline{H}} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.

Weiter ist $\overline{G} : \langle v \otimes y \rangle_k \longrightarrow \langle w_1, w_2, w_3 \rangle_k$ die Einschränkung von $\overline{\overline{H}} \otimes 1 : \langle v \rangle_L \otimes_L L_k \longrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle_k \otimes_k L_L$.

Da $\overline{\overline{H}} \otimes 1(v \otimes y) = (v_1 x - v_2 y) \otimes y = v_1 \otimes yx - v_2 \otimes x = w_3$ ist, ergibt sich insgesamt

$$F(Z_1) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \right).$$

Mit komplett analogen Rechnungen erhalten wir $F(X_1) = X_1$ und $F(Y_1) = Y_1$. Diese Rechnungen führen zu folgendem Satz.

Satz 4.6. *Sei k ein Körper mit $\text{char}(k) \neq 2$ und $L = k(\sqrt[4]{c_0})$ mit $c_0 \in k$ eine Körpererweiterung vom Grad 4 über k . Dann gilt $\sigma_x \cong \tau^- \circ G$ auf \mathcal{H} , wobei G auf Objekten trivial und auf Morphismen durch*

$$X \mapsto -X, \quad Y \mapsto Y, \quad Z \mapsto Z$$

operiert.

Beweis. Ersetze im Beweis von Satz 4.4 $g : B(1) \longrightarrow F(B(1))$ und $h : B(2) \longrightarrow F(B(2))$ durch

$$g = ((1), (y)) \text{ und } h = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & -y \end{pmatrix} \right).$$

Dies ist die gewünschte natürliche Transformation zwischen F und G auf \mathcal{B} . Nach Theorem 5.1 in [16] ist in diesem Fall G der einzige nicht-triviale Geist, und es folgt die Behauptung. \square

4.3 Die Quaternionen in $\text{char}(k) = 2$

Wie in Beispiel 3.7 zu sehen ist, ergeben sich im Fall der Quaternionen in $\text{char}(k) = 2$ Morphismen, die miteinander kommutieren (im Sinne von Kapitel 3.4).

Diese Kommutativität liefert für den Fall, dass $\text{char}(k) \neq 2$ gilt sofort, dass die Auslander-Reiten-Translation und der tubulare Shift σ_x isomorph sind. Es ist nämlich der Funktor $F = \tau \circ \sigma_x$ ein Geist auf der Kategorie \mathcal{H} . Wie man bei Kussin in [17], Bemerkung 4.3.2(1), sehen kann, ist dann die Geistergruppe trivial, und somit F isomorph zum identischen Funktor.

In [16] hat Kussin inzwischen auch (mit anderen Methoden) gezeigt, dass die Geistergruppe trivial ist, wann immer die Morphismen allesamt miteinander kommutieren, auch in $\text{char}(k) = 2$. Dies wollen wir hier, zumindest auf der vollen Unterkategorie gegeben durch $B(1)$ und $B(2)$, rechnerisch verifizieren.

Zunächst benötigen wir zur Berechnung der Coxeter-Transformation (wie immer) die Urbilder der Basiselemente $1^*, x^*, y^*, (yx)^*$ unter ε . Der Isomorphismus ε ist aber für den nicht-kommutativen Fall noch konkret zu bestimmen. Wir entnehmen dem Beweis von Lemma 4.2, dass wir eine k -lineare Abbildung $\tau : L \rightarrow k$ suchen, mit $\tau(z \cdot w) = \tau(w \cdot z)$ für alle $w, z \in L$. Es gelten folgende Relationen unter den Basiselementen.

$$\begin{aligned} y^2 &= a_0, & a_0 &\neq 0 \\ x^2 &= c_0 + x \\ xy &= y + yx \end{aligned}$$

Wir definieren nun $\tau : L \rightarrow k$ durch $\tau(a + b * x + c * y + d * yx) = b$. Diese Abbildung ist offensichtlich k -linear, und mit den obigen Relationen rechnet man nach, dass sie auch die gewünschte Verträglichkeit mit der Multiplikation erfüllt.

