SERIE 2.7

1. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ besitze genau einen stationären Punkt mit zugehöriger Hesse – Matrix H. Entscheiden Sie in den nachfolgenden Beispielen -soweit möglich- über die Definitheit von H und die Art des stationären Punktes. (**Alle** zutreffenden Felder ankreuzen!)

H	Definitheit:	Art des stat. Punktes	Punkte
$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$	$\boxed{\prec 0}$ $\boxed{\preceq 0}$ $\boxed{= 0}$ $\boxed{\succeq 0}$ $\boxed{\succ 0}$ $\boxed{\curlywedge 0}$ $\boxed{?}$	$\boxed{\text{SP}}$ $\boxed{\text{MAX}}$ $\boxed{\text{MIN}}$ $\boxed{\text{k.B.}}$ $\boxed{\textbf{?}}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\boxed{\prec 0}$ $\boxed{\preceq 0}$ $\boxed{= 0}$ $\boxed{\succeq 0}$ $\boxed{\succ 0}$ $\boxed{\curlywedge 0}$ $\boxed{?}$	$\boxed{\text{SP}}$ $\boxed{\text{MAX}}$ $\boxed{\text{MIN}}$ $\boxed{\text{k.B.}}$ $\boxed{\textbf{?}}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\boxed{\prec 0}$ $\boxed{\preceq 0}$ $\boxed{= 0}$ $\boxed{\succeq 0}$ $\boxed{\succ 0}$ $\boxed{\curlywedge 0}$ $\boxed{?}$	$\boxed{\text{SP}}$ $\boxed{\text{MAX}}$ $\boxed{\text{MIN}}$ $\boxed{\text{k.B.}}$ $\boxed{\textbf{?}}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\boxed{\prec 0}$ $\boxed{\preceq 0}$ $\boxed{= 0}$ $\boxed{\succeq 0}$ $\boxed{\succ 0}$ $\boxed{\curlywedge 0}$ $\boxed{?}$	$\boxed{\text{SP}}$ $\boxed{\text{MAX}}$ $\boxed{\text{MIN}}$ $\boxed{\text{k.B.}}$ $\boxed{\textbf{?}}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$	$\boxed{\prec 0}$ $\boxed{\preceq 0}$ $\boxed{= 0}$ $\boxed{\succeq 0}$ $\boxed{\succ 0}$ $\boxed{\curlywedge 0}$ $\boxed{?}$	$\boxed{\text{SP}}$ $\boxed{\text{MAX}}$ $\boxed{\text{MIN}}$ $\boxed{\text{k.B.}}$ $\boxed{\textbf{?}}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$	$\boxed{\prec 0}$ $\boxed{\preceq 0}$ $\boxed{= 0}$ $\boxed{\succeq 0}$ $\boxed{\succ 0}$ $\boxed{\curlywedge 0}$ $\boxed{?}$	$\boxed{\text{SP}}$ $\boxed{\text{MAX}}$ $\boxed{\text{MIN}}$ $\boxed{\text{k.B.}}$ $\boxed{\textbf{?}}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\boxed{\prec 0}$ $\boxed{\preceq 0}$ $\boxed{= 0}$ $\boxed{\succeq 0}$ $\boxed{\succ 0}$ $\boxed{\curlywedge 0}$ $\boxed{?}$	$\boxed{\text{SP}}$ $\boxed{\text{MAX}}$ $\boxed{\text{MIN}}$ $\boxed{\text{k.B.}}$ $\boxed{\textbf{?}}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\boxed{\prec 0}$ $\boxed{\preceq 0}$ $\boxed{= 0}$ $\boxed{\succeq 0}$ $\boxed{\succ 0}$ $\boxed{\curlywedge 0}$ $\boxed{?}$	$\boxed{\text{SP}}$ $\boxed{\text{MAX}}$ $\boxed{\text{MIN}}$ $\boxed{\text{k.B.}}$ $\boxed{\textbf{?}}$	2 1

Legende:

$\succ$	positiv	definit
$\prec$	negativ	definit
$\succeq$	positiv	semidefinit
$\preceq$	negativ	semidefinit
$=$	sowohl $\succeq$ als auch $\preceq$	
$\curlywedge$	indefinit	

SP	(verallg.) Sattelpunkt
MAX	(lokaler) Maximumpunkt
MIN	(lokaler) Minimumpunkt
k.B.	keine Beurteilung möglich ohne Zusatz – Info
?	weiß nicht

Hinweis: Punktvergabe analog zu Aufgabe 2.6.1 (minimal 0, maximal 10 Punkte). Nebenrechnungen, falls gemacht, bitte beifügen.

