Universität—GH—Paderborn Sommersemester 2002
FB 17

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler B
Lösungen zu den Abschnitten 9 und 10

9

9.1

a) $y' = \sqrt{e^x}(\cos x + \frac{1}{2}\sin x)\ \mathrm{sgn}\ (\sin x)$ $\qquad (x \in I\!R \setminus \{k\pi | k \in Z\!\!Z\})$

b) $y' = \dfrac{e^x(x+1)+1}{2\sqrt{xe^x + x}}$ $\qquad (x > 0)$

c) $y' = \dfrac{3(3x^2+9x+5)}{(2\ln 5)(3x^2-5)(2x+3)}$
für $x \in (-\dfrac{3}{2} - \sqrt{\dfrac{5}{3}}) \cup (\sqrt{\dfrac{5}{3}}, \infty)$, speziell also auch für $x \geq 2$

d) $y' = e^x(\ln x)^x \left[\frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x) + 1\right]$ $\qquad (x > 1)$

e) $y' = x^{x \ln x} \cdot \ln x(2 + \ln x)$ $\qquad (x > 0)$

f) $y' = \dfrac{1}{e^x(e^x+1)}$ $\qquad (x \in I\!R)$

g) $y' = e^x \sqrt[x]{x}(1 + \dfrac{1 - \ln x}{x^2})$ $\qquad (x > 0)$

h) $y' = 4 \cdot (3x)^{4x}[1 + \ln(3x)]$ $\qquad (x > 0)$

9.2

In der Grundmenge $I\!R \times I\!R$ gilt für den Definitionsbereich D

a) $D = \{(x,y) | (x = 0) \vee (x > 0 \wedge y \leq \frac{1}{x}) \vee (x < 0 \wedge y \geq \frac{1}{x})\}$

b) $D = \{(x_1, x_2) | x_1 \in I\!R \wedge x_2 \in I\!R\} = I\!R^2$

c) $D = \{(x,y) | x \in I\!R \wedge y \in I\!R \setminus \{0\}\} = \{(x,y) | y \neq 0\}$

d) $D = \{(x,y) | y < \frac{1}{4}x\}$

e) $D = \{(x_1, x_2) | x_1 \in I\!R \wedge x_2 \in I\!R\} = I\!R^2$

f) $D = \{(x_1,x_2) | (x_1^2 - 9 \geq 0 \wedge x_2^2 - 4 \geq 0) \vee (x_1^2 - 9 \leq 0 \wedge x_2^2 - 4 \leq 0)\}$
$= \{(x_1,x_2) | [(x_1 \geq 3 \vee x_1 \leq -3) \vee (x_2 \geq 2 \vee x_2 \leq -2)] \vee [(-3 \leq x_1 \leq 3) \wedge (-2 \leq x_2 \leq 2)]\}$

9.3

Es handelt sich um die Kurven mit der Gleichung
a1) $y = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$ $\qquad$ a2) $x = 0 \vee y = 0$ $\qquad$ a3) $y = -\frac{3}{x} \quad (x \neq 0)$

b1) $x_2 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{5}{3}$ $\qquad$ b2) $x_2 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{8}{3}$ $\qquad$ b3) $x_2 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}$ $\quad$ (jeweils für $x_1 \in I\!R$)

c) $(y = \frac{x}{2} \wedge x \neq 0) \vee (y = -\frac{x}{2} \wedge x \neq 0)$; gleichwertig: $(y = \frac{1}{2}|x| \wedge x \neq 0) \vee (y = -\frac{1}{2}|x| \wedge x \neq 0)$.
(Achtung: Der Koordinatenursprung $(0,0)$ ist nicht Bestandteil der Kurve!)

d1) Keine Lösung vorhanden (d.h., die Höhenlinie existiert nicht).

d2) $(x_1, x_2) = (0,0)$ (Höhenlinie besteht aus 1 Punkt)

d3) $x_1^2 + x_2^2 = \ln 4$ (Kreis mit Radius $\sqrt{\ln 4}$ um den Koordinatenursprung)

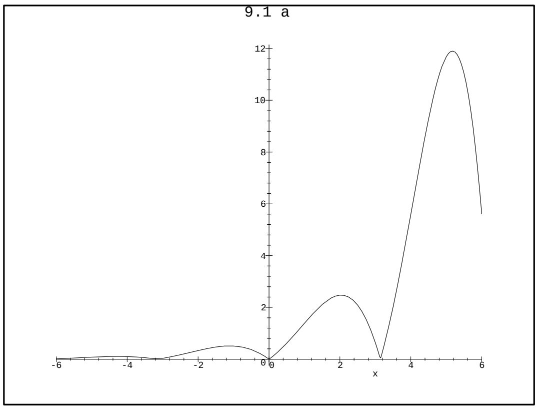
9.4

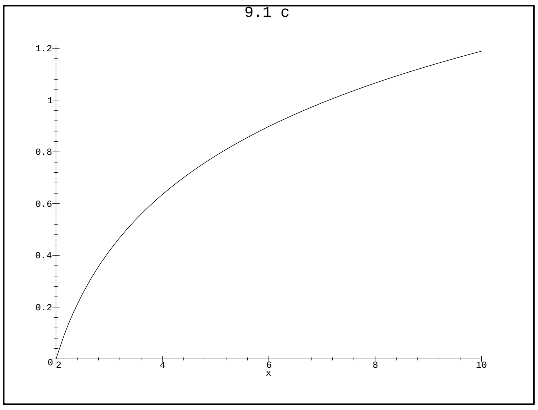
$z = f(x, y) = -\frac{1}{y}(x + \ln \sin xy)$ mit $D_f = \{(x, y) \in I\!R^2 : \sin xy > 0\}$

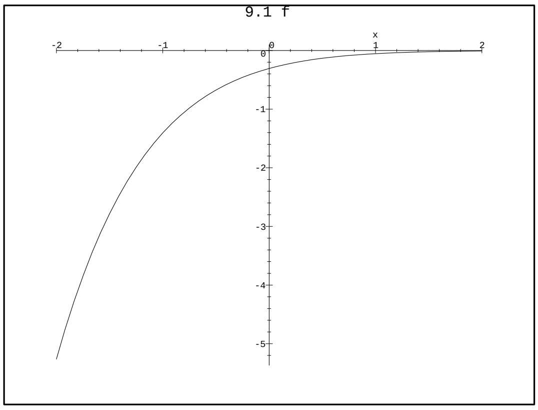
9.5

Für die Funktion $z = f(x, y)$ gilt bzgl. des Definitionsbereiches
a) $D_f = I\!R^2$ b) $D_f = \{(x, y) \in I\!R^2 : y > -y\}$.
Die Vertikalschnitte haben folgende Kurvengleichung:
a1) $z = 2e^y$ a2) $z = x\sqrt{e}$

b1) $z = \ln(1 + y)$ b2) $z = x \ln(x + 2) = \ln(x + 2)^x$


9.1 a
x


9.1 c
x


9.1 f
x

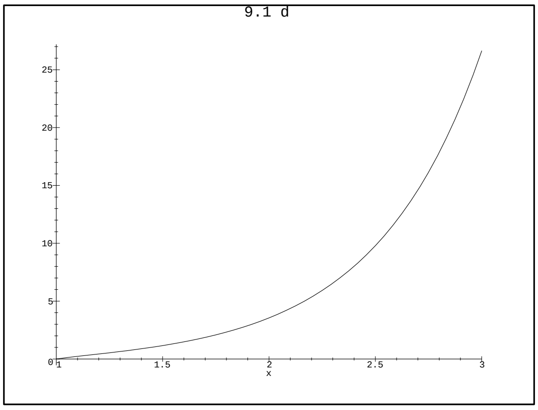

9.1 d
x

Abbildung 1: zu **??** a)

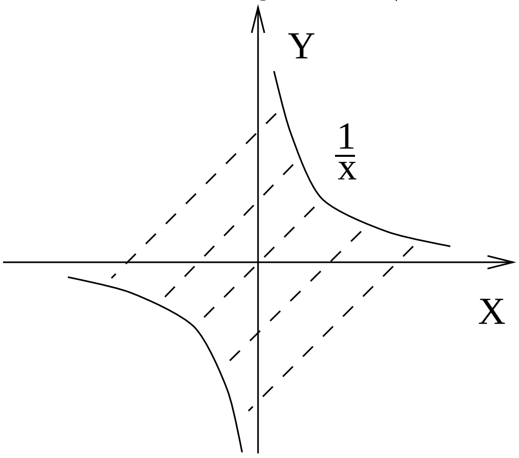


Abbildung 2: zu **??** d)

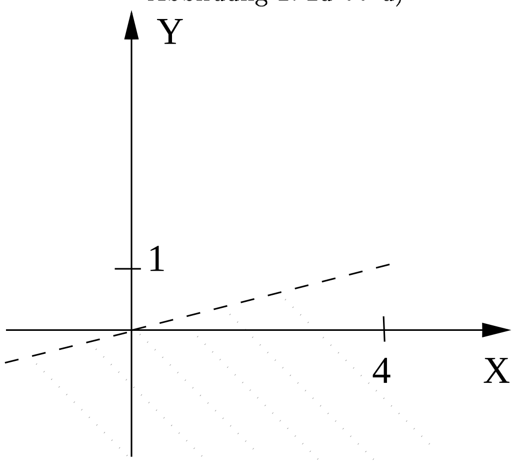


Abbildung 3: zu **??** f)

