

# Inhaltsverzeichnis

<b>IV</b>	<b>Lineare Algebra</b>	<b>1</b>
<b>18</b>	<b>Matrizen</b>	<b>3</b>
18.1	Vorbemerkung . . . . .	3
18.2	Ökonomische Problembeispiele . . . . .	4
18.2.1	“Windig’s” Baustofflager . . . . .	4
18.2.2	“Bäckerei” . . . . .	8
18.2.3	“Volkswirtschaftliche Leistungsbilanz” . . . . .	11
18.3	Grundbegriffe . . . . .	14
18.3.1	Begriffe und Bezeichnungen . . . . .	14
18.3.2	Spezielle Matrizen . . . . .	22
18.4	Einfache Rechenoperationen . . . . .	28
18.4.1	Motivation . . . . .	28
18.4.2	Addition von Matrizen . . . . .	28
18.4.3	Multiplikation mit einem Skalar . . . . .	29
18.4.4	Methodische Anmerkungen . . . . .	30
18.4.5	Rechenregeln . . . . .	31
18.4.6	Transposition . . . . .	32
18.4.7	Weitere Rechenregeln . . . . .	32
18.5	Multiplikation von Matrizen . . . . .	33
18.5.1	Ökonomischer Hintergrund . . . . .	33
18.5.2	Formale Definition . . . . .	35
18.5.3	Einige Rechenregeln . . . . .	38
18.6	Das Rechnen mit Matrizen . . . . .	53
18.6.1	“Division” von Matrizen . . . . .	61
18.7	Kleine Ergänzungen* . . . . .	69
18.8	Vergleich von Matrizen . . . . .	72
18.8.1	Die Ungleichung “ $\leq$ ” . . . . .	74
18.8.2	Die Relation “ $\ll$ ” . . . . .	75
18.8.3	Die Ungleichung “ $<$ ” zwischen “ $\leq$ ” und “ $\ll$ ” . . . . .	76

18.8.4 Unvergleichbarkeit . . . . .	77
18.9 Aufgaben . . . . .	81
<b>19 Modellierungs- und Problembeispiele</b>	<b>85</b>
19.1 Was ist mathematische Modellierung? . . . . .	85
19.2 Verflechtungsmodelle . . . . .	86
19.3 Das 1-Schritt-Verflechtungsmodell . . . . .	87
19.4 Einfache Mehrschrittmodelle . . . . .	93
19.5 Mehrschrittmodelle mit Sprüngen . . . . .	101
19.6 Komplexe Verflechtungsmodelle . . . . .	105
19.7 Probleme mit Rückflüssen . . . . .	113
19.8 Aufgaben . . . . .	119
<b>20 Vektoren</b>	<b>125</b>
20.1 Grundlagen . . . . .	125
20.1.1 Motivation . . . . .	125
20.1.2 Interpretationsmöglichkeiten . . . . .	126
20.1.3 Geometrische Deutung von Rechenoperationen . . . . .	131
20.2 Die “Länge” von Vektoren . . . . .	133
20.3 Geradengleichungen . . . . .	134
20.3.1 Parameterdarstellung einer Geraden . . . . .	134
20.3.2 Funktionsdarstellungen: Vier Grundsituationen . . . . .	139
20.3.3 Normalenform der Geradengleichung . . . . .	141
20.3.4 Spezialfall: Abschnittsform . . . . .	142
20.3.5 Spezialfall: Hessesche Normalform . . . . .	143
20.3.6 Strahlen, Strecken, Ganzzahligkeit . . . . .	144
20.3.7 Ökonomischer “Nutzen” von Geradengleichungen . . . . .	146
20.4 Ebenengleichungen . . . . .	147
20.4.1 Parameterdarstellungen für Ebenen . . . . .	147
20.4.2 Funktionsdarstellungen von Ebenen . . . . .	151
20.4.3 Normalenform der Ebenengleichung im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	152
20.4.4 Spezialfall: Abschnittsform . . . . .	153
20.4.5 Spezialfall: Hessesche Normalform . . . . .	153
20.5 Skalarprodukt und Orthogonalprojektion . . . . .	154
20.5.1 Motivation . . . . .	154
20.5.2 Definition und grundlegende Eigenschaften . . . . .	156
20.5.3 Orthogonalität und Orthogonalprojektion . . . . .	157
20.5.4 Gleichungen in Normalenform . . . . .	162
20.6 Nützliche Ungleichungen . . . . .	168
20.6.1 Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung . . . . .	168
20.6.2 Die Minkowski-Ungleichung . . . . .	170
20.7 Aufgaben . . . . .	171