2. **Fortsetzung von Aufgabe 1 der Serie 2.5:**
Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = xy + e^{-x^2+xy} \ , \ (x,y) \in I\!R^2 \, .$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Schmiegefläche 2. Ordnung im gleichen Punkt $(1,1)$.

---

3. Wir betrachten die durch

$$f(x,y) = 4x^4 - 8xy + \frac{2}{27}y^2 \quad \text{für} \quad (x,y) \in I\!R^2$$

definierte Funktion f.

(a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f = (f_x, f_y)$ und die Hesse-Matrix $H := \nabla^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ von f.

(b) Berechnen Sie alle stationären Punkte von f und klassifizieren Sie diese dahingehend, ob ein lokaler Minimum- bzw. Maximumpunkt oder ein (verallgemeinerter) Sattelpunkt vorliegt oder evtl. anhand der Hesse-Matrix allein eine Beurteilung nicht möglich ist.

(c) Ist f auf einem Teil des Definitionsbereiches konkav/konvex? Wenn ja, auf welchem?

---

4. Auf $I\!R^2$ werde die Funktion f

$$f(x,y) = x^4 - 4x^2y^2 + xy^2$$

betrachtet. Diese besitzt $(0,0)$ als stationären Punkt. Stellen Sie fest, ob weitere stationäre Punkte existieren, und klassifizieren Sie diese mit Hilfe der Hesse – Matrix bzw. durch Analyse von Vertikalschnitten (z.B. "$y = ax$" für geeignete Konstanten a).

Kreuzen Sie die zutreffenden Felder an:

(i) Der Punkt	ist stationärer Punkt	und zwar (falls JA):	(falls NEIN):	Punkte
$(0,0)$	JA	SP MAX MIN ?	Entfällt	1
$\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}\right)$	JA NEIN ?	SP MAX MIN ?	Entfällt	1 1
$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$	JA NEIN ?	SP MAX MIN ?	Entfällt	1 1
$\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$	JA NEIN ?	SP MAX MIN ?	Entfällt	1 1
$\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$	JA NEIN ?	SP MAX MIN ?	Entfällt	1 1
$\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$	JA NEIN ?	SP MAX MIN ?	Entfällt	1 1
$\left(0, \frac{1}{4}\right)$	JA NEIN ?	SP MAX MIN ?	Entfällt	1 1

Fortsetzung nächste Seite

(ii) Es gilt

		Punkte
$\lim_{x \to 0} f(x,y) = 1$, und f ist beschränkt.	$\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\textbf{?}}$	$\frac{1}{2}$
$\lim_{x \to \infty} f(x,0) = \infty$, und f ist nicht nach oben beschränkt.	$\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\textbf{?}}$	$\frac{1}{2}$
$\lim_{x \to \infty} f(x,x) = -\infty$, und f ist nicht nach unten beschränkt.	$\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\textbf{?}}$	$\frac{1}{2}$
f kann kein globales Maximum besitzen.	$\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\textbf{?}}$	$\frac{1}{2}$
$\lim_{x \to \infty} f(x, \frac{x}{2}) = -\infty$, also ist f höchstens nach oben beschränkt.	$\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\textbf{?}}$	$\frac{1}{2}$
Existiert ein unbeschränkter Vertikalschnitt, ist f unbeschränkt.	$\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\textbf{?}}$	$\frac{1}{2}$
Existiert ein strikt konvexer Vertikalschnitt, ist f nicht konkav.	$\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\textbf{?}}$	$\frac{1}{2}$
Sind alle Vertikalschnitte konvex, ist f konvex.	$\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\textbf{?}}$	$\frac{1}{2}$

Hinweis: Punktvergabe analog Aufgabe 2.6.1 (minimal 0, maximal 17 Punkte).
Nebenrechnungen, falls gemacht, bitte beifügen.

Abgabe: bis 08.07.2002 13.00 Uhr
Box 7, 12, 114, 124 (orange/grün) auf D1-Flur

Rückgabe: ab 15.07.2002
in den Übungsgruppen