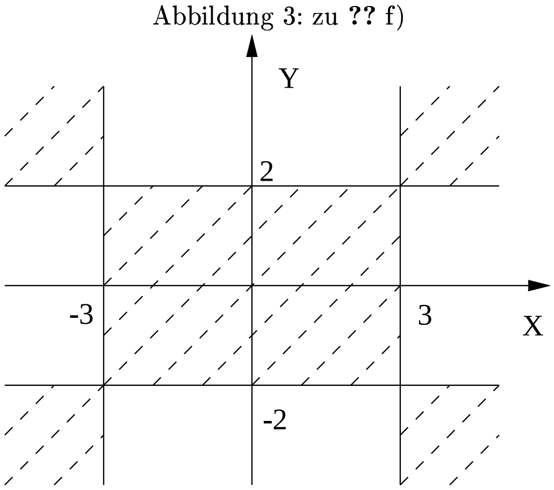


Abbildung 4: zu **??** a)

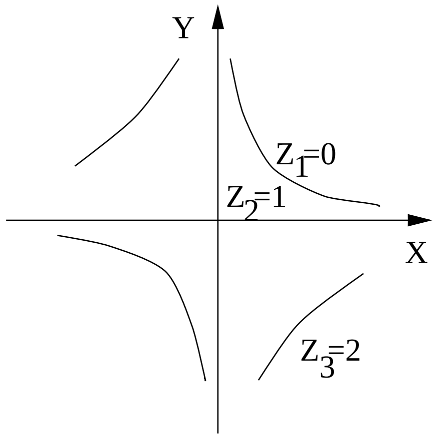


Abbildung 5: zu **??** c)

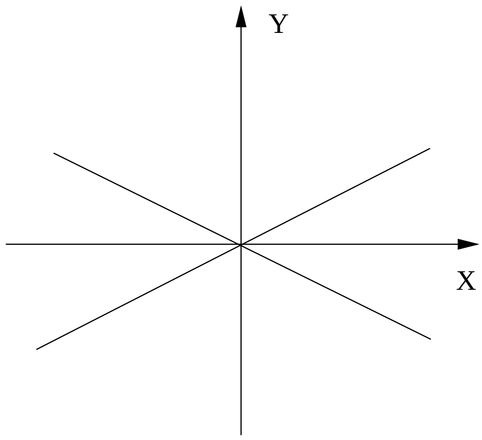
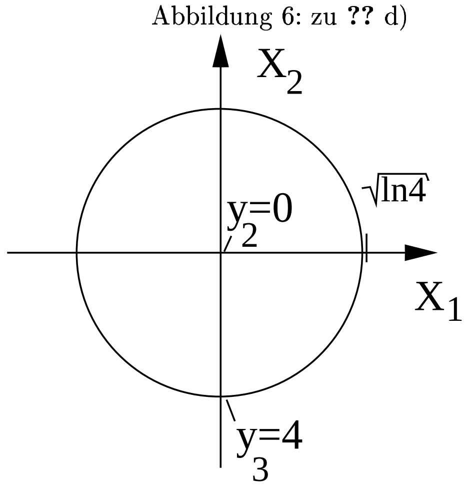


Abbildung 6: zu **??** d)



9.6

Aus $\| (x,y) - (x_0, y_0) \| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \to 0$ folgt $(x-x_0)^2 \to 0$ und $(y-y_0)^2 \to 0$ und damit auch $x \to x_0$ und $y \to y_0$. Daraus folgt wiederum $x^2 + y^2 \to x_0^2 + y_0^2$, was äquivalent ist zu $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2| \to 0$.

9.7

a) Für jedes beliebige, aber feste $y \in I\!R$ gilt:
$f(x,y) \to \infty$ für $x \to \infty$ und
$f(x,y) > 0$ für alle x ($x^2 - xy + y^2$ hat bzgl. x keine reellen Nullstellen.)
D.h. f ist nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt.

b) Sei $c := max\{|x|, |y|\}$.
Dann gilt: $|f(x,y)| \leq \dfrac{c^2}{1+2c^2} = \dfrac{1}{2+1/c^2} < \dfrac{1}{2}$.
D.h f ist nach oben und unten und somit (schlechthin) beschränkt.

c) Es gilt stets: $e^{x+y} > 0$, somit $z < 1$; für jedes beliebige y gilt $1 - e^{x+y} \to -\infty$ für $x \to \infty$.
Also ist z nach oben beschränkt und nach unten unbeschränkt.

d) z ist nach oben beschränkt (vgl.c)). Zusätzlich gilt nun $y \leq -x$, also $x + y \leq 0$, daher $e^{x+y} \leq 1$ und $z \geq 0$.
z ist somit auch nach unten beschränkt, also (schlechthin) beschränkt.

e) "sin" ist eine beschränkte Funktion ($-1 \leq \sin x \leq 1$, für alle $x \in I\!R$). Dasselbe gilt daher für h.

f) Es gilt: $0 \leq |\dfrac{u}{v}| \leq 10$, d.h. g ist (schlechthin) beschränkt.

9.8

a) konvex und konkav, aber beides nicht streng (linear!)
b) strikt konvex
c) weder konkav noch konvex
($\lambda z(u_1,u_2) + (1-\lambda)z(u_2,v_2) - z(\lambda(u_1,v_1) + (1-\lambda)u_2, v_2)) = \lambda(1-\lambda)\,((u_1-u_2)(v_1-v_2))$
< 0 für $(u_1,v_1) = (1,2), (u_2,v_2) = (2,1)$
> 0 für $(u_1,v_1) = (1,1), (u_2,v_2) = (2,2)$) .

9.9

Homogen vom Grade:

a) 0	b) 2	c) 1
d) 1/2	e) 1	f) $-\frac{a}{b}$
g) 0	h) ab	i) 1
j), k), l) nicht homogen		
m) 2	n) nicht homogen	o) a
p) 8	q) 1	

9.10

Homogen vom Grade c.

9.11

		Ableitung nach x bzw. x_1	Ableitung nach y bzw. x_2	Ableitung nach x_3
a)	zu 2a	$\frac{-y}{2\sqrt{1-xy}} \quad (xy<1)$	$\frac{-x}{2\sqrt{1-xy}} \quad (xy<1)$	
	zu 2b	2	-3	
	zu 2c	$\frac{1}{y} \quad (xy>0)$	$\frac{-x}{y^2}$, für $\frac{x}{y} \geq 0$	
		$-\frac{1}{y} \quad (xy<0)$	$\frac{x}{y^2}$, für $\frac{x}{y} < 0$	
	zu 2d	$\frac{5e^{-x+4y}}{1-e^{-x+4y}}$	$\frac{-20e^{-x+4y}}{1-e^{-x+4y}}$	
	zu 2e	$2x_1e^{x_1^2+x_2^2}$	$2x_2e^{x_1^2+x_2^2}$	
	zu 2f	$\frac{x_1x_2^2-4x_1}{\sqrt{x_1^2x_2^2-4x_1^2-9x_2^2+36}}$	$\frac{x_1^2x_2-9x_2}{\sqrt{x_1^2x_2^2-4x_1^2-9x_2^2+36}}$	
b)		$\frac{-1}{x^2y^2}+2\frac{x}{y}$	$\frac{-2}{xy^3}-\frac{x^2}{y^2}$	
c)		$6x_1(x_1^2-x_2^2)^2(x_2^2-x_3^2)^4$	$-6x_2(x_1^2-x_2)^2(x_2^2-x_3^2)^4$	$-8x_3(x_1^2-x_2^2)^3(x_2^2-x_3^2)^3$
			$+8x_2(x_1^2-x_2^2)^3(x_2^2-x_3^2)^3$	
d)		yx^{y-1}	$x^y \ln x$	
e)		$\frac{-y}{x(x-y)}$	$\frac{1}{x-y}$	
f)		$\frac{-x}{x^2+y^2}$	$\frac{-y}{x^2+y^2}$	
g)		$\frac{6x_1}{x_3^3}$	$\frac{1}{x_3^2}$	$\frac{x_2x_3-9x_1^2-3x_2x_3}{x_3^4}$
h)		ye^{xy}	xe^{xy}	
i)		$\frac{1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1^2}$	$\frac{1}{x_1}-\frac{x_1}{x_2^2}$	
j)		$15ye^{5x}$	$3e^{5x}$	

9.12

	a)	b)	c)	d)
$f_x(2,3)$	$\frac{47}{36}$	12	$\frac{3}{2}$	$\frac{-2}{13}$
$f_y(2,3)$	$-\frac{13}{27}$	$\ln 2^8$	-1	$\frac{-3}{13}$

9.13

a) $f_{r_1}(1,4) = 20$
b) $f_{r_1} = 2r_2 + 24r_1$; $\quad f_{r_2} = 2r_1 - 8r_2$
c) 1.) $f_A = 200 - 4A - 10B + 2C$
$f_B = 100 - 2B - 10A - 5C$
$f_C = 20 - 2C + 2A - 5B$
c) 2.) $f_A(1) = 186$; $\quad f_B(2) = 61$; $\quad f_C(5) = 2$