Somit ist $\varepsilon : {}_k L_L \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_k({}_L L_k, L)$ gegeben durch die Zuordnung $z \mapsto \tau \circ \varphi_z$.

Mit diesen Überlegungen bestimmen wir F auf die nun schon bekannte Art und Weise. Hier geben wir nur die einzelnen Ergebnisse an, da bereits zweimal ausführlichst vorgeführt wurde, wie man diese Rechnungen durchführt. Wir machen bei der Notation der Ergebnisse, genau wie bei den Rechnungen, natürlich davon Gebrauch, dass wir in Charakteristik 2 keine Vorzeichen zu unterscheiden haben.

Unter ε^{-1} ergeben sich die Zuordnungen der Basiselemente

$$1^* \mapsto x - 1, \quad x^* \mapsto 1, \quad y^* \mapsto \frac{yx}{a_0}, \quad yx \mapsto \frac{y}{a_0}.$$

Auf Objekten berechnet sich F zu

$$F(B(1)) = (\langle v \rangle_L, \langle v \otimes y \rangle_k, (y)) , \text{ mit } v = e_1 \otimes x + e_2 \otimes y + e_3 \otimes 1,$$

$$F(B(2)) = (\langle v_1, v_2 \rangle_L, \langle w_1, w_2, w_3 \rangle_k, \begin{pmatrix} y & 0 & yx \\ 0 & y & a_0 \end{pmatrix}).$$

Hier sind

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 \otimes x + e_2 \otimes y + e_4 \otimes 1, \\ v_2 &= e_2 \otimes x + e_3 \otimes y + e_5 \otimes 1, \\ w_1 &= v_1 \otimes y, \\ w_2 &= v_2 \otimes y, \\ w_3 &= v_1 \otimes yx + a_0 v_2 \otimes 1. \end{aligned}$$

Auf Morphismen erhalten wir

$$\begin{aligned} F(X_1) &= X_1, \quad F(Y_1) = Y_1 \\ \text{und } F(Z_1) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Wir wählen dann zwei Isomorphismen von Darstellungen $g : B(1) \rightarrow F(B(1))$ und $h : B(2) \rightarrow F(B(2))$, mit

$$g = ((1), (y)) \text{ und } h = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \right).$$

Die Funktorialität rechnet man leicht nach und wir erhalten, dass F isomorph zum identischen Funktor auf \mathcal{B} ist.

4.4 Endliche Körper, $\text{char}(k) \neq 2$

Es sei k ein endlicher Körper mit $\text{char}(k) \neq 2$ und L eine Körpererweiterung vom Grad 4 über k . Dann ist L/k eine galoissche Körpererweiterung vom Grad 4. Wir erhalten also einen Körperturm $k \subset k(x) \subset k(x, y)$, wobei beide Erweiterungen vom Grad 2 sind. Die Basisdarstellungen sind, da $\text{char}(k) \neq 2$ gilt, ohne Einschränkung von der Form

$$\begin{aligned} x^2 &= c_0 \\ y^2 &= a_0 + a_1 x \\ xy &= yx. \end{aligned}$$

Dies sind genau die Darstellungen, welche in Beispiel 3.5 vorausgesetzt sind. Somit kennen wir eine explizite Beschreibung der Morphismen. Die Berechnung des Funktors F lässt sich mit diesen allgemeinen Darstellungen, unter Verwendung eines Computeralgebrasystems, problemlos bewältigen. Wir wollen dies wieder nur auf \mathcal{B} tun. Dies genügt, um in einigen Beispielen auf die Form von F auf der gesamten Kategorie zu schließen. Um die Rechnungen nachvollziehbar zu machen, wollen wir hier die wesentlichen Zwischenergebnisse der Rechnungen angeben. Zunächst muss bestimmt werden, wie die Umkehrabbildung des Isomorphismus

$$\varepsilon : {}_k L_L \longrightarrow \text{Hom}_k({}_L L_k, k), z \mapsto \mu \circ \varphi_z$$

auf die Basiselemente wirkt. Hier ergeben sich die Zuordnungen

$$1^* \mapsto 1, x^* \mapsto \frac{x}{c_0}, y^* \mapsto k_1 y + k_2 y x, (yx)^* \mapsto k_2 y + h y x, \text{ mit}$$

$$k_1 = \frac{a_0}{a_0^2 - a_1^2 c_0}, k_2 = -\frac{a_1}{a_0^2 - a_1^2 c_0}, h = \frac{a_0}{c_0(a_0^2 - a_1^2 c_0)}.$$