<b>21 Lineare Räume</b>	<b>177</b>
21.1 Vorbemerkung . . . . .	177
21.2 Der Begriff des linearen Raumes . . . . .	177
21.2.1 Motivation . . . . .	177
21.2.2 Definition . . . . .	178
21.2.3 Weitere Beispiele . . . . .	179
21.2.4 Nützliche Grundaussagen . . . . .	181
21.3 Linearkombinationen und Basen . . . . .	182
21.3.1 Motivation . . . . .	182
21.3.2 Erinnerung: der Fall zweier Vektoren . . . . .	182
21.3.3 Linearkombinationen . . . . .	183
21.3.4 Lineare Unabhängigkeit . . . . .	184
21.3.5 Charakterisierung der linearen Unabhängigkeit . . . . .	189
21.3.6 Schnelltests auf lineare (Un-)Abhängigkeit . . . . .	193
21.3.7 Unabhängigkeit von Subvektoren im $\mathbb{R}^d$ . . . . .	194
21.3.8 Die Dimension eines linearen Raumes . . . . .	197
21.3.9 Der Begriff der Basis . . . . .	199
21.3.10 Der “Adressensatz” . . . . .	200
21.4 Basiswechsel und Austauschverfahren . . . . .	204
21.4.1 Zwei Basen im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	205
21.4.2 Basiswechsel und invertierbare Matrizen . . . . .	207
21.4.3 Rechnerische Matrixinversion . . . . .	208
21.4.4 Allgemeine Formulierung der Tauschregeln . . . . .	217
21.4.5 Charakterisierung der Invertierbarkeit . . . . .	219
21.4.6 Probespalten . . . . .	221
21.4.7 Wechsel von Koordinatendarstellungen . . . . .	222
21.5 Lineare Teilräume . . . . .	224
21.5.1 Motivation . . . . .	224
21.5.2 Definition: Linearer Teilraum . . . . .	225
21.5.3 Überprüfung der Teilraumeigenschaft . . . . .	226
21.5.4 Operationen mit linearen Teilräumen . . . . .	230
21.6 Erzeugendensysteme, lineare Hülle . . . . .	231
21.6.1 Motivation . . . . .	231
21.6.2 Definition und Formalisierung . . . . .	231
21.7 Basisergänzung und Austauschsatz . . . . .	246
21.8 Euklidische Räume und Orthogonalprojektion . . . . .	247
21.9 Lineare Abbildungen . . . . .	256
21.10 Ausblick: Normierte Räume und Erweiterungen . . . . .	259
21.11 Aufgaben . . . . .	261
<b>22 Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>269</b>
22.1 Begriffe . . . . .	269

22.1.1	Motivation . . . . .	269
22.1.2	Definition und Darstellungsformen . . . . .	270
22.1.3	Lösungsbegriffe und Fragestellungen . . . . .	273
22.2	Eine geometrische Interpretation . . . . .	274
22.3	Zur Lösbarkeit . . . . .	278
22.4	Struktur der Lösungsmenge . . . . .	286
22.5	Dimensionsaussagen . . . . .	291
22.6	Zusammenfassung . . . . .	291
22.7	Praktische Lösung mit dem Austauschverfahren . . . . .	297
22.8	Andere Lösungsverfahren . . . . .	312
22.9	Nichtnegative und ganzzahlige Lösungen . . . . .	319
22.10	Aufgaben . . . . .	324
<b>23</b>	<b>Konvexe Mengen und lineare Ungleichungen</b>	<b>329</b>
23.1	Motivation . . . . .	329
23.2	Konvexe Mengen und verwandte Begriffe . . . . .	330
23.2.1	Konvexe Mengen . . . . .	330
23.2.2	Konvexe Linearkombinationen . . . . .	334
23.2.3	Konvexe Hülle . . . . .	337
23.2.4	Extremalpunkte konvexer Mengen . . . . .	348
23.2.5	Spezielle konvexe Mengen . . . . .	349
23.2.6	Operationen mit konvexen Mengen . . . . .	353
23.2.7	Vielfache . . . . .	353
23.2.8	Summen . . . . .	354
23.3	Lineare Ungleichungen . . . . .	355
23.3.1	Motivation und Begriffe . . . . .	355
23.3.2	Lösungssituationen . . . . .	357
23.4	Systeme linearer Ungleichungen . . . . .	359
23.4.1	Motivation und Begriffe . . . . .	359
23.4.2	Vereinheitlichte Formen . . . . .	361
23.4.3	Die Lösungsmenge . . . . .	362
23.4.4	Grafische Lösung bei zwei Unbekannten . . . . .	363
23.4.5	Grafische Interpretation bei drei Unbekannten . . . . .	366
23.4.6	Eine Strukturaussage . . . . .	367
23.5	Aufgaben . . . . .	367
<b>24</b>	<b>Einfache lineare Optimierung</b>	<b>373</b>
24.1	Vorbemerkung . . . . .	373
24.2	Grafisch lösbare Probleme . . . . .	373
24.2.1	Ganzzahligkeitsbedingungen . . . . .	388
24.2.2	Weitere Beispiele für “ökonomische” Restriktionen . . . . .	391
24.2.3	Ein Beispiel im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	393

