



SERIE 2.7 - Lösung

1. Ankreuzen Definitheit und stat. Punkte

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ besitze genau einen stationären Punkt mit zugehöriger Hesse – Matrix H . Entscheiden Sie in den nachfolgenden Beispielen -soweit möglich- über die Definitheit von H und die Art des stationären Punktes. (**Alle** zutreffenden Felder ankreuzen!)

H	Definitheit:	Art des stat. Punktes	Punkte
$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$	<input checked="" type="checkbox"/> $\lambda > 0$ <input checked="" type="checkbox"/> $\lambda < 0$ <input type="checkbox"/> $= 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda > 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda < 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda = 0$ <input type="checkbox"/> ?	SP <input checked="" type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> ?	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $\lambda > 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda < 0$ <input type="checkbox"/> $= 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda > 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda < 0$ <input checked="" type="checkbox"/> $\lambda = 0$ <input type="checkbox"/> ?	<input checked="" type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> ?	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $\lambda > 0$ <input checked="" type="checkbox"/> $\lambda < 0$ <input checked="" type="checkbox"/> $= 0$ <input checked="" type="checkbox"/> $\lambda > 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda < 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda = 0$ <input type="checkbox"/> ?	SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input checked="" type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> ?	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $\lambda > 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda < 0$ <input type="checkbox"/> $= 0$ <input checked="" type="checkbox"/> $\lambda > 0$ <input checked="" type="checkbox"/> $\lambda < 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda = 0$ <input type="checkbox"/> ?	SP <input type="checkbox"/> MAX <input checked="" type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> ?	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $\lambda > 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda < 0$ <input type="checkbox"/> $= 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda > 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda < 0$ <input checked="" type="checkbox"/> $\lambda = 0$ <input type="checkbox"/> ?	<input checked="" type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> ?	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $\lambda > 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda < 0$ <input type="checkbox"/> $= 0$ <input checked="" type="checkbox"/> $\lambda > 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda < 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda = 0$ <input type="checkbox"/> ?	SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input checked="" type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> ?	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $\lambda > 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda < 0$ <input type="checkbox"/> $= 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda > 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda < 0$ <input checked="" type="checkbox"/> $\lambda = 0$ <input type="checkbox"/> ?	<input checked="" type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> ?	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $\lambda > 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda < 0$ <input type="checkbox"/> $= 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda > 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda < 0$ <input checked="" type="checkbox"/> $\lambda = 0$ <input type="checkbox"/> ?	<input checked="" type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> ?	2 1

Legende:

$\lambda > 0$ positiv } definit
 $\lambda < 0$ negativ }
 $\lambda > 0$ positiv } semidefinit
 $\lambda < 0$ negativ }
 $=$ sowohl $\lambda > 0$ als auch $\lambda < 0$
 λ indefinit

SP (verallg.) Sattelpunkt
 MAX (lokaler) Maximumpunkt
 MIN (lokaler) Minimumpunkt
 k.B. keine Beurteilung möglich ohne Zusatz – Info
 ? weiß nicht

Hinweis: Punktvergabe analog zu Aufgabe 2.6.1 (minimal 0, maximal 10 Punkte). Nebenrechnungen, falls gemacht, bitte beifügen.

2. Schmiegefläche geändert

Fortsetzung von Aufgabe 1 der Serie 2.5:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = xy + e^{-x^2+xy}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Schmiegefläche 2. Ordnung im gleichen Punkt (1, 1).

3. Lokales Maximum und Minimum

Wir betrachten die durch

$$f(x, y) = 4x^4 - 8xy + \frac{2}{27}y^2 \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

definierte Funktion f .

- (a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f = (f_x, f_y)$ und die Hesse-Matrix

$$H := \nabla^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \text{ von } f.$$

- (b) Berechnen Sie alle stationären Punkte von f und klassifizieren Sie diese dahingehend, ob ein lokaler Minimum- bzw. Maximumpunkt oder ein (verallgemeinerter) Sattelpunkt vorliegt oder evtl. anhand der Hesse-Matrix allein eine Beurteilung nicht möglich ist.
- (c) Ist f auf einem Teil des Definitionsbereiches konkav/konvex? Wenn ja, auf welchem?

(Punkte)

4. Lokale Extrema ankreuzen

Auf \mathbb{R}^2 werde die Funktion f

$$f(x, y) = x^4 - 4x^2y^2 + xy^2$$

betrachtet. Diese besitzt $(0, 0)$ als stationären Punkt. Stellen Sie fest, ob weitere stationäre Punkte existieren, und klassifizieren Sie diese mit Hilfe der Hesse – Matrix bzw. durch Analyse von Vertikalschnitten (z.B. “ $y = ax$ ” für geeignete Konstanten a).

Kreuzen Sie die zutreffenden Felder an:

(i) Der Punkt	ist stationärer Punkt	und zwar (falls JA):	(falls NEIN):	Punkte
$(0, 0)$	<input checked="" type="checkbox"/> JA	<input checked="" type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> Entfällt	1
$\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}\right)$	<input type="checkbox"/> JA <input checked="" type="checkbox"/> NEIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input checked="" type="checkbox"/> Entfällt	1 1
$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$	<input checked="" type="checkbox"/> JA <input type="checkbox"/> NEIN <input type="checkbox"/> ?	<input checked="" type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> Entfällt	1 1
$\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$	<input type="checkbox"/> JA <input checked="" type="checkbox"/> NEIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input checked="" type="checkbox"/> Entfällt	1 1
$\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$	<input type="checkbox"/> JA <input checked="" type="checkbox"/> NEIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input checked="" type="checkbox"/> Entfällt	1 1
$\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$	<input checked="" type="checkbox"/> JA <input type="checkbox"/> NEIN <input type="checkbox"/> ?	<input checked="" type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> Entfällt	1 1
$\left(0, \frac{1}{4}\right)$	<input type="checkbox"/> JA <input checked="" type="checkbox"/> NEIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input checked="" type="checkbox"/> Entfällt	1 1

(ii) Es gilt

				Punkte
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 1$, und f ist beschränkt.	<input type="checkbox"/> R	<input checked="" type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> ?	$\frac{1}{2}$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, 0) = \infty$, und f ist nicht nach oben beschränkt.	<input checked="" type="checkbox"/> R	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> ?	$\frac{1}{2}$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, x) = -\infty$, und f ist nicht nach unten beschränkt.	<input checked="" type="checkbox"/> R	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> ?	$\frac{1}{2}$
f kann kein globales Maximum besitzen.	<input checked="" type="checkbox"/> R	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> ?	$\frac{1}{2}$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, \frac{x}{2}) = -\infty$, also ist f höchstens nach oben beschränkt.	<input checked="" type="checkbox"/> R	<input checked="" type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> ?	$\frac{1}{2}$
Existiert ein unbeschränkter Vertikalschnitt, ist f unbeschränkt.	<input checked="" type="checkbox"/> R	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> ?	$\frac{1}{2}$
Existiert ein strikt konvexer Vertikalschnitt, ist f nicht konkav.	<input checked="" type="checkbox"/> R	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> ?	$\frac{1}{2}$
Sind alle Vertikalschnitte konvex, ist f konvex.	<input checked="" type="checkbox"/> R	<input type="checkbox"/> F	<input type="checkbox"/> ?	$\frac{1}{2}$

Hinweis: Punktvergabe analog Aufgabe 2.6.1 (minimal 0, maximal 17 Punkte).
Nebenrechnungen, falls gemacht, bitte beifügen.

(Punkte)