9.14

	$f_{x_1x_2}$ bzw. f_{xx}	$f_{x_1x_2} = f_{x_2x_1}$ bzw. $f_{xy} = f_{yx}$	$f_{x_2x_2}$ bzw. f_{yy}
a)	2	0	2
b)	$6x_1x_2^2$	$6x_1^2x_2$	$2x_1^3$
c)	0	$\frac{-1}{y^2}$	$\frac{2x}{y^3}$
d)	$6x$	-3	$6y$
e)	$75x_2e^{5x_1}$	$15e^{5x_1}$	0
f)	$12x_1^2x_2^2$	$8x_1^3x_2 + 5x_2^4$	$2x_1^4 + 20x_1x_2^3$
g)	$0,75(\frac{x_2}{x_1})^{1/2}$	$0,75(\frac{x_1}{x_2})^{1/2}$	$-0,25(\frac{x_1}{x_2})^{3/2}$
h)	$x_2^2e^{x_1x_2} + e^{x_1+x_2} - \frac{1}{x_1^2}$	$e^{x_1x_2}(x_1x_2 + 1) + e^{x_1+x_2}$	$x_1^2e^{x_1x_2} + e^{x_1+x_2} - \frac{1}{x_2^2}$

9.15

	$f_{x_1x_1x_1}$	$f_{x_1x_1x_2}$ $= f_{x_1x_2x_1}$ $= f_{x_2x_1x_1}$	$f_{x_2x_2x_1}$ $= f_{x_2x_1x_2}$ $= f_{x_1x_2x_2}$	$f_{x_2x_2x_2}$
zu **??** f)	$24x_1x_2^2$	$24x_1^2x_2$	$8x_1^3 + 20x_2^3$	$60x_1x_2^2$
zu **??** g)	$-\frac{0,375}{x_1}(\frac{x_2}{x_1})^{1/2}$	$0,375(x_1x_2)^{-1/2}$	$-\frac{0,375}{x_2}(\frac{x_1}{x_2})^{1/2}$	$\frac{0,375x_1}{x_2^2}(\frac{x_1}{x_2})^{1/2}$
zu **??** h)	$x_2^3e^{x_1x_2}$	$x_1x_2^2e^{x_1x_2} + 2x_2e^{x_1x_2}$	$x_1^2x_2e^{x_1x_2} + 2x_1e^{x_1x_2}$	$x_1^3e^{x_1x_2}$
	$+e^{x_1+x_2} + \frac{2}{x_1^3}$	$+e^{x_1+x_2}$	$+e^{x_1+x_2}$	$+e^{x_1+x_2} + \frac{2}{x_2^3}$
zu $e^{x_1x_2x_3}$	$x_2^3x_3^3e^{x_1x_2x_3}$	$x_2x_3^2e^{x_1x_2x_3}(x_1x_2x_3 + 2)$	$x_1x_3^2e^{x_1x_2x_3}(x_1x_2x_3 + 2)$	$x_1^3x_3^3e^{x_1x_2x_3}$

Abbildung 7: zu **??** a1)

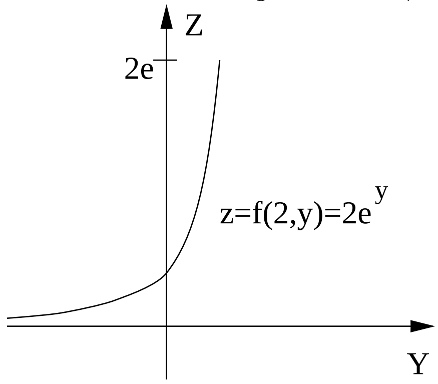


Abbildung 8: zu **??** a2)

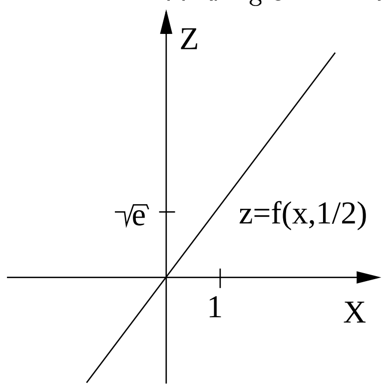


Abbildung 9: zu **??** b1)

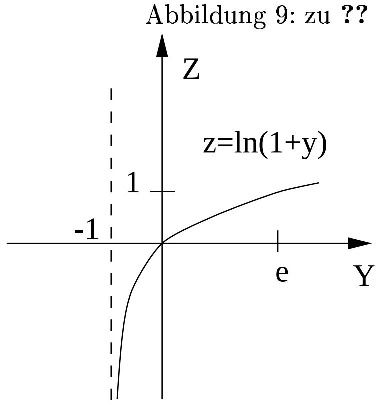


Abbildung 10: zu **??** b2)

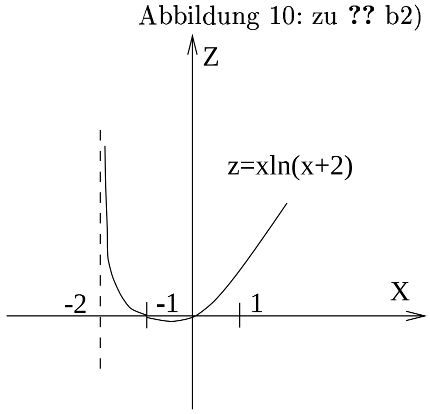


Abbildung 11: zu **??**

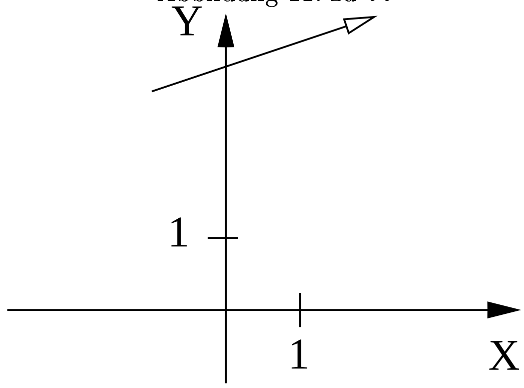
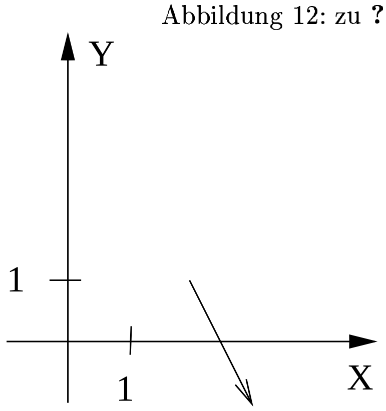


Abbildung 12: zu **??**



Weiter zu $e^{x_1x_2x_3}$:

$f_{x_1x_1x_3} = f_{x_1x_3x_1} = f_{x_3x_1x_1} = x_2^2x_3e^{x_1x_2x_3}(x_1x_2x_3+2)$

$f_{x_1x_2x_3} = f_{x_1x_3x_2} = f_{x_3x_2x_1} = f_{x_2x_1x_3} = f_{x_2x_3x_1} = f_{x_3x_1x_2} = e^{x_1x_2x_3}(x_1^2x_2^2x_3^2+3x_1x_2x_3+1)$

$f_{x_2x_2x_3} = f_{x_2x_3x_2} = f_{x_3x_2x_2} = x_1^2x_3e^{x_1x_2x_3}(x_1x_2x_3+2)$

$f_{x_3x_3x_1} = f_{x_3x_1x_3} = f_{x_1x_3x_3} = x_1x_2^2e^{x_1x_2x_3}(x_1x_2x_3+2)$

$f_{x_3x_3x_2} = f_{x_3x_2x_3} = f_{x_2x_3x_3} = x_1^2x_2e^{x_1x_2x_3}(x_1x_2x_3+2)$

$f_{x_3x_3x_3} = x_1^3x_2^3e^{x_1x_2x_3}$

9.16

a) Rechnerisch getrennt $f_{x_1x_2x_3}$ und $f_{x_3x_2x_1}$ bestimmen und vergleichen.
Die Antwort lautet in beiden Fällen:

$(x_1-x_2)^{x_3-2}\left((-x_3^2+x_3)\ln(x_1-x_2)-2x_3+1\right)$

b) entsprechend (unter Verwendung der Beziehung $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$) ergibt sich für

b1): $\dfrac{2x_1}{\sin^2(x_2-x_3)}$ b2): $\dfrac{-2x_1^2\cos(x_2-x_3)}{\sin^3(x_2-x_3)}$

9.17

	Teil b) für $p_1=(1,1)$	$p_2=(1,2)$	Teil c)
a)	$(0,0)$	$(-3,9)$	$(0,0)$, $(1,1)$
b)	$(0,3)$	$(-18,24)$	$(0,0)$, $\left((\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}},(\frac{3}{2})^{\frac{1}{3}}\right)$
c)	$(15e^5,3e^5)$	$(30e^5,3e^5)$	keine Lösung
d)	$(0,5;0,5)$	$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$	keine Lösung
e)	(e,e)	$(2e^2,e^2)$	$(0,0)$
f)	$(0,0)$	$\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)$	alle Punkte (x,y) mit $x^2=y^2$ und $x,y\neq 0$

9.18

a) grad $f(-1,3)=\begin{pmatrix}3/4\\1/4\end{pmatrix}$
b) Ausgehend vom Punkt $(-1,3)$ steigt z am stärksten in der in Abb. **??** angegebenen Richtung.
c) $P_0=\left(\dfrac{-t}{(s-t)^2},\dfrac{s}{(s-t)^2}\right)$
d) 1. Komponente aus a): $\dfrac{3}{4}$, führt zu $x_0=-1$
2. Komponente aus a): $\dfrac{1}{4}$ führt zu $y_0=3$

9.19

a) In Richtung von $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) Siehe Abb. **??**