24.3	Allgemeines über LO-Probleme . . . . .	394
24.3.1	Eine vergleichende Betrachtung . . . . .	394
24.3.2	Lösbarkeitsaussagen . . . . .	397
24.3.3	Standardprobleme . . . . .	400
24.4	Das Simplexverfahren für Standardprobleme . . . . .	401
24.4.1	Vorbemerkung . . . . .	401
24.4.2	Ausgangspunkt: Eckentausch mittels ATV . . . . .	402
24.4.3	Vom Austausch- zum Simplexverfahren . . . . .	405
24.4.4	Das Simplexverfahren – generelles Ablaufschema . . . . .	406
24.4.5	Phase 0 bei Standardmaximumproblemen . . . . .	407
24.4.6	“Lesen” von Simplextableaus . . . . .	410
24.4.7	Die Schritte des Simplexalgorithmus . . . . .	413
24.4.8	Lösungsbeispiele für Standardmaximumprobleme . . . . .	421
24.4.9	Grafische Interpretation des Simplexalgorithmus . . . . .	426
24.4.10	Etwas Begründung . . . . .	429
24.4.11	Kleine Ergänzungen . . . . .	436
24.4.12	Behandlung von Standardminimumproblemen . . . . .	438
24.4.13	Formalisiertes Ablaufschema . . . . .	444
24.5	Dualität . . . . .	444
24.6	Aufgaben . . . . .	451
 <b>25 Determinanten und Anwendungen</b>		<b>457</b>
25.1	Motivation und Definition . . . . .	457
25.2	Einfache Berechnungsbeispiele . . . . .	460
25.3	Eine allgemeine Berechnungsformel . . . . .	465
25.4	Determinantenberechnung nach Laplace . . . . .	467
25.5	Berechnung nach dem Austauschverfahren . . . . .	471
25.6	Weitere Eigenschaften und Rechenregeln . . . . .	478
25.7	Die Cramersche Regel . . . . .	483
25.8	Matrixinversion . . . . .	486
25.9	Eigenwerte . . . . .	487
25.9.1	Definitionen und Eigenschaften . . . . .	487
25.9.2	Zur Eigenwertbestimmung . . . . .	491
25.9.3	Rechenregeln . . . . .	493
25.10	Eigenvektoren . . . . .	497
25.11	Diagonalisierung von Matrizen . . . . .	501
25.12	Aufgaben . . . . .	506
 <b>26 Quadratische Formen und Definitheit</b>		<b>511</b>
26.1	Motivation und Definition . . . . .	511
26.2	Definitheit symmetrischer Matrizen . . . . .	512
26.3	Definitheitsprüfung mittels Hesse-Determinanten . . . . .	522

XIV INHALTSVERZEICHNIS

26.4	Prüfung auf Semidefinitheit . . . . .	529
26.5	Nützliche Ergänzungen und “Schnelltests” . . . . .	534
26.6	Aufgaben . . . . .	536
<b>Anhang I: Begründungen</b>		<b>539</b>
<b>Anhang II: Lösungen ausgewählter Übungsaufgaben</b>		<b>555</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>577</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>		<b>579</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis</b>		<b>581</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>		<b>583</b>