Die Nenner sind hier von null verschieden, da ε ein Isomorphismus ist und Basen in Basen überführt. Damit lässt sich der Funktor F auf Objekten und Morphismen berechnen. Wir erhalten

$$F(B(1)) = (\langle v \rangle_L, \langle \tilde{v} \rangle_k, (a_1 c_0 y - a_0 y x)),$$

wobei $v = e_1 \otimes -x + e_2 \otimes -y + e_3 \otimes 1$, $\tilde{v} = v \otimes (a_1 c_0 y - a_0 y x)$ und

$$F(B(2)) = \left(\langle v_1, v_2 \rangle_L, \langle w_1, w_2, w_3 \rangle_k, \begin{pmatrix} y & yx & 0 \\ -\frac{a_0}{c_0} & -a_1 x & a_1 c_0 y - a_0 y x \end{pmatrix} \right),$$

mit

$$v_1 = -e_1 \otimes x + (-e_2) \otimes y + e_4 \otimes 1, v_2 = -e_2 \otimes x + (-e_3) \otimes y + e_5 \otimes 1,$$

$$w_1 = v_1 \otimes y - \frac{a_0}{c_0} v_2 \otimes x, w_2 = v_1 \otimes y x - a_1 v_2 \otimes x, w_3 = a_1 c_0 (v_2 \otimes y) - a_0 v_2 \otimes y x.$$

Auf Morphismen ergeben sich

$$F(X_1) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), F(Y_1) = \left(\begin{pmatrix} a_1 c_0 \\ -a_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$F(Z_1) = \left(\begin{pmatrix} -a_0 c_0 \\ a_1 c_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \right).$$

An dieser Stelle ist es nicht gelungen, mit den obigen Rechnungen allgemein auf den Isomorphietyp des Funktors F zu schließen. Seine Berechnung auf \mathcal{B} hingegen war möglich, ohne dass wir uns auf Beispielklassen beschränken mussten. Diese ermöglicht es auf leichte Weise Beispiele zu behandeln, in denen die auftauchenden Koeffizienten bekannt sind. Wir wollen dies an zwei interessanten Spezialfällen vorführen.

Satz 4.7. Sei L/k die Körpererweiterung $\mathbb{F}_{3^4}/\mathbb{F}_3$. Dann gilt $\sigma_x = \tau^- \circ G$, wobei G der Geist auf \mathcal{H} ist, der auf Morphismen als $(X, Y, Z) \mapsto (-X, Y, Z)$ definiert ist.

Beweis. Hier kennt man die normierten, irreduziblen Polynome vom Grad 4 über $k = \mathbb{F}_3$. Ein solches ist das Polynom $f = T^4 + T^2 + 2$. Sei also $y \in \mathbb{F}_{3^4}$ mit $f = \text{MinPol}_k(y)$, und setze zunächst $\bar{x} = y^2$. Dann ist $\{1, \bar{x}, y, y\bar{x}\}$ eine k -Basis von \mathbb{F}_{3^4} . Setzt man weiter $x := \bar{x} + 2$, so folgt $x^2 = 2 \in k$ und $y^2 = 1 + x$, also in unserer üblichen Notation $c_0 = 2, a_0 = 1, a_1 = 1$, und natürlich ist auch $\{1, x, y, yx\}$ eine k -Basis von L .