9.20

	an der Stelle P_1	an der Stelle P_2
a)	$(-8,-1)$	$(12,-9)$
b)	$(2e,2e)$	$(-2e,-2e)$
c)	$(7,7)$	$(1,-7)$
d)	$(2e,e)$	$(4e^2,e^2)$
e)	$(25,0)$	$(0,15)$

Nullstellen: a) $(0,0)$ b) $(0,0)$ c) $(\frac{16}{9},\frac{-4}{3})$

9.21

$$\operatorname{grad}(z) = \begin{pmatrix} 8x^3+24x^2+8xy^2 \\ 8x^2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9.22

a) $\operatorname{grad}(y) = \begin{pmatrix} 3x_2+2x_1x_3 \\ 3x_1+4x_2x_3 \\ 2x_2^2+x_1^2 \end{pmatrix}$

b) $\operatorname{grad}(y) = \begin{pmatrix} 1/x_3 \\ 1/x_3 \\ \frac{x_1+x_2}{-x_3^2} \end{pmatrix}$

c) $\operatorname{grad}(y) = \begin{pmatrix} \ln(x_2x_3) \\ x_1/x_2 \\ x_1/x_3 \end{pmatrix}$

9.23

	a)	b)	c)
grad $f(x_1,x_2,x_3)$	$e^{x_1x_2x_3}\begin{pmatrix} x_2x_3 \\ x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2x_1x_2x_3^5 \\ x_1^2x_3^5 \\ 5x_1^2x_2x_3^4 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{x_2+x_3}\begin{pmatrix} 1 \\ -x_1/(x_2+x_3) \\ -x_1/(x_2+x_3) \end{pmatrix}$

9.24

Vorbemerkung: Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine (total) differenzierbare Funktion, so hat die Tangentialebene an Graph(f) in einem beliebigen Punkt $(x^0, y^0, f(x^0, y^0))$ die Funktionsdarstellung

$$z = T(x,y) = f(x^0,y^0)+f'(x^0,y^0)\begin{pmatrix} x-x^0 \\ y-y^0 \end{pmatrix} \left(= f(x^0,y^0)+f_x(x^0,y^0)(x-x^0)+f_y(x^0,y^0)(y-y^0)\right).$$

Hier gilt nun:
$f(x,y) = e^{xy}$ und $(x^0,y^0) = (1,1)$; somit $f(1,1) = e$, $f'(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$ und $f'(1,1) = (e,e)$.
Die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(1,1,e)$ lautet:
$z = T(x,y) = e + (e,e)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = ex+ey-e;$
mit $(1,1,e)$ als "Pinpunkt" also

$$(e,e,-1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-e \end{pmatrix} = 0.$$

Die zugehörige Hessesche Normalform lautet

$$\frac{1}{\sqrt{1+2e^2}}(e,e,-1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-e \end{pmatrix} = 0;$$

setzt man im links stehenden Ausdruck für (x,y,z) den Koordinatenursprung ein und bildet den Betrag, erhält man den gesuchten Abstand: $\dfrac{e}{\sqrt{1+2e^2}}$.

9.25

$dy = 5(dx_1 + dx_2 + dx_3)$
$y(3,2,4) = 45; \qquad \triangle y = 5 \quad (y_0 = 45; \quad y_1 = 50)$

9.26

$\triangle z \approx -5,16 \qquad dz = -4,8$

9.27

$dy = 4$

9.28

dy bzw. dz:

a) $5(x_2x_3\,dx_1 + x_1x_3\,dx_2 + x_1x_2\,dx_3)$

b) $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3)$

c) $12\left((x_1^2 - x_1x_2^2)dx_1 + (x_2^2 - x_1^2x_2)dx_2\right)$

d) $x_1x_2^2\,e^{x_1^2x_2^3}(2x_2\,dx_1 + 3x_1\,dx_2)$

e) $(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2})dx + (\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2})dy$

f) $n(x_1^a - x_2^b)^{n-1}(ax_1^{a-1}\,dx_1 - bx_2^{b-1}\,dx_2)$

g) $yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy$

h) $x_1^{x_2x_3}(x_3 \ln x_1\,dx_2 + x_2 \ln x_1\,dx_3 + \frac{x_2x_3}{x_1}\,dx_1)$

i) $2e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3)$

j) $\frac{2x_1}{x_3}dx_1 + \frac{1}{x_3}dx_2 - \frac{x_1^2+x_2}{x_3^2}dx_3$

k) $a^x \ln(a)\,dx + b^y \ln(b)\,dy$

l) $x_3(x_1+x_2)^{x_3-1}dx_1 + x_3(x_1+x_2)^{x_3-1}dx_2 + (x_1+x_2)^{x_3}\ln(x_1+x_2)\,dx_3$

m) $\frac{n(ax_1 - bx_2)^{n-1}}{x_3}(a\,dx_1 - b\,dx_2) - \frac{(ax_1-bx_2)^n}{x_3^2}dx_3$

n) $\frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} - \frac{dx_3}{x_3}$

9.29

$d_y \approx -0,008$

9.30

	dy	$\triangle y$
a)	$-11/8$	$-7/8$
b)	-3	$-2,5$
c)	0	3

9.31

	a)	b)	c)
dx	0,24	2,04	24,7

9.32

		I	II
a)	$f(x_0+h_1, y_0+h_2)$	$x_0^2y_0^2 + h_1 2x_0y_0^2 + h_2 2x_0^2y_0$	$\ldots + h_1^2y_0^2 + 4h_1h_2x_0y_0 + h_2^2x_0^2$
	$(x_0, y_0) = (0,0)$	0	0
	$(x_0, y_0) = (1,1)$	$1 + 2h_1 + 2h_2$	$\ldots + h_1^2 + 4h_1h_2 + h_2^2$
b)	$g(x_0+h_1, y_0+h_2)$	$ax_0^2 + by_0^2 + cx_0y_0 + dx_0 + ey_0 + f$	$\ldots + h_1^2a + h_1h_2c + h_2^2b$
		$+h_1(2ax_0 + cy_0 + d) + h_2(2by_0 + cx_0 + e)$	
	$(x_0, y_0) = (0,0)$	$f + h_1d + h_2e$	$\ldots + h_1^2a + h_1h_2c + h_2^2b$
	$(x_0, y_0) = (1,1)$	$a+b+c+d+e+f+h_1(2a+c+d)$ $+h_2(2b+c+e)$	$\ldots + h_1^2a + h_1h_2c + h_2^2b$
c)	$h(x_0+h_1, y_0+h_2)$	$e^{x_0+y_0} + h_1e^{x_0+y_0} + h_2e^{x_0+y_0}$	$\ldots e^{x_0+y_0}(\frac{1}{2}h_1^2 + h_1h_2 + \frac{1}{2}h_2^2)$
	$(x_0, y_0) = (0,0)$	$1 + h_1 + h_2$	$\ldots + \frac{1}{2}h_1^2 + h_1h_2 + \frac{1}{2}h_2^2$
	$(x_0, y_0) = (1,1)$	$e^2(1 + h_1 + h_2)$	$\ldots + e^2(\frac{1}{2}h_1^2 + h_1h_2 + \frac{1}{2}h_2^2$

9.33

a) Die Determinante der Hesse-Matrix von f lautet:

det $\begin{pmatrix} 6x+2 & 0 \\ 0 & 6y+2 \end{pmatrix} = 36xy + 12x + 12y + 4 > 0$ für alle $x, y > 0$. Außerdem ist $f_{xx} = 6x + 2 > 0$ für alle $x > 0$; also ist die Hesse-Matrix positiv definit und damit f im Inneren des Definitionsbereiches strikt konvex.

b) Die Hesse-Matrix ist weder positiv noch negativ definit, da $g_{xx} = 12x^2 + 12xy > 0$ und det $\begin{pmatrix} 12x^2+12xy & 6x^2 \\ 6x^2 & -12 \end{pmatrix} = -12(12x^2+12xy) - 36x^4 < 0$ jeweils im Inneren des Definitionsbereiches gilt; g ist somit weder konvex noch konkav.

c) Wie in b): $\phi_{uu} = 2v^2 > 0$ und det $\begin{pmatrix} 2v^2 & 4uv \\ 4uv & 2u^2 \end{pmatrix} = -12(u^2v^2) < 0$ für $(x, y) \in (0,1) \times (0,1)$

d) H ist konvex, da die Hesse-Matrix positiv definit ist: $H_{x_1x_1} = 2e^{x_1^2+x_2^2}(1+2x_1^2) > 0$ und det $2e^{x_1^2+x_2^2}\begin{pmatrix} (1+2x_1^2) & 2x_1x_2 \\ 2x_1x_2 & (1+2x_2^2) \end{pmatrix} = 4e^{2(x_1^2+x_2^2)}(1+2x_1^2+2x_2^2) > 0$ für alle $\underline{x} \in I\!R^2$ (erst recht mit $||\underline{x}|| < 1$).

Anmerkung: Es genügt zu bemerken, daß $H(\underline{x}) = e^{g(\underline{x})}$ mit $g(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 (= ||\underline{x}||^2)$ gilt. Es ist leicht zu sehen, daß g konvex ist (sogar strikt).
Außerdem ist die Funktion $u \mapsto e^u$ streng monoton wachsend und konvex. Also ist auch H (strikt) konvex.

