UGH Paderborn, FB 17 – Dietz – ECO RSYS Sommer 2002

SERIE 2.8

1. Auf $D = \mathbb{R}^2$ werde die Funktion f mit

$$f(x,y) = 6xy - x^2y - 3y^3$$

betrachtet.

I. Kreuzen Sie **alle** Ihrer Meinung nach zutreffenden Antworten an:

a) Der Gradient f' von f lautet $f'(x,y) = \ldots$

$[\,6y + 2xy\ ,\ 6x - 9y^2 - x^2\,]$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$[\,(6-2x)y\ ,\ x(6-x) - 9y^2\,]$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$[\,(6y-2x)y\ ,\ 6x - 3x^2 - 9y^2\,]$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$[\,-2xy + 6y\ ,\ x^2 - 9y^2 - 6x\,]$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$[\,2(3y - xy)\ ,\ 6x - (x^2 + 9y^2)\,]$	R	F	?	$\frac{1}{2}$

b) Die Hesse-Matrix f'' von f lautet …

$\begin{bmatrix} -3y & 6-2x \\ 6-2x & -18y \end{bmatrix}$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$2\cdot\begin{bmatrix} -y & 3-x \\ 3-x & -9y \end{bmatrix}$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$2\cdot\begin{bmatrix} -y & 6-x \\ 6-x & 9y \end{bmatrix}$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$\begin{bmatrix} -2y & 6+x \\ 6+x & -18y \end{bmatrix}$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$\begin{bmatrix} -2y & -2x+6 \\ -2x+6 & -18y \end{bmatrix}$	R	F	?	$\frac{1}{2}$

c)

Der Punkt …	ist stationärer Punkt von f				falls ja, und zwar:						falls nein:	
$[3,-1]$	JA	NEIN	?	$\frac{1}{2}$	SP	MAX	MIN	k.B.	?		Entfällt	$\frac{1}{2}$
$[-3,-1]$	JA	NEIN	?	$\frac{1}{2}$	SP	MAX	MIN	k.B.	?		Entfällt	$\frac{1}{2}$
$[-3,1]$	JA	NEIN	?	$\frac{1}{2}$	SP	MAX	MIN	k.B.	?		Entfällt	$\frac{1}{2}$
$[3,1]$	JA	NEIN	?	$\frac{1}{2}$	SP	MAX	MIN	k.B.	?		Entfällt	$\frac{1}{2}$
$[0,1]$	JA	NEIN	?	$\frac{1}{2}$	SP	MAX	MIN	k.B.	?		Entfällt	$\frac{1}{2}$

$[1,0]$	JA NEIN ?	$\frac{1}{2}$	SP MAX MIN k.B. ?	Entfällt	$\frac{1}{2}$
$[0,0]$	JA NEIN ?	$\frac{1}{2}$	SP MAX MIN k.B. ?	Entfällt	$\frac{1}{2}$
$[6,3]$	JA NEIN ?	$\frac{1}{2}$	SP MAX MIN k.B. ?	Entfällt	$\frac{1}{2}$
$[0,3]$	JA NEIN ?	$\frac{1}{2}$	SP MAX MIN k.B. ?	Entfällt	$\frac{1}{2}$
$[6,0]$	JA NEIN ?	$\frac{1}{2}$	SP MAX MIN k.B. ?	Entfällt	$\frac{1}{2}$

II. Analysieren Sie die Vorzeichen der Hesse-Determinanten $H_1(x,y) = f_{xx}(x,y)$ und $H_2(x,y) = \det f''(x,y)$ in Abhängigkeit von x und y.

d) Es gilt $H_1(x,y) > 0$

$\Leftrightarrow \quad x > 0$	R F ?	$\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \quad y > 3$	R F ?	$\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \quad y < 0$	R F ?	$\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \quad y < -1$	R F ?	$\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \quad xy < 0$	R F ?	$\frac{1}{2}$