Dann verwenden wir die obigen Berechnungen von F , um zu prüfen, dass das Paar $g : B(1) \rightarrow F(B(1)), h : B(2) \rightarrow F(B(2))$, mit

$$g = ((-1), (-2y - 2yx)), h = \left(\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} y + yx & 0 \\ 0 & 2y + 2yx \end{array} \right) \right)$$

ein Isomorphie zwischen F und dem Geist G ist. Diese Isomorphie gilt zunächst nur auf \mathcal{B} . In diesem Beispiel ist G aber der einzige nicht-triviale Geist auf \mathcal{H} , und damit ist F isomorph zu G auf ganz \mathcal{H} . \square

Satz 4.8. Sei L/k die Körpererweiterung $\mathbb{F}_{5^4}/\mathbb{F}_5$. Dann gilt $\sigma_x = \tau^- \circ G$, wobei G der Funktor auf \mathcal{B} ist, der auf Morphismen als $(X, Y, Z) \mapsto (-X, Y, Z)$ definiert ist, und auf Objekten wie der identische Funktor operiert.

Beweis. Man überzeugt sich wiederum davon, dass $f = T^4 + T^2 + 2$ auch über \mathbb{F}_5 irreduzibel ist. Dies liefert in diesem Fall eine k -Basis $\{1, x, y, yx\}$ von L mit den Koeffizienten $a_0 = 2, c_0 = 2, a_1 = 1$. Das Paar $g : B(1) \rightarrow F(B(1)), h : B(2) \rightarrow F(B(2))$, mit

$$g = ((1), (2y - 2yx)), h = \left(\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 2y - 2yx & 0 \\ 0 & 3y - 3yx \end{array} \right) \right)$$

ist ein Isomorphismus zwischen F und G auf der Kategorie \mathcal{B} . \square

4.5 Einige Körpererweiterungen in Charakteristik 2

Nun bezeichne k einen Körper der Charakteristik 2 und, wie immer, $L = k(x, y)$ eine Körpererweiterung vom Grad 4 über k . $k(x)$ sei ein Zwischenkörper vom Grad 2. Beide Zwischenerweiterungen seien zyklisch. Mit dem Satz von Artin-Schreier ergibt sich dann – wie im Beispiel des vorigen Kapitels bereits diskutiert – die Existenz von Relationen der

Form der Form

$$\begin{aligned}x^2 &= c_0 + x, \\y^2 &= a_0 + a_1x + y, \\xy &= yx,\end{aligned}$$

mit $c_0, a_i \in k$, $i = 0, 1$.

Wie im Fall der endlichen Körper in Charakteristik ungleich 2 ist es nicht gelungen, die Fragestellung nach dem Isomorphietyp des Abweichungsfunktors F allgemein zu beantworten, da, grob gesprochen, zu viele Koeffizienten auftauchen. Trotzdem werden wir wiederum F auf $B(1)$, $B(2)$ und den zugehörigen Morphismen bestimmen, um damit konkrete Beispiele leicht behandeln zu können. Wir beachten, dass der Funktor σ hier durch die Zuordnung $n \mapsto n + 1$ auf den Basiselementen X_n, Y_n, Z_n aus Beispiel 3.11 induziert wird. Als erstes bestimmen wir wiederum die Zuordnungen der Basiselemente, welche

$$1^* \mapsto 1, \quad x^* \mapsto \frac{x}{c_0}, \quad y^* \mapsto k_1y + k_2yx, \quad (yx)^* \mapsto k_2y + hyx,$$

mit $k_1 = \frac{a_0+a_1}{a_0^2+a_0a_1+a_1^2c_0}$, $k_2 = -\frac{a_1}{a_0^2+a_0a_1+a_1^2c_0}$, $h = \frac{a_0}{c_0(a_0^2+a_0a_1+a_1^2c_0)}$ lauten. Die Nenner sind von null verschieden, da ε ein Isomorphismus ist.