9.34

a) $h : I\!R_+ \to I\!R_+^2, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

$k : I\!R_+^2 \to I\!R_+, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto u^v$

$(k \circ h)(x) = x^x$ und $\frac{d\,(k\circ h)(x)}{dx} = \frac{\partial(k\circ h)(x)}{\partial u}\frac{d\,h_1(x)}{dx} + \frac{\partial(k\circ h)(x)}{\partial v}\frac{d\,h_2(x)}{dx} = (x^x \ln x) \cdot 1 + x \cdot x^{x-1} \cdot 1 = x^x(\ln x + 1)$

b) $h : I\!R_+ \to I\!R_+^3, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$

$k : I\!R_+^3 \to I\!R_+, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto u^{(v^w)}$

$(k \circ h)(x) = x^{x^x}$ und

$$\frac{d\,(k\circ h)(x)}{dx} = \frac{\partial(k\circ h)(x)}{\partial u}\frac{d\,h_1(x)}{dx} + \frac{\partial(k\circ h)(x)}{\partial v}\frac{d\,h_2(x)}{dx} + \frac{\partial(k\circ h)(x)}{\partial w}\frac{d\,h_3(x)}{dx} =$$

$$x^x x^{x^x-1} + x^{x^x}\ln(x) x x^{x-1} + x^{x^x}\ln(x)\ln(x)x^x = x^x(x^{x^x-1} + x^{x^x}\ln(x) + x^{x^x}\ln(x)\ln(x))$$

c) $h : I\!R_+ \to I\!R_+^2, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \sin^2(x) \end{pmatrix}$

$k : I\!R_+^2 \to I\!R_+, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \sqrt[u]{v}$

$$\frac{d\,(k\circ h)(x)}{dx} = \frac{-(\sin^2(x))^{1/x}\ln(\sin^2(x))}{x^2} + \frac{1}{x}(\sin^2(x))^{\frac{1}{x}-1} 2\sin(x)\cos(x)$$

d) $h : I\!R_+ \to I\!R_+^2, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$

$$k : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \log_u(v)$$

$$\frac{d\,(k \circ h)(x)}{dx} = \frac{-\ln(x^2)}{x\ln(x)^2} + \frac{2}{x\ln(x)}$$

9.35

$f, g : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien differenzierbare Funktionen auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}$.

a) Definiere $h : U \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$

und $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto u \cdot v.$

Dann ist $(k \circ h) : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $(k \circ h)(x) = f(x)g(x)$ und es gilt :

$$\frac{d\,(f \cdot g)(x)}{dx} = \frac{d\,(k \circ h)(x)}{dx} = \frac{\partial\,(k \circ h)(x)}{\partial u}\frac{d\,h_1(x)}{dx} + \frac{\partial\,(k \circ h)(x)}{\partial v}\frac{d\,h_2(x)}{dx} = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

b) analog mit: $k : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{u}{v}$

9.36

Anmerkung: Im Folgenden wird – soweit vorhanden – jeweils mit A diejenige Teilmenge von Punkten $\underline{x}^0$ der betreffenden Kurve $\mathcal{K}$ bezeichnet, die keine Umgebung besitzen, in der die Kurve mit dem Graphen einer differenzierbaren Funktion $y = f(x)$ übereinstimmt.

a)	$-\dfrac{x}{y} = -x(49 - x^2)^{-1/2}$	$A = \{(-7, 0), (7, 0)\}$
b)	$\dfrac{y - 2x}{2y - x}$	$A = \{(-2\sqrt{\frac{1000}{3}}, -\sqrt{\frac{1000}{3}}), (2\sqrt{\frac{1000}{3}}, \sqrt{\frac{1000}{3}})\}$
c)	$-\dfrac{e^x + ye^{xy}}{e^y + xe^{xy}}$	$A = \{(x, y) \in \mathcal{K} \mid e^y + xe^{xy} = 0\}$
d)	$-y/x$	
e)	$-\dfrac{y}{x} = -\dfrac{e^{13}}{x^2}$	
f)	$\dfrac{ye^x}{2 - ye^y}$	$A = \{(x, y) \in \mathcal{K} \mid e^y = \frac{2}{y}\}$
g)	$-(y+1)\dfrac{2x^2 + 2x + 1}{x} = \dfrac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 e^{(x+1)^2}}$	
h)	$-\dfrac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{x^y \ln x - xy^{x-1}}$	$A = \{(x, y) \in \mathcal{K} \mid x^y \ln x = xy^{x-1}\}$
i)	$-\dfrac{\alpha y}{\beta x} = -\dfrac{\alpha}{\beta x}\sqrt[\beta]{\dfrac{c}{ax^\alpha}}$	$A = \{(x, y) \in \mathcal{K} \mid x = 0 \vee y = 0\}$
k)	$-\dfrac{ye^x + e^y}{e^x + xe^y}$	$A = \{(x, y) \in \mathcal{K} \mid x < 0, y = x - \ln(-x)\}$

9.37

a) $y' = \dfrac{2xy^2 + 2x + y - 3x^2}{3y^2 - 2x^2y - x + 1}$ für $y \neq \dfrac{x^2 + \sqrt{x^4 + 3x - 3}}{3}, \dfrac{x^2 - \sqrt{x^4 + 3x - 3}}{3}$

b) 1.) 0; 2.) 2; 3.) existiert nicht

9.38

a) Für $x = 1$ ergeben sich drei Lösungen für y, nämlich:

$$y_1 = 1; \quad y_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \quad y_3 = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Entsprechend ist: $y_1' = -1$; $y_2' \approx 2{,}065$; $y_3' \approx -1{,}065$.

b) Für $x = 0,5$ ergeben sich zwei Lösungen für y, nämlich:
$y_1 = \left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{3}{2}}$; $\quad y_2 = -\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{3}{2}}$.
Entsprechend ist: $y_1' \approx -0,7673$; $\quad y_2' \approx 0,7673$.

9.39

1.) $c = -6$; $\qquad$ 2.) $-\frac{13}{9}$

9.40

a) $\dfrac{y-10x}{30y-x} \quad (x \neq 30y)$ $\quad$ b) -1 $\quad$ c) $\dfrac{-2\ln(y)y}{(x+1)\ln((x+1)^2)} \quad (y \neq 0; x \neq 0, -1)$

d) $\dfrac{e^{1/x}y^2}{e^{1/y}x^2} \quad (x, y \neq 0)$ $\quad$ e) $\dfrac{1 - x\ln(a)}{x\ln(b)} \quad (x \neq 0; b \neq 1)$ $\quad$ f) $-\dfrac{5}{4}\dfrac{y}{x} \quad (x, y \neq 0)$

g) $-\dfrac{2\sqrt{b^y}a^x \ln a}{3\sqrt[3]{a^{2x}}b^y \ln b}$ $\quad$ h) $\dfrac{-\ln(xy)-1}{\frac{x}{y}+1} \quad (x \cdot y > 0)$ $\quad$ i) $\dfrac{-(ax + cxy^2 - \frac{1}{2})}{by + cx^2y} \quad (by + cx^2y \neq 0)$

9.41

a) $y'' = \dfrac{-32x^6 + 4x^4 + 48x^3y + 48x^2y^2 + 2xy + 2y^2}{(x+2y)^3}$, $\quad$ falls $x + 2y \neq 0$
b) 0

9.42

$y''(1, -1) = 1/3$

9.43

	ε_{zx}	ε_{zy}
a)	$\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}$	$\dfrac{2y^2}{x^2+y^2}$
b)	$x \cdot \ln a$	-1
c)	a	b
d)	$\dfrac{2x^2+xy}{x^2+xy+y^2}$	$\dfrac{xy+2y^2}{x^2+xy+y^2}$
e)	$1/2$	$1/2$

9.44

	ε_{xr_1}	ε_{xr_2}
a)	α	β
b)	$\dfrac{br_1r_2 - ar_1^2}{-ar_1^2 + 2br_1r_2 - cr_2^2}$	$\dfrac{br_1r_2 - cr_2^2}{-ar_1^2 + 2br_1r_2 - cr_2^2}$

9.45

a)

	ε_{xr_1}	ε_{xr_2}
zu **??** a)	$0,25$	$0,75$
zu **??** b)	$3/7$	$4/7$

b) Interpretationsbeispiel zur ersten Lösung: $\varepsilon_{xr_1} = 0,25$:
Wird bei einem Input $(r_1, r_2) = (2,1)$ der Produktionsfaktor r_1 um 1% erhöht und der Produktionsfaktor r_2 unverändert gelassen, so nimmt der Output x um ca. $0,25\%$ zu.