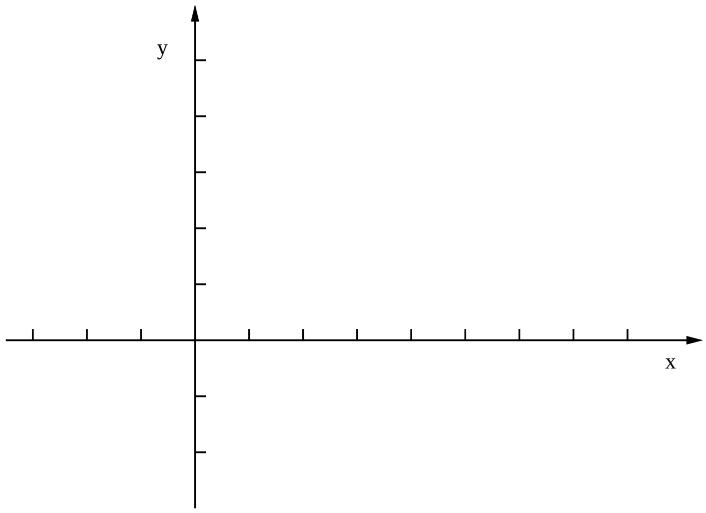
e) Es gilt $H_2(x,y) > 0$

$\Leftrightarrow \quad \lvert y\rvert > \frac{\lvert x-3\rvert}{3}$	R F ?	$\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \quad \left(y > \frac{\lvert x-3\rvert}{3} \text{ oder } y < -\frac{\lvert x-3\rvert}{3}\right)$	R F ?	$\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \quad \left(y > \frac{x-3}{3} \text{ oder } y < -\frac{x-3}{3}\right)$	R F ?	$\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \quad \left(y > \frac{x-3}{3} \text{ für } x \geq 3 \text{ oder } y < -\frac{x-3}{3} \text{ für } x < 3\right)$	R F ?	$\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow$ niemals	R F ?	$\frac{1}{2}$

f) Tragen Sie "möglichst große" Mengen $D^{\succcurlyeq}$, $D^{\preccurlyeq}$ und $D^{\curlywedge}$ in das nachfolgende Diagramm derart ein, daß

- f auf $D^{\succcurlyeq}$ konvex ist (schraffiert:)
- f auf $D^{\preccurlyeq}$ konkav ist (nicht schraffiert:)
- f auf $D^{\curlywedge}$ indefinit ist (grau:)

5



III. Wir betrachten die Funktion f jetzt nur noch auf dem “ökonomischen” Definitionsbereich $D_{oec} := [0,8] \times [0,3]$.

g) Ist f auf D_{oec} beschränkt? JA NEIN ? $\frac{1}{2}$

h) Besitzt f auf D_{oec} ein lokales Maximum? JA NEIN ? $\frac{1}{2}$

Wenn ja: z.B. an der Stelle $(x, y) =$ $\boxed{}$ mit $f(x, y) =$ $\boxed{}$

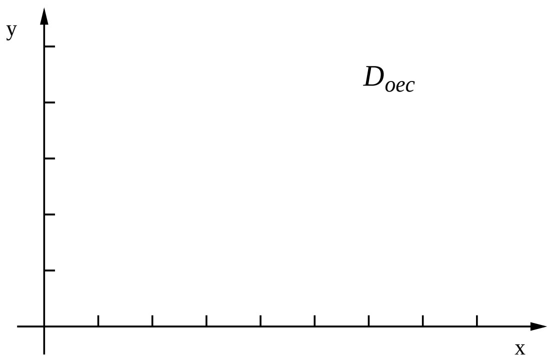
1

Wenn nein, Begründung ....

i) Ist f auf D_{oec} konkav? JA NEIN ? $\frac{1}{2}$

j) Ist es erforderlich, bei der Suche nach dem globalen (=absolut) Maximum von f die Ränder von D_{oec} zu untersuchen? JA NEIN ? $\frac{1}{2}$

k) Skizzieren Sie die Höhenlinie “$f(x, y) = 0$” in D_{oec} in nachfolgendem Diagramm:



2

l) Schraffieren Sie diejenige Teilmenge von D_{oec}, auf der gilt: $f(x, y) \geq 0$. 1

m) Eignet sich f auf D_{oec} Ihrer Meinung nach als Modell für eine

- Produktionsfunktion $\boxed{\text{JA}}$ $\boxed{\text{NEIN}}$ $\boxed{?}$,denn 1

  ....