Auf Objekten haben wir

$$F(B(1)) = (\langle v \rangle_L, \langle \tilde{v} \rangle_k, (a_1c_0y + a_0yx)),$$

wobei $v = e_1 \otimes x + e_2 \otimes y + e_3 \otimes 1$, $\tilde{v} = v \otimes (a_1c_0v \otimes ya_0v \otimes yx)$ und

$$F(B(2)) = \left(\langle v_1, v_2 \rangle_L, \langle w_1, w_2, w_3 \rangle_k, \begin{pmatrix} y & yx & 0 \\ \frac{a_0}{c_0}x & a_1x & a_1c_0y + a_0yx \end{pmatrix} \right),$$

mit

$$v_1 = e_1 \otimes x + (e_2) \otimes y + e_4 \otimes 1, \quad v_2 = e_2 \otimes x + (e_3) \otimes y + e_5 \otimes 1,$$

$$w_1 = v_1 \otimes y + \frac{a_0}{c_0}v_2 \otimes x, \quad w_2 = v_1 \otimes yx + a_1v_2 \otimes x, \quad w_3 = a_1c_0(v_2 \otimes y) + a_0v_2 \otimes yx.$$

Auf Morphismen gilt

$$F(X_1) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad F(Y_1) = \left(\begin{pmatrix} a_1c_0 \\ a_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$F(Z_1) = \left(\begin{pmatrix} (a_1 + a_0)c_0 \\ a_1c_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 + x \\ 1 + y \end{pmatrix} \right).$$

Satz 4.9. Sei $k = \mathbb{F}_2$ und $L = \mathbb{F}_{2^4}$. Dann gilt $\sigma_x = \tau^- \circ G$, wobei G der Funktor auf \mathcal{B} ist, der auf Morphismen als $(X, Y, Z) \mapsto (X, Y, X + Y + Z)$ definiert ist, und auf Objekten wie

der identische Funktor operiert.

Beweis. Das Polynom $T^2 + T + 1$ ist irreduzibel über k und sei das Minimalpolynom von $x \in L$. Weiter ist $T^2 + T + x$ irreduzibel über $k(x)$ und sei das Minimalpolynom von $y \in L$. Wir erhalten den gewünschten Körperturm $k \subset k(x) \subset k(x, y) = L$ und die Relationen

$$\begin{aligned}x^2 &= 1 + x, \\y^2 &= y + x, \\yx &= xy.\end{aligned}$$

Damit sind in unseren obigen Rechnungen $c_0 = 1, a_0 = 0$ und $a_1 = 1$. Setzen wir nun

$$g = ((1), (y)), \quad h = \left(\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} y & 0 \\ 0 & y \end{array} \right) \right),$$

so liefert uns dies auf der Unterkategorie \mathcal{B} einen Isomorphismus zwischen $F = C^+ \circ \bar{\sigma}$ und dem Geist, der auf Morphismen als $(X, Y, Z) \mapsto (X, Y, X + Y + Z)$ wirkt. Dieser ist offensichtlich nicht isomorph zum identischen Funktor, also ein nicht-trivialer Geist. \square

5 Diskussion der Ergebnisse und offene Fragen

Die Hauptergebnisse dieser Arbeit zeigen, dass sich die inverse Auslander-Reiten Translation τ^- und ein gewisser tubularer Shift σ_x um einen nicht-trivialen Geist unterscheiden. Dies macht einmal mehr klar, dass im Falle beliebiger Grundkörper Effekte zu Tage treten, die im algebraisch abgeschlossenen Fall nicht zu beobachten sind. In diesem Fall ist nämlich der einzige zahme Bimodul der Kronecker-Köcher, und die Geistergruppe ist hier trivial. Unsere Ergebnisse für den $(4, 1)$ -Fall stehen in Analogie zu Kussins Beispiel für den $(2, 2)$ -Fall aus Satz 4.2.

Auch sind sie verwandt zu Satz 2.9, der von Gabriel stammt und sich mit dem Unterschied zwischen Coxeter-Funktor und Auslander-Reiten Translation beschäftigt.

Es wurden die wesentlichen Beispiele für die von uns betrachteten speziellen $(4, 1)$ -Bimoduln bearbeitet. Es ist in dieser Arbeit nicht gelungen, eine allgemeine Aussage über das Verhalten des Funktors $F = \tau \circ \sigma_x$ für den Fall endlicher Körper mit $\text{char}(k) \neq 2$ zu treffen. Auch Versuche, das Problem durch das Schreiben eines Programmes für die Bestimmung des Isomorphietyps von F zu lösen, führten uns bislang nicht zum gewünschten Ergebnis. Gleiches gilt für zyklische Erweiterungen in Charakteristik 2. In beiden Fällen konnten wir aber F auf der vollen Unterkategorie gegeben durch $B(1)$ und $B(2)$ allgemein bestimmen. Dies mag ein Anhaltspunkt für ein weiteres Studium dieser Fälle sein.