9.46

$$\varepsilon_{xAp_A} = \frac{-2p_A}{25 - 2p_A + p_B}; \qquad \varepsilon_{xAp_B} = \frac{p_B}{25 - 2p_A + p_B}$$

9.47

a) $\varepsilon_{xAp_A} = \dfrac{-2p_A}{16 - 2p_A + p_B}$; b) $-6/11$

9.48

	ε_{zx}	ε_{zy}
a)	$\dfrac{ax^a}{x^a + y^b}$	$\dfrac{by^b}{x^a + y^b}$
b)	$x \ln a$	1
c)	$\dfrac{x^2}{x^2 - y^2}$	$\dfrac{y^2}{y^2 - x^2}$
d)	x	y
e)	$\dfrac{1}{\ln x}$	1

9.49

a) $\varepsilon_{xAp_A} = \dfrac{2p_A^2 p_B + p_A}{p_A^2 p_B + p_A}$ $\qquad \varepsilon_{xAp_B} = \dfrac{p_A^2 p_B}{p_A^2 p_B + p_A}$

b) $\varepsilon_{xAp_A} = \dfrac{-20p_A}{-20p_A + 10p_B + 10}$ $\qquad \varepsilon_{xAp_B} = \dfrac{10p_B}{-20p_A + 10p_B + 10}$

9.50

$\varepsilon_{xp} = -3/2$

9.51

Es gelten die Abkürzungen Ma = lokales Maximum, Mi = lokales Minimum, Sp = verallgemeinerter Sattelpunkt. In Aufgabe d) wird exemplarisch das Verfahren vorgeführt.

a) $(5; -34)$ Sp
b) $(2; 0,9)$ Sp, $\quad (-2; -2,1)$ Sp
c) $(-1; 1)$ Mi, $\quad (1; -1)$ Mi, $\quad (0; 0)$ stat. Pkt.: keine Beurteilung
d) $(0; 0)$ Ma, $\quad (0; 2)$ Mi, $\quad (2; 1)$ Sp, $\quad (-2; 1)$ Sp
Notwendige Bedingung für Extremwerte: Die ersten partiellen Ableitungen sind 0.
$z_x = 6xy - 6x = 0$
$z_y = 3x^2 + 12y^2 - 24y = 0$
Die Lösungen lauten: $(0; 0)$, $(0; 2)$, $(2; 1)$, $(-2; 1)$
Berechnung der Hesse-Determinante:

$$H := \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6y - 6 & 6x \\ 6x & 24y - 24 \end{pmatrix}$$

$\det H = 144(y-1)^2 - 36x^2$
1.) $x = 0, y = 2$: $\det H = 144 > 0$. Außerdem: $z_{xx} = 6y - 6 = 6 > 0$, d.h. H ist positiv definit, somit liegt eine Minimumstelle vor.
2.) $x = 0, y = 0$: $\det H = 144$ und $z_{xx} = -6 < 0$, also ist H negativ definit, d.h. es handelt sich um eine Maximumstelle.
3.) $x = -2$ bzw. $x = 2$ und $y = 1$: $\det H = -144$. Da H indefinit ist, sind beide Punkte weder Maximum- noch Minimumstelle und damit Sattelpunkte.

e) $(a/2; a/3)$ Ma (Gilt für alle $a \neq 0$; für $a = 0$ ist keine Aussage möglich.) Weiterhin sind sämtliche Punkte (x, y) mit $x = 0$ oder $y = 0$ stationär mit verschwindenden partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung, d.h. keine Beurteilung.
f) $(1; 1)$ Mi
g) $(3; 3)$ Mi, $(0; 0)$ Sp
h) $(0; 0)$ Ma
i) $(0; 0)$ Sp
k) $(2; 3)$ Mi
l) $(-1; -3)$ Mi
m) und n) keine Beurteilung (In Aufgabe m) liegt erkennbar ein uneigentliches Minimum entlang der Geraden $x_2 = x_1$ vor.)
o) $(-1; 3)$ Sp
p) $(-1; 2)$ Sp, $(1; 2)$ Ma
q) $(0; 0)$ Sp
r) Im Fall $a^2 + b^2 \neq 1$ liegt bei

$$\left(\frac{a^2 - ab}{2(1 - a^2 - b^2)} + \frac{1}{2}; \quad \frac{b^2 - ab}{2(1 - a^2 - b^2)}; \quad \frac{a - b}{2(1 - a^2 - b^2)}\right)$$

ein $\begin{cases} \text{lokales Minimum,} & \text{falls} \quad a^2 + b^2 < 1 \\ \text{Sattelpunkt,} & \text{falls} \quad a^2 + b^2 > 1 \end{cases}$

(Im Fall $a^2 + b^2 = 1$ existieren nur für $a = b = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ stationäre Punkte. Diese sind von der Form

$$\left(x_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - x_3 \frac{\sqrt{2}}{2}, x_3\right) \quad \text{mit} \quad x_3 \in I\!R$$

und allein mittels Hesse-Determinanten nicht zu beurteilen.)
s) Sattelpunkte bei $(2,5; 1; 4,375)$ und $(1,5; -1; -0,375)$.
t) $(2; -4; 1; 1)$ Ma Weitere stationäre Punkte: $(2; 0; 1; 1)$ Sp
$(-2; 0; 1; 1)$ Sp
$(-2; 4; 1; 1)$ Sp

9.52

Für $(r_1; r_2) = (50; 32)$ Produktionsmaximum, und zwar 500 [ME].

9.53

a) $x_1 = 3\frac{4}{7}$ $x_2 = 2\frac{6}{7}$ $G = 78\frac{4}{7}$ **b)** $x_1 = \frac{21}{11}$ $x_2 = \frac{19}{11}$ $G = \frac{623}{55} \approx 11,33$

c) zu a: $p_1 = 15\frac{5}{14}$, $p_2 = 22\frac{1}{2}$; zu b: $p_1 = \frac{292}{55}$, $p_2 = \frac{249}{55}$

9.54

$$x_{\text{opt}} = \sqrt{2\frac{RK_3}{TK_1}\left(\frac{K_1 + K_2}{K_2}\right)} \qquad s_{\text{opt}} = \sqrt{2\frac{RK_3}{TK_1}\left(\frac{K_2}{K_1 + K_2}\right)}$$

9.55

$p_H = 136,3$ $p_W = 130,2$

9.56

a) Bei $(2a; 2a)$ liegt für $a > 0$ ein Maximum und für $a < 0$ ein Minimum (beide jeweils lokal, nicht global, denn z ist nicht nach oben bzw. unten beschränkt); im Fall a=0 kein Extremum.
b) Bei $(a; a)$ liegt für $a \neq 0$ ein Maximum.

9.57

Die ermittelte "Lösung" ist unbrauchbar, da $p_1 = 16, p_2 = \frac{25}{3}$ nicht zum Definitionsbereich von $G = f(p_1, p_2)$ gehören; für die genannten Preise ergäbe sich bzgl. x_2 eine *negative* Nachfrage (!). Siehe ergänzend hierzu den Anhang .

9.58

Es gilt: $\nabla f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)/2}(-x, -y)$
Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch:
$g(x,y) := || \nabla f(x,y)|| = \sqrt{(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}}$

Das Maximum kann auf zwei Arten ermittelt werden.
Lösung 1
Die partiellen Ableitungen von g sind

$$g_x = \frac{(2xe^{-(x^2+y^2)})(1-x^2-y^2)}{2\sqrt{(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}}} \qquad g_y = \frac{(2ye^{-(x^2+y^2)})(1-x^2-y^2)}{2\sqrt{(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}}}$$

$g_x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x^2 + y^2 = 1$
$g_y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ oder $x^2 + y^2 = 1$
$g(0,0) = 0; \qquad g(x,y) = \sqrt{1/e} > 0$, falls $x^2 + y^2 = 1$
D.h. der Gradient nimmt auf den Punkten des Einheitskreises ein Maximum an.

Lösung 2
Setzt man $u := ||\underline{x}||^2$, so gilt $g(\underline{x}) = \sqrt{ue^{-u}}$, $(u \geq 0)$
Dieser Ausdruck wird genau dann maximal, wenn $h(u) := ue^{-u}$ maximal wird bzgl. $u \geq 0$ (denn die Wurzelfunktion ist monoton). Nun gilt $h'(u) = e^{-u}(1-u^2)$ $(= 0$ genau für $u^* = 1)$ und $h''(u) = e^{-u}(u^3 - 3u)$ $(< 0$ für $u = u^* = 1)$. Also wird g maximiert, wenn $x^2 + y^2 = 1$ gilt.

9.59

a) Die Richtung des größten Gewinnzuwachses im Punkt (p_1^0, p_2^0) ist gegeben durch den Gradienten der Gewinnfunktion (in Spaltenvektornotation):

$$\nabla G = \frac{-20}{((p_1^0-2)^2 + 3(p_2^0-5)^2+3)^2} \begin{pmatrix} p_1^0 - 2 \\ 3(p_2^0 - 5) \end{pmatrix}$$

Die Norm des Gradienten gibt die Gewinnzuwachsrate an:

$$|| \nabla G|| = \frac{20\sqrt{(p_1^0-2)^2 + 9(p_2^0-5)^2}}{((p_1^0-2)^2 + 3(p_2^0-5)^2+3)^2}$$

b) Die Gewinnzuwachsrate wird auf allen Punkten, die der Gleichung

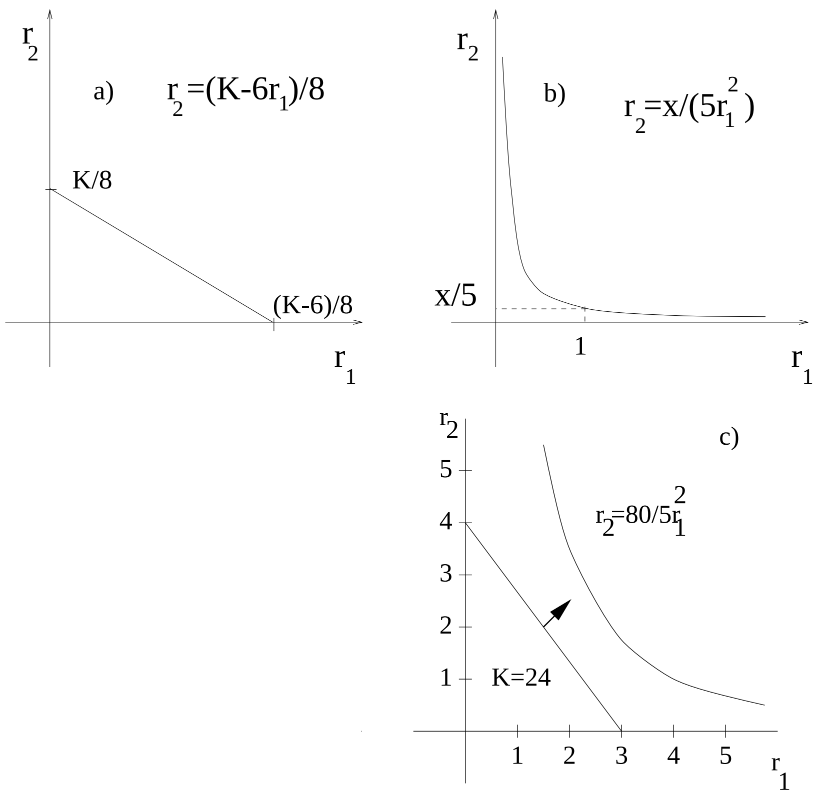
$$399(p_1-2)^2 + 3597(p_2-5)^2 - 3 = 0$$

genügen, maximal.