  ....

- Kostenfunktion $\boxed{\text{JA}}$ $\boxed{\text{NEIN}}$ $\boxed{?}$,denn 1

  ....

  ....

- Gewinnfunktion $\boxed{\text{JA}}$ $\boxed{\text{NEIN}}$ $\boxed{?}$,denn 1

  ....

  ....

- Nutzenfunktion $\boxed{\text{JA}}$ $\boxed{\text{NEIN}}$ $\boxed{?}$,denn 1

  ....

  ....

(35 Punkte)

---

2. Ein Unternehmen produziert ein Gut G aus zwei Rohstoffen X und Y. Werden davon die Mengen x bzw. y eingesetzt, beträgt der Output

$$g(x,y) = \sqrt{x + \sqrt{y}} \qquad \text{[ME]}.$$

Dabei entstehen Kosten in Gesamthöhe von

$$K(x,y) = 18x + 3y + 30 \qquad \text{[GE]}.$$

(i) Ermitteln Sie einen Produktionsplan (x^*, y^*), mit dem ein Output von 5 ME G zu minimalen Kosten erzeugt wird.

(ii) Wie hoch sind die entstehenden Minimalkosten $K^* = K(x^*, y^*)$?

(iii) Wie stark werden die Minimalkosten ansteigen, wenn der Ziel-Output von 5 ME um eine (marginale) Einheit erhöht wird?

(Benutzen Sie die Methode des Lagrangeschen Multiplikators.)

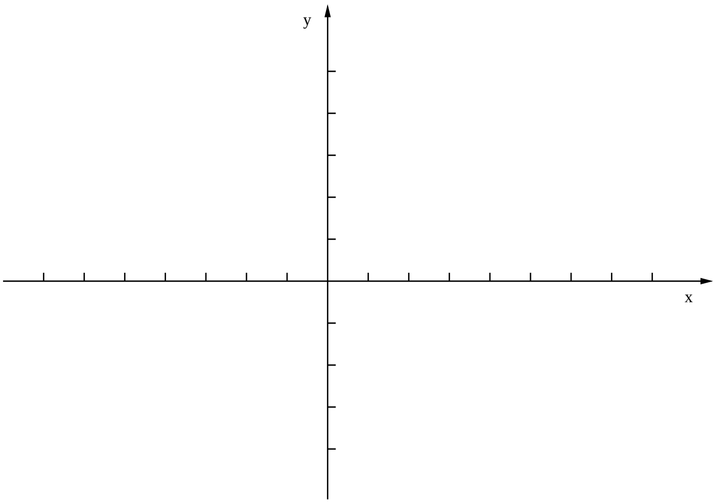
---

3. Von einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wurde die "Hesse-"Matrix der zweiten partiellen Ableitungen wie folgt ermittelt:

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 3x & 4y^3 \\ 4y^3 & 12xy^2 \end{pmatrix}$$

Skizzieren Sie in nachfolgendem Diagramm (möglichst große) Teilmengen $D^{\cup}$, $D^{\cap}$ bzw. $D^{\curlywedge}$ von $\mathbb{R}^2$ derart, daß f

- auf $D^{\cup}$ konvex ist ($D^{\cup}$ schraffieren:)
- auf $D^{\cap}$ konkav ist ($D^{\cap}$ nicht schraffieren:)
- auf $D^{\curlywedge}$ weder konvex noch konkav ist ($D^{\curlywedge}$ schattieren:)



Abgabe: bis 15.07.2002 13.00 Uhr
Box 7, 12, 114, 124 (orange/grün) auf D1-Flur

Rückgabe: ab 19.07.2002
in den Übungsgruppen