Auf der Suche nach weiteren Beispielen, in denen Geisterfunktoren auf so natürliche Weise auftreten wie in dieser Arbeit, könnte man allgemeine $(4, 1)$ -Bimoduln betrachten, für die man aber bislang keine so explizite Beschreibung der präprojektiven Komponente hat, wie wir sie in unseren Spezialfällen verwendet haben.

Im $(2, 2)$ -Fall hat Kussin die zahmen Bimoduln über $k = \mathbb{R}$ vollständig beschrieben. Auch hier könnten für andere Grundkörper interessante Effekte auftreten.

Literatur

- [1] Frank W. Anderson and Kent R. Fuller. *Rings and categories of modules*. Springer-Verlag, New York, 1974. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 13.
- [2] Lidia Hügel Angeleri. *An Introduction to Auslander-Reiten-Theory*. Lecture Notes, Advanced School on Representation Theory and related topics, ICTP Trieste, 2006.
- [3] Ibrahim Assem, Daniel Simson, and Andrzej Skowroński. *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*, volume 65 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. Techniques of representation theory.
- [4] Maurice Auslander, Idun Reiten, and Sverre O. Smalø. *Representation theory of Artin algebras*, volume 36 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [5] Dagmar Baer. *Einige Aspekte der Darstellungstheorie artinscher Algebren*. Dissertation, Universität Paderborn, 1983.
- [6] Dagmar Baer, Werner Geigle, and Helmut Lenzing. *The preprojective algebra of a tame hereditary Artin algebra*. *Comm. Algebra*, 15(1-2):425–457, 1987.
- [7] Sheila Brenner and M. C. R. Butler. *The equivalence of certain functors occurring in the representation theory of Artin algebras and species*. *J. London Math. Soc. (2)*, 14(1):183–187, 1976.
- [8] Vlastimil Dlab. *The regular representations of the tame hereditary algebras*. In *Paul Dubreil and Marie-Paule Malliavin algebra seminar, 35th year (Paris, 1982)*, volume 1029 of *Lecture Notes in Math.*, pages 120–133.
- [9] Vlastimil Dlab. *An introduction to diagrammatical methods in representation theory*, volume 7 of *Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universität Essen [Lecture Notes in Mathematics at the University of Essen]*. Universität Essen Fachbereich Mathematik, Essen, 1981. Lecture notes written by Richard Dipper.
- [10] Vlastimil Dlab and Claus Michael Ringel. *The preprojective algebra of a modulated graph*. In *Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979)*, volume 832 of *Lecture Notes in Math.*, pages 216–231.
- [11] Vlastimil Dlab and Claus Michael Ringel. *On algebras of finite representation type*. *J. Algebra*, 33:306–394, 1975.
- [12] Vlastimil Dlab and Claus Michael Ringel. *Indecomposable representations of graphs and algebras*. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 6(173), 1976.

- [13] Peter Gabriel. *Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras*. In *Representation theory, I (Proc. Workshop, Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979)*, volume 831 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–71.
- [14] Peter Gabriel. *Indecomposable representations. II*. In *Symposia Mathematica, Vol. XI (Convegno di Algebra Commutativa, INDAM, Rome, 1971)*, pages 81–104.
- [15] Dieter Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, volume 119 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [16] Dirk Kussin. *Parameter curves for the regular representations of tame bimodules*. arXiv:0712.3274v1 [math.RT], 2007.
- [17] Dirk Kussin. *Non-commutative curves of genus zero - related to finite dimensional algebras*. *Mem. Amer. Math. Soc.*, im Druck.
- [18] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.
- [19] Helmut Lenzing and José Antonio de la Peña. *Concealed-canonical algebras and separating tubular families*. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 78(3):513–540, 1999.
- [20] André Weil. *Basic number theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 144. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.