9.60

a) y ist nach oben und nach unten unbeschränkt, hat also weder ein globales Maximum noch ein globales Minimum.
b) nach oben sowie nach unten unbeschränkt
c) bei $(-1, 1)$ und $(1, -1)$ liegen globale Minima vor
d) – g) unbeschränkt nach oben und unten
h) $(0, 0)$ ist globale Maximumstelle
i) unbeschränkt
k) $(2, 3)$ ist globale Minimumstelle
l) $(-1, -3)$ ist globale Minimumstelle
m) y ist nach oben durch die Gerade $x_1 = x_2$ beschränkt
n) – p) unbeschränkt
q) nach unten beschränkt durch $xy = 1$
r) Im Fall $a^2 + b^2 < 1$ ist die lokale Minimumstelle eine globale.
s) – t) unbeschränkt

9.61



9.62

a)	Max bei $(7; 5)$	mit 150	$\lambda = 25$
b)	Max bei $(2; 8)$	mit 48	$\lambda = 16$
c)	Max bei $(0{,}25; 9{,}9375)$	mit 40,25	$\lambda = 4$
d)	Max bei $(1{,}67; 1{,}33)$	mit 2,33	$\lambda = 8/3$
e)	Min bei $(3{,}2; 3{,}4)$	mit 0,20	$\lambda = 0,4$
f)	Min bei $(3{,}67; 2{,}33; 3{,}33)$	mit 18,33	$\lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = 20/3$

9.63

a) $r_1 = 4$; $r_2 = 1$; $K = 36$

b) $x = -0,5$; $y = 1,5$; $z = 2,75$
$x = -0,5$; $y = -1,5$; $z = 2,75$

9.64

Die genannte Lösung führt nicht zum minimalen, sondern zum maximalen Kosteneinsatz! (Prüfen Sie diese Aussage nach!)

9.65

a) $r_1 = \frac{a_1 K_0}{(a_1 + a_2)p_1}$; $\quad r_2 = \frac{a_2 K_0}{(a_1 + a_2)p_2}$
(siehe auch wieder das Verhältnis $r_1 : r_2$!)

b) $K_0 = (a_1 + a_2)\left(\frac{1}{a_0}\left(\frac{p_1}{a_1}\right)^{a_1}\left(\frac{p_2}{a_2}\right)^{a_2}\right)^{\frac{1}{a_1+a_2}} x^{\frac{1}{a_1+a_2}}$
$k_0 = K_0/x$ mit K_0 wie oben.
$K_0' = \left(\frac{1}{a_0}\left(\frac{p_1}{a_1}\right)^{a_1}\left(\frac{p_2}{a_2}\right)^{a_2}\right)^{\frac{1}{a_1+a_2}} x^{\frac{1}{a_1+a_2}-1}$
Es gilt also: $k_0 = (a_1 + a_2)K_0'$

9.66

a) und b): $\qquad f_{r_1}/f_{r_2} = q_1/q_2$

9.67

a) $r_1 = r_2 = 8$

b) $\lambda = 0,8$
Wird der Output um eine Einheit erhöht (von 80 auf 81), so ändern sich (bei Minimalkostenkombination) die Kosten um ca. 0,8 Geldeinheiten.

c) $K(r_1, r_2) = 2r_2 + 6r_2$
Gemäß a) gilt: $r_1 = r_2$, also $K = 2r_1 + 6r_2 = 8r_1$;
ebenfalls gemäß a) folgt für die Produktionsfunktion:
$x = 10r_1^{1/4}r_2^{3/4} = 10r_1^{1/4}r_1^{3/4} = 10r_1$, also $r_1 = x/10$ und $K = 0,8\,x$

9.68

a) $x = 12$; $\quad y = 10$
b) $N_{max} = 120$
c) $E = 400\sqrt{3}$

9.69

$h = \sqrt[3]{\frac{4000}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \quad r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$,
also $h = 2r \quad (h \approx 10,84 \quad r \approx 5,42)$
$\lambda = 2/r = 2/\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8\pi}{500}} = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{125}} \approx 0,37$
Wird das Volumen V um eine Einheit vergrößert (also von 1000 auf 1001 cm^3), so ändert sich (bei Oberflächenminimierung) die Oberfläche um ca. 0,37 Einheiten.

9.70

a) $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

b)

$y \rightarrow$ $x \downarrow$	-2	-1	0	1	2	3
-2	-86	-58	-34	-14	2	14
-1	-72	-42	-16	6	24	38
0	-60	-28	0	24	44	60
1	-50	-16	14	40	62	80
2	-42	-6	26	54	78	98
3	-36	2	36	66	92	114

c) α) Maximum bei (3;3) mit 114 β) Minimum bei (-2;-2) mit -86

d) $f_x = 2y - 2x + 15$ $f_y = 2x - 4y + 26$
$f_{xx} = -2$ $f_{xy} = f_{yx} = 2$ $f_{yy} = -4$
Alle partiellen Ableitungen 3. Ordnung =0

e) $2^8 = 256$ Ableitungen 8. Ordnung (alle =0)

f) Nicht homogen

g) Relatives Maximum bei (28; 20,5)

h) α, β: Relatives Maximum bei (16;13)

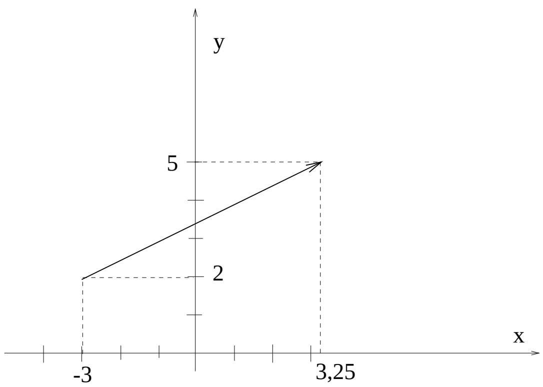
i) $dz = (2y - 2x + 15)dx + (2x - 4y + 26)dy$

j) α) $dz = 0,6$ β) $\triangle z = 0,5558$
Vergleich: $\triangle z - dz = -0,0442$ (= absoluter Fehler)

k) $dz = 0,6$ gibt näherungsweise die Änderung des Funktionswertes an, wenn man von der Stelle (3;-2) zur Stelle (3,2;-2,01) übergeht.

l) α) $\text{grad } z = \begin{pmatrix} 25 \\ 12 \end{pmatrix}$ β) $\text{grad } z = \begin{pmatrix} -2a + 2b + 15 \\ 2a - 4b + 26 \end{pmatrix}$

m) Richtung des stärksten Anstiegs in $p_1 = (-3, 2)$:



n) siehe g): $(x, y) = (28; 20, 5)$ stationäre Stelle

o) $y' = \dfrac{2x - 2y - 15}{2x - 4y + 26}$

$$y'' = \frac{4(2y - 2x + 15)(2x - 4y + 26) + 2(2x - 4y + 26)^2 + 4(2y - 2x + 15)^2}{(2x - 4y + 26)^3}$$

p) $y = \dfrac{x+13+\sqrt{-x^2+56x+169}}{2}$

$y' = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{28-x}{\sqrt{-x^2+66x+169}}\right) \qquad y'' = \dfrac{-476,5}{(-x^2+56x+169)^{3/2}}$

q) α) $\quad \lambda = 3$

β) Eine Vergrößerung des finanziellen Budgets um eine Geldeinheit von 74 auf 75 GE erhöht den Output (bei Outputmaximierung) um ca. 3 Einheiten.

r) α) $\quad \varepsilon_{zx} = \dfrac{(2y-2x+15)x}{-x^2-2y^2+15x+26y+2xy}$

$\varepsilon_{zy} = \dfrac{(-4y+2x+26)y}{-x^2-2y^2+15x+26y+2xy}$

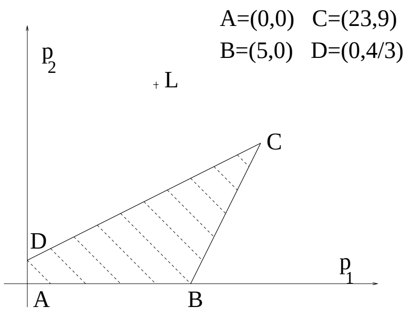
β) $\quad \varepsilon_{zx} = -3 \qquad \varepsilon_{zy} = 17/3 = 5,\overline{6}$

s) Wird der Wert der unabhängigen Variablen x (bzw. y) an der Stelle (2;-1) um 1% von 2 auf 2,02 (bzw. von -1 auf -0,99) erhöht und der Wert der unabhängigen Variablen y (bzw. x) dabei konstant gehalten, so ändert sich der Funktionswert von z näherungsweise um -3% (bzw. um $5,\overline{6}\%$).

