Rechnungen:

Aufgabe 1 : **9 Punkte**

Man bestimme

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x}} e^{\sqrt{2x}}\, dx =$

(ii) $\displaystyle\int x^2 \ln x^3 \, dx =$

(iii) $\displaystyle\int_{-15}^{15} \left(x^9 - x^7\right)\, dx =$

(iv) $\displaystyle\int_0^4 (x-1)(x-3)\, dx =$

Rechnungen:

Aufgabe 2 : **5 Punkte**

Ein Unternehmen produziert mit den Grenzstückkosten

$$k'(x) = 24x - 3 - \frac{550}{x^2} \qquad \left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}}\right]$$

bei einer Ausbringungsmenge von x [ME] des produzierten Gutes. Bekannt sei weiterhin, daß sich die Gesamtkosten bei einer Ausbringung von 10 ME des produzierten Gutes auf 12400 [GE] belaufen. Ermitteln Sie die (Gesamt-) Kostenfunktion K!

Lösung:

$K(x) =$	Maßeinheit

Rechnung:

Aufgabe 3 : **10 Punkte**

Eine Funktion f soll durch den Ausdruck

$$f(x,y) \;=\; \sqrt{1-xy}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ definiert werden, für die dieser Ausdruck sinnvoll ist.
Skizzieren Sie:

(i) den Definitionsbereich D_f

(ii) den Vertikalschnitt "$x \;=\; 1/2$"

(iii) den Vertikalschnitt "$y \;=\; x$" (als Funktion von x)

(iv) den Vertikalschnitt "$y \;=\; -x$" (als Funktion von x).

Hinweis: *Bitte jeweils*
- die Formel angeben
- 1 Punkt der Kurve beschriften
- Wachstum und Krümmung korrekt skizzieren
(Begründung - z.B. mittels Ableitungen - <u>nicht</u> erforderlich).

(i) Definitionsbereich D_f:

Formel $D_f \;=\;$ $\boxed{\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \qquad\qquad\qquad \right\}}$

Skizze: D_f *schraffieren:*

Erinnerung: $f(x,y) = \sqrt{1-xy}$

(ii) Vertikalschnitt "$x = 1/2$": *Formel:* $y \mapsto$ $\boxed{}$

Skizze: (Achsen selbst einzeichnen!)

(iii) Vertikalschnitt "$y = x$": *Formel:* $x \mapsto$ $\boxed{}$

Skizze:

(iv) Vertikalschnitt "$y = -x$": *Formel:* $x \mapsto$ $\boxed{}$

Skizze:

Aufgabe 4 : **20 Punkte**

Auf $D = \mathbb{R}^2$ werde die Funktion f mit

$$f(x,y) = 24xy - 3x^2y - 4y^3$$

betrachtet.

Kreuzen Sie alle Ihrer Meinung nach zutreffenden Antworten an:

$\boxed{\text{R}}$ $\widehat{=}$ "richtig" $\boxed{\text{F}}$ $\widehat{=}$ "falsch" $\boxed{\textbf{?}}$ $\widehat{=}$ "weiß nicht" $\boxed{\textbf{J}}$ $\widehat{=}$ "JA" $\boxed{\textbf{N}}$ $\widehat{=}$ "NEIN"

$\boxed{\text{MIN}}$ $\widehat{=}$ "Minimum" $\boxed{\text{MAX}}$ $\widehat{=}$ "Maximum" $\boxed{\text{SP}}$ $\widehat{=}$ "Sattelpunkt" $\boxed{\text{k.B.}}$ $\widehat{=}$ "keine Beurteilung"

---

a) Der Gradient $f'(x,y)$ ist gegeben durch...

$[\ 24y - 6y^2\ ,\ 24x - 3x^2 - 12y^3\ ]$	R	F	?
$3[\ y(8-2x)\ ,\ 8x - (x^2 + 4y^2)\ ]$	R	F	?
$[\ 24y - 6xy\ ,\ 24x - 3x^2 - 12y^2\ ]$	R	F	?
$[\ 24y^2 - 6xy\ ,\ 24x - 3x^2 - 12y\ ]$	R	F	?