Anhang

Die im Lehrbuch mitgeteilte Lösung $p_1 = 16$, $p_2 = 25/3$ ist unbrauchbar, da sie nicht zum Definitionsbereich der Gewinnfunktion gehört.

Der Definitionsbereich ergibt sich aus:
$p_1 \geq 0$
$p_2 \geq 0$
$x_1 \geq 0 \rightarrow 5 - p_1 + 2p_2 \geq 0 \rightarrow p_2 \geq \frac{1}{2}p_1 - \frac{5}{2}$
$x_2 \geq 0 \rightarrow 4 + p_1 - 3p_2 \geq 0 \rightarrow p_2 \leq \frac{1}{3}p_1 + \frac{4}{3}$
Die graphische Darstellung des Definitionsbereiches zeigt also etwa folgendes Bild
(Anmerkung: Die Zeichnung ist nicht maßstäblich):



Die im Lehrbuch genannte Lösung $L = (16, 25/3)$ liegt also außerhalb des Definitionsbereiches!

Es kommt also für die Lösung des Problems ein Randextremum in Frage.
Die "Ränder" sind hier: mit folgenden Gleichungen:
Rand 1: Die Strecke $\overline{AB}$ $\quad p_2 = 0 \wedge 0 \leq p_1 \leq 5$
Rand 2: Die Strecke $\overline{BC}$ $\quad p_2 = \frac{1}{2}p_1 - \frac{5}{2} \wedge 5 \leq p_1 \leq 23$
Rand 3: Die Strecke $\overline{CD}$ $\quad p_2 = \frac{1}{3}p_1 + \frac{4}{3} \wedge 0 \leq p_1 \leq 23$
Rand 4: Die Strecke $\overline{DA}$ $\quad p_1 = 0 \wedge 0 \leq p_2 \leq \frac{4}{3}$

Diese Werte werden jeweils gesondert in die Gewinnfunktion
$G = -p_1^2 - 3p_2^2 + 3p_1p_2 + 7p_1 + 2p_2 - 28$
eingesetzt. Die Gewinnfunktion reduziert sich dann auf jeweils eine Variable, und man kann ohne besondere Schwierigkeit G_{max} für jeden einzelnen Rand ermitteln, nämlich:

Rand 1 $p_2 = 0; \quad p_2$ in $G \to G = -p_1^2 + 7p_1 - 28$
$G' = -2p_1 + 7$; $G' = 0 \to p_1 = 7/2$
$G'' < 0$, somit Maximum.

Also: Auf dem Rand 1 liegt das Maximum bei $p_1 = 7/2, p_2 = 0$.
Somit hier: $G_{max} = -15\frac{3}{4}$, also Verlust.

Rand 2 $p_2 = \frac{1}{2}p_1 - \frac{5}{2}; \quad p_2$ in $G \to G = -\frac{1}{4}p_1^2 + 8p_1 - \frac{207}{4}$
$G' = -\frac{1}{2}p_1 + 8; \quad G' = 0 \to p_1 = 16; p_2 = \frac{11}{2}$
$G'' < 0$, somit Maximum.

Also: Auf dem Rand 2 liegt das Maximum bei $p_1 = 16, p_2 = 11/2$.
Somit hier: $G_{max} = 12\frac{1}{4}$

Rand 3 $p_2 = \frac{1}{3}p_1 + \frac{4}{3}; \quad p_2$ in $G \to G = -\frac{1}{3}p_1^2 + 9p_1 - \frac{92}{3}$
$G' = -\frac{2}{3}p_1 + 9; \quad G' = 0 \to p_1 = \frac{27}{2}; \quad p_2 = \frac{35}{6}$
$G'' < 0$, somit Maximum.
Also: Auf dem Rand 3 liegt das Maximum bei $p_1 = 27/2, p_2 = 35/6$.
Somit hier: $G_{max} = 30\frac{1}{12}$

Rand 4 $p_1 = 0; \quad p_1$ in $G \to G = -3p_2^2 + 2p_2 - 28$
$G' = -6p_2 + 2; \quad G' = 0 \to p_2 = \frac{1}{3}$
$G'' < 0$; somit Maximum.
Also: Auf dem Rand 4 liegt das Maximum bei $p_1 = 0, p_2 = 1/3$.
Somit hier: $G_{max} = -27\frac{2}{3}$, d.h. Verlust.

Von den vier Randmaxima ist dasjenige auf Rand 3 das absolute.
Die Lösung der im Lehrbuch vorgetragenen Aufgabe muß also lauten:
Für $p_1 = 27/2$ und $p_2 = 35/6$ ergibt sich das angestrebte Gewinnmaximum, und zwar mit $G = 30\frac{1}{12}$ GE.
Die zugehörigen Outputs betragen: $x_1 = 19/6, x_2 = 0$

10

10.1

Beispiele:
a) e^{x-1} b) e^{x^2} c) x^2 d) e^x
e) $1/x \quad (x \neq 0)$ f) $\dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$ oder $-\frac{1}{2}x^2 + x + 1$

Alle in den Fällen b), c), d) und e) gefundenen Beispiele müssen Spezialfälle sein von:

b) $y = ce^{x^2}$, $c \in \mathbb{R}$

c) $y = \begin{cases} 0 & x \leq c \\ (x-c)^2 & x > c \end{cases}$ oder $y = (x-c)^2$, $c \in \mathbb{R}$ oder

$y = \begin{cases} 0 & x > c \\ (x-c)^2 & x \leq c \end{cases}$ oder $y = 0$, $c \in \mathbb{R}$

d) $y = (1-c)e^x + ce^{-x}$, $c \in \mathbb{R}$

10.2

Die Lösungen werden durch Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke in die rechte Seite überprüft:
In den Fällen b) und d) ist die angegebene Funktion Lösung der DGL.

10.3

a) $y = 4 + ce^{-1/x} \quad c \in I\!R, x \neq 0 \qquad (*)$
(**Anmerkung:** Dies ist für jedes feste Intervall (a, b) mit $0 \leq a$ oder $b \leq 0$ die Darstellung der allgemeinen Lösung der DGL. Die auf ganz $I\!R$ definierten Lösungen haben die Form:

$$y = \begin{cases} 4 & x \leq 0 \\ 4 + ce^{-1/x} & x > 0, c \in I\!R \end{cases}$$

Alle anderen Lösungen sind an der Stelle 0 nicht definiert und lassen sich mittels (*) darstellen.

b) $y = ce^{\frac{4}{3}x^2} \quad (c \in I\!R, x \in I\!R)$

c) $y = \pm\sqrt{x^2 - c} \quad (|x| \geq \sqrt{c}, c > 0)$

d) $y = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + c \quad (x \in I\!R, c \in I\!R)$

e) $y = e^{\frac{2}{3}x^{3/2+1}} \quad (x \in I\!R)$

f) $y = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + 8,5 + 2\ln 2 \quad (x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty))$

g) $y = c\sqrt{1 + x^2} \quad (x \in I\!R, c \in I\!R)$

h) $y = (\frac{10}{27}x^3 + \frac{17}{27})^{1/5}$

10.4

a) $2e^{\frac{1}{2a}(x-1)}$ b) $2e^{\frac{a}{2}(x^2-1)}$
c) $-1/(x^2 - \frac{3}{2})$ d) $x/(1 - \frac{1}{2x})$ e) 2^x
Die DGLen aus a), d) und e) besitzen Lösungen, die für $x = 0$ den Anstieg 1 haben.

10.5

a) $y' + \frac{x-1}{x+1}y - \frac{x-1}{x+1} = 0$

b) $y' + (1 + \frac{1}{x})y = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

c) $z' + g(x)(1 - n)z = q(x)(1 - n)$

10.6

a) $ce^{\frac{-a}{2}x^2}$	b) cx^{-a}	c) $\frac{c}{1+x^2}$	d) $c(1+x)$
e) ce^{-ax}	f) $\frac{4x+1}{8} + ce^{-4x}$	g) $x + ce^{-2x}$	h) $e^x + ce^{-2x}$
i) $-\frac{1}{3}x^3 + cx^{-3}$	j) $-\frac{1}{4}e^{-x^2} + ce^{x^2}$	k) $\frac{(5/7)x^7 + x^5}{x^2+1} + \frac{c}{x^2+1}$	l) $\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} + ce^{-x^2}$
m) $-\ln x - 1 + cx$	n) $-\frac{1}{2}x + \frac{c}{x}$	o) $x\ln|x| + cx$	

In f) bis o) ist jeweils der letzte Summand Lösung der homogenen DGL.
Die DGLen in a), c), d), e), f), g), i), j), k) und l) haben eine partikuläre Lösung, die durch $(0, 0)$ geht.

10.7

1. $x(p) = 32/p^2$ 2. $\exp(p) = \frac{x'p}{x} = \frac{1}{4}p - 2 \Rightarrow x(p) = cp^{-2e^{\frac{1}{4}p}}$