---

b) Die Hesse-Matrix $f''(x,y)$ ist gegeben durch

$\begin{bmatrix} -6x & 24-y \\ 24-y & -12x \end{bmatrix}$	R	F	?
$(-6)\begin{bmatrix} -y & x+4 \\ x+4 & -4y \end{bmatrix}$	R	F	?
$(-6)\begin{bmatrix} y & x-4 \\ x-4 & 4y \end{bmatrix}$	R	F	?
$\begin{bmatrix} -4y & 24-3x \\ 24-3x & -18y \end{bmatrix}$	R	F	?
$\begin{bmatrix} -6y & 24-6x \\ 24-6x & -24y \end{bmatrix}$	R	F	?

---

c) Übersicht über die stationären Punkte:

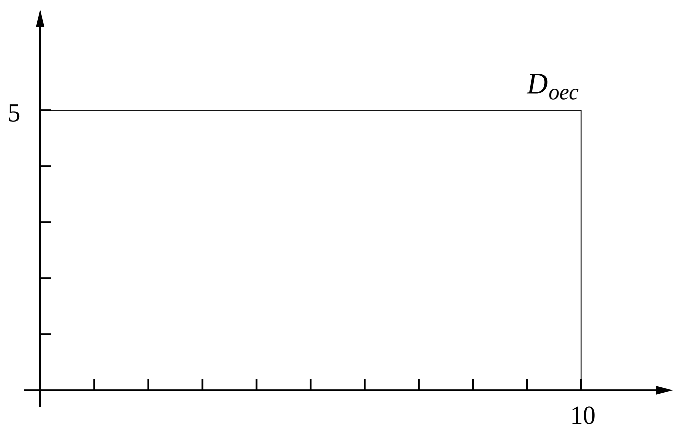
Der Punkt...	ist stationärer Punkt von f			falls JA: und zwar:					falls NEIN:
$[8, 0]$	J	N	?	MIN	MAX	SP	k.B.	?	entfällt
$[8, 2]$	J	N	?	MIN	MAX	SP	k.B.	?	entfällt
$[4, 2]$	J	N	?	MIN	MAX	SP	k.B.	?	entfällt
$[-4, 2]$	J	N	?	MIN	MAX	SP	k.B.	?	entfällt
$[4, -2]$	J	N	?	MIN	MAX	SP	k.B.	?	entfällt
$[0, -2]$	J	N	?	MIN	MAX	SP	k.B.	?	entfällt
$[0, 0]$	J	N	?	MIN	MAX	SP	k.B.	?	entfällt
$[4, 4]$	J	N	?	MIN	MAX	SP	k.B.	?	entfällt

Rechnungen:

Erinnerung:

$$f(x,y) = 24xy - 3x^2y - 4y^3$$

d) Wir betrachten f nunmehr als *Gewinnfunktion* auf dem ökonomischen Definitionsbereich $D_{oec} = [\,0,10\,] \times [\,0,5\,]$.
Zeichnen Sie die Isoquante "$f = 0$" in das nachfolgende Diagramm ein (**Tip:** y *ausklammern*) und schraffieren (▨) Sie die Gewinnzone $D_{Gewinn} = \{\ (x,y) \in D_{oec} \mid f(x,y) \geq 0\}$.



---

e) Der maximale Gewinn beträgt $\boxed{}$ GE und wird mit dem Faktorbündel

$(x_{opt}, y_{opt}) \ = \ \boxed{}$ erzielt.

Aufgabe 5 : **8 Punkte**

In einem Unternehmen sollen 8 Mengeneinheiten eines Produktes P aus zwei Rohstoffen X und Y produziert werden. Technologiebedingt entsteht beim Einsatz von x bzw. y Mengeneinheiten dieser Rohstoffe ein Output von

$$p(x,y) = \sqrt{3\sqrt{x}+2y} \quad \text{[ME]},$$

wobei sich die Gesamtkosten auf

$$K(x,y) = 18x + 48y + 20 \quad \text{[GE]}$$

belaufen.

(i) Geben Sie einen Produktionsplan (x^*, y^*) an, der den gewünschten Output bei minimalen Gesamtkosten realisiert.

(ii) Wie hoch sind die minimalen Gesamtkosten $K^* = K(x^*, y^*)$?

(iii) Wie wirkt sich eine Steigerung des Ziel-Outputs um eine marginale Einheit auf die Minimalkosten aus?

Lösen Sie diese Aufgabe mit der Methode des Lagrangeschen Multiplikators.

Lösung: *(Ausfüllen bzw. ergänzen:)*

$x^* = \boxed{}$ $y^* = \boxed{}$ $K^* = \boxed{}$

Bei Erhöhung des Ziel-Outputs um eine marginale Einheit ...

....
....

Rechnungen: *Lagrangefunktion und Ableitungen:*

$$\mathbb{L}(x,y,\lambda) = \boxed{}$$

$$\mathbb{L}_x(x,y,\lambda) = \boxed{}$$

$$\mathbb{L}_y(x,y,\lambda) = \boxed{}$$

$$\mathbb{L}_\lambda(x,y,\lambda) = \boxed{}$$

Aufgabe 6 : **8 Punkte**

Von einer Funktion $f : D \to I\!R$ mit $D := [0,8] \times [-2,2]$ wurde die folgende "Hesse-"Matrix der 2. partiellen Ableitungen ermittelt:

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} y & x-4 \\ x-4 & 4y \end{bmatrix}$$

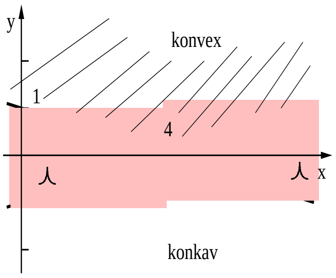
(i) Welche der nachfolgenden Bedingungen ist *notwendig* <u>*und*</u> *hinreichend* dafür, daß $f''(x,y)$ **indefinit** ist?

a)	$\det f''(x,y) = -1$	R	F	**?**
b)	$\det f''(x,y) < -1$	R	F	**?**
c)	$\det f''(x,y) < 0$	R	F	**?**
d)	$\lvert y\rvert < \frac{1}{2}\lvert x-4\rvert$	R	F	**?**
e)	$\lvert y\rvert \geq \frac{1}{2}\lvert x-4\rvert$	R	F	**?**
f)	$2y < \lvert x-4\rvert$ und $2y > -\lvert x-4\rvert$	R	F	**?**

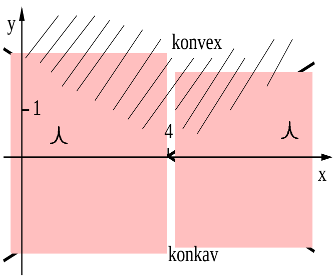
(ii) Geben Sie möglichst große Teilmengen des Definitionsbereiches D an, auf denen f

- konvex (*Schraffur:*)
- konkav (*keine Schraffur:*)
- weder konvex noch konkav ist! (*schattiert:*)

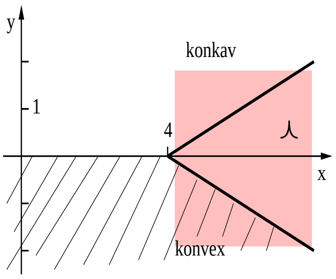
(Zutreffendes ankreuzen!)



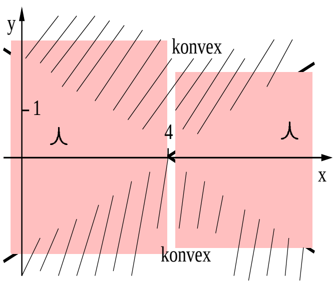
R F ?



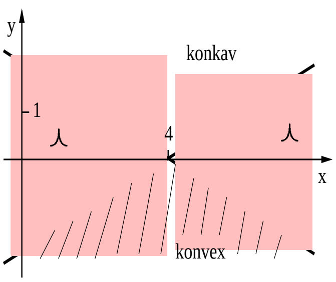
R F ?



R F ?



R F ?



R F ?

Rechnungen: